Математика

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.309-316

УДК 519.624

Дискретное продолжение по наилучшему параметру в краевой задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

© **М. Н. Афанасьева**[1], **Е. Б. Кузнецов**[2]

Аннотация. В статье рассмотрено решение краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Решение краевой задачи основывается на методе стрельбы в рамках которого для вычисления введенного параметра используются метод продолжения по параметру в форме Лаэя, метод наилучшей параметризации и метод Ньютона, что позволяет получить возможные решения задачи. Для построения решения задачи Коши на каждом шаге метода стрельбы применяется метод дискретного продолжения по наилучшему параметру совместно с методом Ньютона. Такой подход позволяет построить решения в случае наличия предельных особых точек, что обеспечивает как успешное построение решений, так и продолжение итерационного процесса метода Ньютона. Используемый алгоритм дополнен вычислением интерполяционного полинома в форме Лагранжа для определения значений функций в точках запаздывания. Пример, приведенный в статье, отражает преимущества предложенного метода.

Ключевые слова: численное решение, уравнения с запаздыванием, краевая задача, наилучший параметр, дискретное продолжение, метод стрельбы.

1. Введение

Применение запаздывания в постановке краевых задач достаточно широко распространено при моделировании процессов в механике, биологии, экономике [1]. Исключение запаздывания может привести к некорректному результату вычисления и искажению моделирования поведения исследуемого процесса. В статье рассматривается решение краевых задач для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В работе [2] было рассмотрено использование наилучшей параметризации для вычисления возможных решений задач подобного вида. Для решения краевой задачи приведенный метод решения представляет собой комбинацию метода стрельбы [3] и метода продолжения по наилучшему параметру [4], а для решения краевой задачи – комбинацию методов Рунге-Кутта и интерполяции Лагранжа. В [2] отражена высокая результативность применения метода наилучшей параметризации для вычисления возможных значений параметра метода стрельбы, однако в случае прохождения предельных особых точек при

[1]**Афанасьева Мария Николаевна**, аспирант кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7487-4796, mary.mai.8@yandex.ru

[2]**Кузнецов Евгений Борисович**, профессор кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9452-6577, kuznetsov@mai.ru

построении решения начальной задачи метод Рунге-Кутта может оказаться неэффективным. В настоящей статье рассматривается применение метода дискретного продолжения по наилучшему параметру при решении задачи Коши, что позволяет построить искомые решения.

Преимущества применения дискретного продолжения по параметру отражены в ряде работ, исследующих решение краевых задач для систем дифференциально-алгебраических [5] и обыкновенных дифференциальных [6] уравнений без запаздывания. Использование непрерывного и дискретного методов продолжения по параметру для решения начальных задач для системы интегродифференциально-алгебраических с запаздыванием рассмотрено в [7].

Алгоритм, представленный в работе, позволяет построить решение при наличии предельных особых точек, что обеспечивает не только вычисление решений начальной задачи, но и продолжение итерационного процесса метода стрельбы.

2. Постановка задачи

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dt} = f(t, y\,(t)\,, y\,(t-\tau)\,, \dot{y}\,(t-\tau)), \\ f : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{3s} \to \mathbf{R}^s, \end{gathered} \tag{2.1}$$

для которой заданы краевые условия:

$$W\,(y(a), y(b)) = 0, \tag{2.2}$$

где $y(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^s$ – искомая вектор-функция; $[a, b]$ – заданный интервал интегрирования.

На множестве $E = \{T < a \mid \exists t > a, t - \tau = T\}$ заданы достаточно гладкие функции $\varphi_{1,2}(T)$ такие, что:

$$\begin{gathered} y_\tau = y(t-\tau) = \varphi_1(T), \\ \dot{y}_\tau = \dot{y}(t-\tau) = \varphi_2(T). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Предполагается, что функции f и W удовлетворяют условиям, при которых решение исследуемой задачи существует на интервале интегрирования.

Рассмотрим построение численного алгоритма, который позволит определить возможные решения задачи (2.1)–(2.3) в случае наличия предельных особых точек, при прохождении которых правая часть каких-либо уравнений системы (2.1) теряет смысл.

3. Преобразование задачи и численное решение

Построение алгоритма рассмотрим на примере системы двух уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1\,(t)\,, y_1\,(t-\tau)\,, \dot{y}_1\,(t-\tau)\,, y_2\,(t)\,, y_2\,(t-\tau)\,, \dot{y}_2\,(t-\tau)), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2((t, y_1\,(t)\,, y_1\,(t-\tau)\,, \dot{y}_1\,(t-\tau)\,, y_2\,(t)\,, y_2\,(t-\tau)\,, \dot{y}_2\,(t-\tau)), \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} y_1(a) = y_a, \\ y_2(b) = y_b, \\ y_{1\tau} = \varphi_{11}(T), \dot{y}_{1\tau} = \varphi_{21}(T), \\ y_{2\tau} = \varphi_{12}(T), \dot{y}_{2\tau} = \varphi_{22}(T), \end{gathered} \tag{3.2}$$

Для решения краевой задачи применяется метод стрельбы [8], согласно которому краевое условие в конечной точке инервала интегрирования заменяется на начальное с помощью ввода параметра: $y_2(a) = p$.

Значение введенного параметра p должно быть подобрано так, чтобы вычисленные кривые решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ удовлетворяли заданным условиям в точках a и b задачи (3.1), т. е. должно выполняться условие:

$$F(p) = y_2(b, p) - y_b = 0. \tag{3.3}$$

В статье [2] для решения уравнения (3.3) используется метод Ньютона, обладающий преимуществом ввиду высокой скорости сходимости. Для устранения трудностей, связанных с проблемой выбора начального приближения, (3.3) преобразуется с помощью ввода параметра μ следующим образом [9–10]:

$$\Phi(p, \mu) = F(p) - (1 - \mu)F(p_0) = 0. \tag{3.4}$$

Для решения (3.4) используется метод продолжения по параметру в форме Лаэя [10], где для каждого μ_k вычисляется p_k при помощи метода Ньютона:

$$\begin{gathered} p^{(i+1)}_{(k)} = p^{(i)}_{(k)} - \left[\frac{\Phi(p^{(i)}_{(k)}, \mu_{(k)}) - \Phi(p^{(i-1)}_{(k)}, \mu_{(k)})}{p^{(i)}_{(k)} - p^{(i-1)}_{(k)}}\right]^{-1} \Phi(p^{(i)}_{(k)}, \mu_{(k)}), \\ p^{(0)}_{(k+1)} = p^{(r_k)}_{(k)}, i = 1, 2, ..., r_{k-1}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $0 = \mu_1 < \cdots < \mu_m = 1$; $p^{(i)}_{(k)}$ – значение параметра p на i-м шаге метода Ньютона при каждом μ_k, $k = \overline{1, m}$.

Данный подход позволяет вычислить искомые значения p, но при немонотонном изменении параметра μ уравнение (3.4) необходимо дополнительно параметризовать, используя метод продолжения по наилучшему параметру, которым является длина кривой множества решений уравнения (3.4) [4].

Кривая множества решений разбивается на равные участки $\nu_0 = 0 < \nu_1 < ... < \nu_l = L$, уравнение (3.5) преобразуется к виду:

$$\Psi_{k+1}(\check{z}) = \begin{cases} F(p) - (1 - \mu)F(p_0) = 0, \\ (p - p^{(r_k)}_k)^2 + (\mu - \mu^{(r_k)}_k)^2 - \triangle^2_\nu = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $z = (p, \mu); \nu_{k+1} = \nu_k + \triangle_\nu; \nu_0 = 0; \nu_l = L$, что обеспечивает немонотонность изменения параметров p и μ и позволяет вычислить возможные значения искомого параметра.

При каждом найденном значении параметра p решается задача Коши. Успешное построение решения начальной задачи влияет как на получение конечного результата, так и на продолжение итерационного процесса метода стрельбы. Поэтому для вычисления решений рассматривается применение метода дискретного продолжения по наилучшему параметру [11]. Теперь функции $y_1(\lambda)$, $y_2(\lambda)$, $t(\lambda)$ равноправны и зависят от параметра λ.

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{d\lambda} = f_1(t, y_1(t), y_1(t-\tau), \dot{y}_1(t-\tau), y_2(t), y_2(t-\tau), \dot{y}_2(t-\tau))\frac{dt}{d\lambda}, \\ \frac{dy_2}{d\lambda} = f_2((t, y_1(t), y_1(t-\tau), \dot{y}_1(t-\tau), y_2(t), y_2(t-\tau), \dot{y}_2(t-\tau))\frac{dt}{d\lambda}, \\ (y_1 - dy_{1*})^2 + (y_2 - dy_{2*})^2 + (t - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 = 0, \\ y_1(a) = y_a, y_2(a) = p, \\ y_{1\tau} = \varphi_{11}(T), \dot{y}_{1\tau} = \varphi_{21}(T), \\ y_{2\tau} = \varphi_{12}(T), \dot{y}_{2\tau} = \varphi_{22}(T), \end{gathered} \tag{3.7}$$

Полученная система преобразуется путем замены производных дифференциально-разностными соотношениями:

$$\begin{gathered}
\frac{y_1 - y_{1*}}{\lambda - \lambda_*} = f_1(t, y_1(t), y_1(t-\tau), \dot{y}_1(t-\tau), y_2(t), y_2(t-\tau), \dot{y}_2(t-\tau))\frac{t - t_*}{\lambda - \lambda_*},\\
\frac{y_2 - y_{2*}}{\lambda - \lambda_*} = f_2((t, y_1(t), y_1(t-\tau), \dot{y}_1(t-\tau), y_2(t), y_2(t-\tau), \dot{y}_2(t-\tau))\frac{t - t_*}{\lambda - \lambda_*},\\
(y_1 - y_{1*})^2 + (y_2 - y_{2*})^2 + (t - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 = 0,\\
y_1(a) = y_a, y_2(a) = p,\\
y_{1\tau} = \varphi_{11}(T), \dot{y}_{1\tau} = \varphi_{21}(T),\\
y_{2\tau} = \varphi_{12}(T), \dot{y}_{2\tau} = \varphi_{22}(T),
\end{gathered} \tag{3.8}$$

где y_{1*}, y_{2*} – значения, вычисленные на предыдущем шаге метода Ньютона.

Для очередного значения λ_i система решается методом Ньютона при фиксированной длине шага $\Delta\lambda$ и начальных условиях:

$$y_{10} = 2y_{1(i-1)} - y_{1(i-2)}, y_{20} = 2y_{2(i-1)} - y_{2(i-2)}, t_0 = 2t_{(i-1)} - t_{(i-2)}.$$

Особенность задачи состоит также в наличии запаздывания, поэтому необходимо учесть значения функций, входящих в систему, на предыстории. Если точка $t-\tau$ принадлежит интервалу E, значения функций определены заданными функциями $\varphi_{1,2}$. В противном случае производится построение интерполяционного полинома в форме Лагранжа по трем точкам.

4. Численный пример

Пример 4.1 *Рассматривается краевая задача*

$$\begin{gathered}
\frac{d^2y_1}{dt^2} = y_1 - \frac{1}{y_1^2(t-1)},\\
y_1(1) = 1,\\
y_{1\tau}(t) = (2t+1)^{1/3}, t \in [-1; 0].
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Преобразованная к нормальной форме Коши и согласно методу продолжения, задача (4.1) примет вид:

$$\begin{gathered}
(y_1 - y_{1*}) = y_2(\lambda - \lambda_*),\\
(y_2 - y_{2*}) = (y_1 - \frac{1}{y_1^2(t-1)})(\lambda - \lambda_*),\\
(y_1 - dy_{1*})^2 + (y_2 - dy_{2*})^2 + (t - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 = 0,\\
y_2(0) = p,\\
y_{1\tau}(t) = (2t+1)^{1/3}, t \in [-1; 0].
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Использовались следующие значения постоянных: $\tau = 1, \Delta\lambda = 0.01$.

При решении данной задачи использование методов Эйлера или Рунге-Кутта вызывает трудности, так как при прохождении точки $t = 0.5$ в правой части второго уравнения получается знаменатель, равный нулю. Метод дискретного продолжения по наилучшему параметру при решении начальной задачи позволяет справиться с прохождением данной особой точки, что обеспечивает продолжение итерационного процесса метода стрельбы. На рисунках представлено решение задачи при найденном значении параметра $p = 0.92451$.

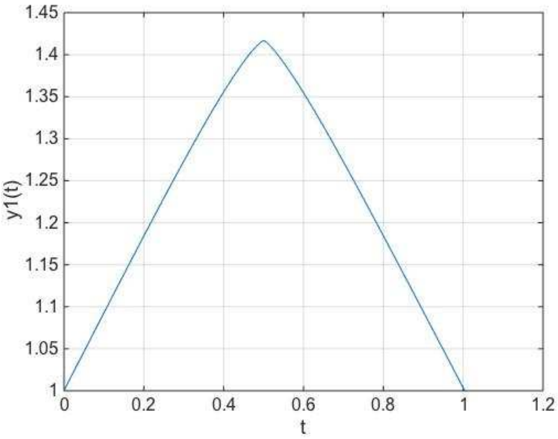

Рис. 4.1.
Решение $y_1(t)$

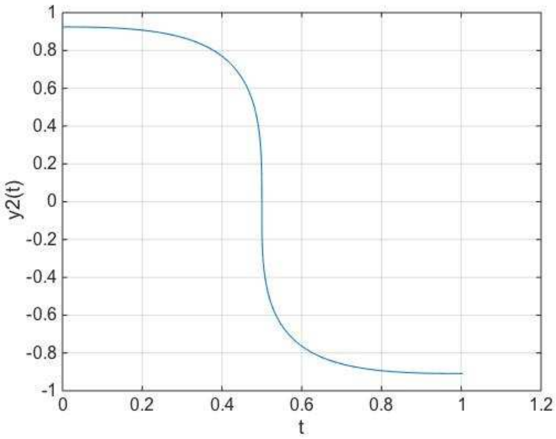

Рис. 4.2.
Решение $y_2(t)$

5. Выводы

Применение метода дискретного продолжения по наилучшему параметру совместно с методом Ньютона, интерполяционным полиномом Лагранжа и методом стрельбы позволяет успешно решить нелинейную краевую задачу с запаздыванием, имеющую предельные особые точки. Численный пример иллюстрирует успешное построение решений при помощи предложенного подхода.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 19-08-00718.

Список литературы

1. Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков, *Математические модели динамических систем с запаздыванием*, Изд-во Урал. ун-та, Екатеринбург, 2012, 119 с.
2. М. Н. Афанасьева, Е. Б. Кузнецов, “Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом”, *Труды МАИ*, **88** (2016).
3. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987, 600 с.
4. В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 224 с.
5. Е. М. Будкина, Е. Б. Кузнецов, “Моделирование технологического процесса производства узлов летательных аппаратов на основе наилучшей параметризации краевой задачи для нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений”, *Вестник МАИ*, **23**:1 (2016), 189–196.
6. С. Д. Красников, Е. Б. Кузнецов, “Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:12 (2005), 2148–2158.

7. С. С. Дмитриев, Е. Б. Кузнецов, “Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:3 (2008), 430–444.

8. M. S. Roberts, J. S. Shipman, *Two-point boundary value problems: shooting methods*, Elsevier, New York, 1972, 269 p.

9. А. М. Самойленко, Н. И. Ронто, *Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.*, Наукова думка, Киев, 1986, 222 с.

10. M. E. Lahaye, “Une metode de resolution d’une categorie d’equations transcendentes”, *Compter Rendus hebdomataires des seances de L’Academie des sciences*, **198**:21 (1934), 1840–1842.

11. E. B. Kuznetsov, “Optimal parametrization in numerical construction of curve”, *Journal of the Franklin Institute*, **344**:21 (2007), 658–671.

Поступила 15.07.2019

MSC2010 65L10

The discrete continuation in the boundary value problem for systems of nonlinear differential equations with deviation argument

© **M. N. Afanaseva**[1] **E. B. Kuznetsov**[2]

Abstract. The solution of the boundary value problems for system of nonlinear differential equations with argument delay is considered in the article. The solution is based on the shooting method. Within its framework the method of continuation with respect to parameter in the Lahaye form, method of the best parametrization and the Newton method are implemented that allow to find possible solutions. To solve the Cauchy problem at each step of the shooting method the discrete continuation method with respect to the best parameter combined with the Newton method is applied. This approach allows to build the solution in the case when singular limit points exist. That provides continuation of Newton iteration process. The algorithm is completed by calculating the Lagrange polynomial to obtain the values of function in the delay points. The example given in the article represents the advantages of the proposed method.
Key Words: numerical solution, equations with delay, boundary value problem, the best parameter, discrete continuation, shooting method

References

1. Y. F. Dolgii, P. G. Surkov, *[Mathematical models of delay dynamical systems]*, Ural Federal University Publ., Ekaterinburg, 2012 (In Russ.), 119 p.

2. M. N. Afanaseva, E. B. Kuznetsov, "[Numerical method for solving nonlinear boundary value problem for differential equations with retarded argument]", *Trudy MAI*, **88** (2016) (In Russ.).

3. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobel'kov, *[Numerical Methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 600 p.

4. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, *[Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics]*, Editorial URSS, Moscow, 1999 (In Russ.), 224 p.

5. E. M. Budkina, E. B. Kuznetsov, "[Modeling of technological process for aircraft structural components manufacturing based on the best parametrization and boundary value problem for nonlinear differential-algebraic equations]", *Aerospace MAI Journal*, **23**:1 (2016), 189–196 (In Russ.).

6. S. D. Krasnikov, E. B. Kuznetsov, "[Parametrization of the numerical solution of boundary value problems for nonlinear differential equations]", *Comput. Math. Math. Phys.*, **45**:12 (2005), 2148–2158.

[1]**Maria N. Afanaseva**, graduate student, Department of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4, Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7487-4796, mary.mai.8@yandex.ru

[2]**Evgeny B. Kuznetsov**, Professor, Department of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4, Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9452-6577, kuznetsov@mai.ru

7. S. S. Dmitriev, E. B. Kuznetsov, “[Numerical solution to systems of delay integrodifferential algebraic equations]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:3 (2008), 430–444.

8. M. S. Roberts, J. S. Shipman, *Two-point boundary value problems: shooting methods*, Elsevier, New York, 1972, 269 p.

9. A. M. Samoilenko, N. I. Ronto, *[Numerical-analytic methods in theory of boundary-value problems]*, Naukova Dumka, Kiev, 1986 (In Russ.), 222 p.

10. M. E. Lahaye, “Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes”, *Compter Rendus hebdomataires des seances de L'Academie des sciences*, **198**:21 (1934), 1840–1842.

11. E. B. Kuznetsov, “Optimal parametrization in numerical construction of curve”, *Journal of the Franklin Institute*, **344**:21 (2007), 658–671.

Submitted 15.07.2019