

УДК 519.63

## Применение разрывного метода Галёркина к моделированию двумерных течений многокомпонентной смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках

© Р. В. Жалнин<sup>1</sup>, В. Ф. Масыгин<sup>2</sup>, Е. Е. Пескова<sup>3</sup>, В. Ф. Тишкин<sup>4</sup>

**Аннотация.** В статье разработан численный алгоритм для моделирования уравнений газовой динамики для смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках. Для построения численного алгоритма используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Для избежания появления нефизических осцилляций вблизи разрывов применяется лимитер Барта-Йесперсена. Реализация построенной схемы базируется на структуре данных и алгоритмах библиотеки `r4est`. С помощью разработанного метода проведено математическое моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и решена задача о тройном распаде разрыва. Полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями данных задач, а полученная картина решения подробно описывает динамику рассматриваемых сложных течений.

**Ключевые слова:** метод Галеркина с разрывными базисными функциями, уравнения газовой динамики, многокомпонентная смесь газов, параллельные вычисления, адаптивные локально измельчающиеся сетки, `r4est`

### 1. Введение

Моделирование течений многокомпонентной смеси газов является важной задачей для многих областей современной науки и техники. К таким областям относятся авиационная промышленность, химические технологии, нефтегазовая промышленность и многие другие. Данные области предъявляют высокие требования к точности получаемого численного решения и времени расчета. Перспективными направлениями решения поставленных задач является использование численных методов высокого порядка точности, применение технологий параллельного программирования и использование локальной адаптации расчетной сетки.

На сегодняшний день одним из наиболее перспективных методов высокого порядка точности является метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Данный метод

<sup>1</sup>Жалнин Руслан Викторович, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>2</sup>Масыгин Виктор Федорович, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, masyaginvf@mrsu.ru

<sup>3</sup>Пескова Елизавета Евгеньевна, младший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@mail.ru

<sup>4</sup>Тишкин Владимир Федорович, заведующий отделом, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Миусская пл., д.4), доктор физико-математических наук, член-корр. РАН, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7295-7002>, v.f.tishkin@mail.ru

активно развивается как в работах отечественных [1–5], так и зарубежных [6–7] исследователей. Он обладает рядом замечательных свойств, которые обуславливают интерес к нему среди исследователей. К таким свойствам следует отнести локальный характер уравнений, возможность работы с сетками различной структуры, хорошую адаптацию к граничным условиям различного типа, компактный шаблон и др.

Активно ведутся работы по развитию библиотек для динамической локальной адаптации расчетных сеток. К таким библиотекам относится `r4est`, реализующая возможность параллельного адаптивного измельчения сетки [8]. Данная библиотека обладает хорошо продуманной структурой и оптимизирована для работы с технологией параллельных вычислений MPI.

Настоящая работа посвящена построению численного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения уравнений многокомпонентной газовой динамики на адаптивных локально измельчающихся сетках.

## 2. Математическая модель

Будем рассматривать двумерную систему уравнений многокомпонентной газовой динамики:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho E + p)v)}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Y_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y_i v)}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \dots, N_Y, \quad (2.4)$$

где  $E = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2$ ,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\rho$  – плотность смеси,  $p$  – давление,  $u, v$  – компоненты скорости,  $Y_i$  – концентрация  $i$ -й компоненты смеси, при этом должно выполняться условие  $\sum_{i=1}^{N_Y} Y_i = 1$ .

Система (2.1)–(2.4) замыкается уравнением состояния

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}, \quad \frac{R}{M} = C_p - C_v, \quad (2.5)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $C_p, C_v$  – удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно,  $M$  – молекулярная масса смеси, которые вычисляются следующим образом:

$$C_p = \sum_{i=1}^{N_Y} Y_i C_{pi}, \quad \frac{1}{M} = \sum_{i=1}^{N_Y} \frac{Y_i}{M_i} \quad (2.6)$$

Здесь  $M_i, C_{pi}, Y_i$  – молекулярная масса, удельная теплоемкость при постоянном давлении и концентрация  $i$ -й компоненты смеси, соответственно.

Также необходимо задать начальные и граничные условия, соответствующие постановке конкретной решаемой задачи.

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$U = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho Y_1 \\ \vdots \\ \rho Y_{N_Y} \end{pmatrix}, F_1(U) = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \\ \rho Y_1 u \\ \vdots \\ \rho Y_{N_Y} u \end{pmatrix}, F_2(U) = \begin{pmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho Y_1 v \\ \vdots \\ \rho Y_{N_Y} v \end{pmatrix}, \mathbf{F} = (F_1, F_2). \quad (2.7)$$

Тогда система (2.1) – (2.4) запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (2.8)$$

### 3. Вычислительный алгоритм

#### 3.1. Метод Галеркина с разрывными базисными функциями

Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями покроем расчетную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  сеткой  $\Omega_h = \{Q_j | j = 1, \dots, N_h\}$  из четырехугольных ячеек, таких, что  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_h} Q_j$ ,  $\dim(Q_i \cap Q_j) < 2$  или  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, N_h$ .

Введем пространство

$$V_h^K = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{Q_j} \in P_K(Q_j), j = 1, \dots, N_h\},$$

где  $P_K(Q_j)$  – пространство полиномов степени не выше, чем  $K$ , на элементе  $Q_j$ .

Зададим в  $V_h^K$  базис

$$\hat{\varphi}_k(x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_{jk}(x, y), \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_{jk}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j}\right)^{\alpha_k} \left(\frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j}\right)^{\beta_k}, & \text{если } (x, y) \in Q_j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (3.2)$$

здесь  $\alpha_k + \beta_k \leq K$ ,  $k = 1, \dots, N_\varphi$ ,  $N_\varphi = (K + 1)(K + 2)/2$ ,  $(x_{cj}, y_{cj})$  – центр масс ячейки  $Q_j$ .

Приближенное решение системы (2.8)  $U_h \in V_h^K$  будем искать в виде

$$U_h(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_h} U_{jk}(t) \varphi_{jk}(x, y). \quad (3.3)$$

Далее выберем в качестве пробных функций базисные функции и, умножив на эти пробные функции систему (2.8), получим для каждой ячейки сетки систему для определения соответствующих коэффициентов в разложении (3.3):

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{dU_{jk}}{dt} \int_{Q_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS + \int_{Q_j} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \varphi_{jm} dS = 0, \quad (3.4)$$

$$m = 1, \dots, N_\varphi, j = 1, \dots, N_h.$$

Выполнив интегрирование по частям для второго слагаемого, получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{\partial}{\partial t} U_{jk}(t) \int_{Q_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS = \int_{Q_j} \mathbf{F} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dS - \oint_{\partial Q_j} (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} d\sigma, \quad (3.5)$$

$$m = 1, \dots, N_\varphi, j = 1, \dots, N_h.$$

Здесь  $\hat{\mathbf{F}}$  – численная потоковая функция, которая зависит от значений решения с внутренней и внешней стороны границы ячейки:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{h}(U_h^-, U_h^+).$$

Она должна удовлетворять условиям согласования с физической потоковой функцией  $\hat{\mathbf{F}}(U, U) = \mathbf{F}(U)$ , быть неубывающей по первому аргументу и невозрастающей по второму аргументу.

В данной работе значение численного потока берется как приближенное решение задачи Римана о распаде разрыва (используются потоки Лакса-Фридрихса-Русанова [9, 10] и HLLC [11]).

Обозначим  $A_j$  – матрицу составленную из элементов  $a_{mk}^j = \int_{Q_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS$ ,  $m = 1, \dots, N_\varphi$ ,  $k = 1, \dots, N_\varphi$ ,  $j = 1, \dots, N_h$ . Далее составим блочно-диагональную матрицу  $A$  с блоками  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, N_h$  на диагонали. Обозначив вектор коэффициентов разложения решения по базису как

$$\tilde{U}_h = colon(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1N_\varphi}, \dots, U_{N_h1}, U_{N_h2}, \dots, U_{N_hN_\varphi})$$

и вектор, составленный из элементов в правой части выражения (3.5), как  $R(\tilde{U}_h)$ , запишем (3.5) в виде

$$A \frac{d\tilde{U}_h}{dt} = R(\tilde{U}_h).$$

Для интегрирования по времени уравнения

$$\frac{d\tilde{U}_h}{dt} = L(\tilde{U}_h), \quad (3.6)$$

где  $L(\tilde{U}_h) = A^{-1}R(\tilde{U}_h)$ , воспользуемся TVD-схемой Рунге-Кутты 3-го порядка [12]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_h^* &= \tilde{U}_h^n + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^n), \\ \tilde{U}_h^{**} &= \frac{3}{4}\tilde{U}_h^n + \frac{1}{4} \left( \tilde{U}_h^* + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^*) \right), \\ \tilde{U}_h^{n+1} &= \frac{1}{3}\tilde{U}_h^n + \frac{2}{3} \left( \tilde{U}_h^{**} + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^{**}) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Описанная вычислительная схема вблизи разрывов может приводить к немонотонности решения и появлению нефизических осцилляций. Это требует использования так называемых лимитеров  $\Lambda\Pi_h$ , являющихся по сути нелинейными операторами проекции. Используемые лимитеры должны обеспечивать консервативность, то есть должны выполняться условия

$$\int_{Q_j} \Lambda\Pi_h(U_h) dS = \int_{Q_j} U_h dS, \quad \forall Q_j \in \Omega_h.$$

Для выполнения операции лимитирования осуществляется проекция решения на пространство линейным базисом (в случае, если  $K > 1$ ):

$$U_h^\Lambda = \Pi_\Lambda U_h,$$

где  $\Pi_\Lambda$  – оператор проекции:

$$\Pi_\Lambda : V_h^K \rightarrow V_h^1.$$

Далее к полученной линейной функции  $U_h^\Lambda$  применяется лимитер Барта-Йесперсена [13]. Если указанный лимитер не изменяет коэффициентов разложения функции  $U_h^\Lambda$  по базису пространства  $V_h^1$ , то в качестве результата действия оператора  $\Lambda\Pi_h$  берется исходная функция  $U_h$ . В противном случае берется линейная функция, полученная в результате действия лимитера Барта-Йесперсена.

С учетом операции лимитирования выражения (3.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\tilde{U}_h^* &= \Lambda\Pi_h \left( \tilde{U}_h^n + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^n) \right), \\ \tilde{U}_h^{**} &= \Lambda\Pi_h \left( \frac{3}{4}\tilde{U}_h^n + \frac{1}{4} \left( \tilde{U}_h^* + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^*) \right) \right), \\ \tilde{U}_h^{n+1} &= \Lambda\Pi_h \left( \frac{1}{3}\tilde{U}_h^n + \frac{2}{3} \left( \tilde{U}_h^{**} + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^{**}) \right) \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

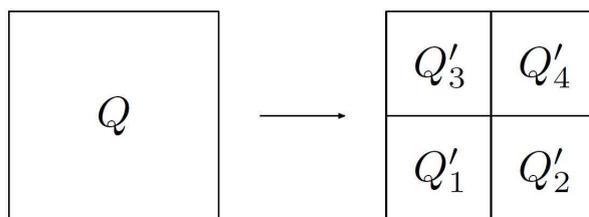
Исследование влияния описанного лимитера на точность получаемого решения остается за рамками данной работы. Приведенные ниже результаты расчетов показывают достаточную точность, необходимую для адекватного воспроизведения детальной структуры сложных течений.

### 3.2. Адаптация сетки (AMR)

Для более точной детализации картины течения используются динамические адаптивно сгущающиеся сетки [14]. Процесс адаптации заключается в дроблении ячейки на четыре дочерние ячейки, огрубление ячейки подразумевает удаление дочерних ячеек и перенос данных в исходную родительскую ячейку. Дробление может производиться до наперед определенного уровня, исходная (неадаптированная) сетка сопоставляется нулевому уровню адаптации.

При дроблении ячейки осуществляется проекция решения из родительской ячейки в дочерние (рис. 3.1). Алгоритмически проекция сводится к вычислению вектора  $U_{Q'_l}$ , составленного из коэффициентов разложения решения по базису в новых ячейках  $Q'_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned}U_{Q'_l} &= A_{Q'_l}^{-1} A_l^{ref} U_K, \\ (A_{Q'_l})_{mk} &= \int \varphi_{Q'_l m} \varphi_{Q'_l k} dS, \\ (A_l^{ref})_{mk} &= \int \varphi_{Q'_l m} \varphi_{Q_l k} dS, \quad l = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}\tag{3.9}$$

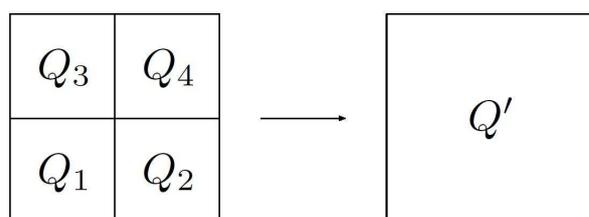


Р и с. 3.1

Дробление ячейки

При огрублении сетки строится проекция решения на базис в родительской ячейке по 4 дочерним ячейкам (рис. 3.2). Вектор коэффициентов «нового» решения вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_{Q'} &= A_{Q'}^{-1} \sum_{l=1}^4 A_l^{coars} U_{Q_l}, \\
 (A_{Q'})_{mk} &= \int \varphi_{Q'_m} \varphi_{Q'_k} dS, \\
 (A_l^{coars})_{mk} &= \int \varphi_{Q'_m} \varphi_{Q_lk} dS, \quad l = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$



Р и с. 3.2

Огрубление ячейки

Немаловажным вопросом является выбор адекватного критерия дробления/огрубления сетки. В данной работе в качестве такого критерия берется значение нормы вектора градиента плотности. При превышении некоторого порогового значения производится дробление ячейки. При уменьшении модуля градиента менее заданного минимального значения производится огрубление.

Программная реализация вычислительного алгоритма выполнена с использованием библиотеки `r4est` [8]. Данная библиотека предоставляет средства работы с сеточными структурами, организованными в виде так называемого леса квадрата-деревьев для двухмерного случая. Корнями деревьев являются ячейки исходной (грубой) сетки, которые в процессе вычислений подвергаются дроблению. Для ускорения вычислений используется распараллеливание с использованием MPI. Оптимизированные структуры данных и алгоритмы библиотеки поддерживают использование сеток, содержащих до  $5.23 \times 10^{11}$  ячеек и распараллеливание вычислений свыше, чем на 220000 ядер CPU. При этом авторы гарантируют выполнение балансировки ячеек 2:1 менее, чем за 10 секунд для миллиона ячеек на одном вычислительном узле [8].

## 4. Вычислительные эксперименты

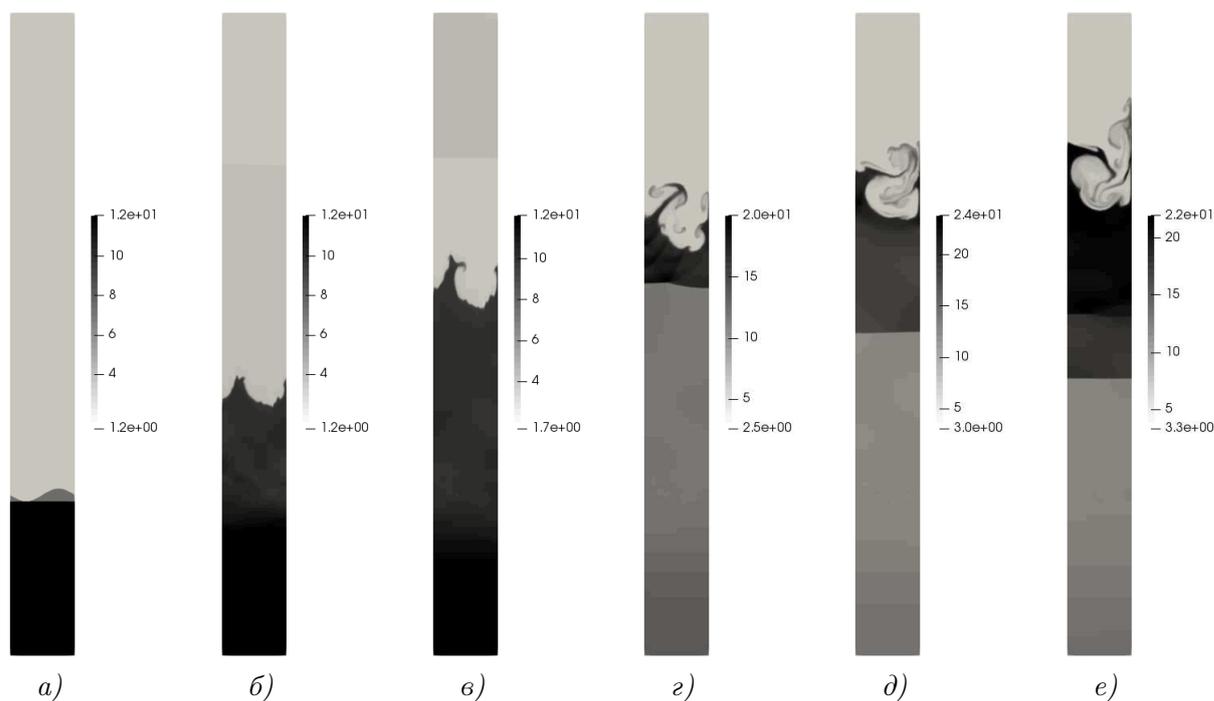
### 4.1. Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Рассматривалась неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, возбуждаемая при прохождении ударной волны через возмущенный контактный разрыв между элегазом ( $SF_6$ ) и воздухом, находящимися при атмосферном давлении.

Для расчетов была принята следующая физическая постановка задачи [15–16], соответствующая начальной температуре 291 К и давлению  $10^{-4}$  ГПа = 1 бар в камере низкого давления. За ударной волной в элегазе давление 2.152 бар, плотность  $1.209 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>, скорость ударной волны 195.2 м/с, скорость течения за ударной волной 97.76 м/с, начальные плотности элегаза и воздуха в камере низкого давления  $6.037 \cdot 10^{-3}$  и  $1.198 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> соответственно. Физические свойства элегаза и воздуха следующие: оба вещества являются невязкими, нетеплопроводными и идеальными газами с показателями адиабаты  $\gamma = 1.094$  ( $SF_6$ ) и  $\gamma = 1,4$  (воздух), отношение молекулярных масс ( $SF_6$ /воздух) принято равным 5.04.

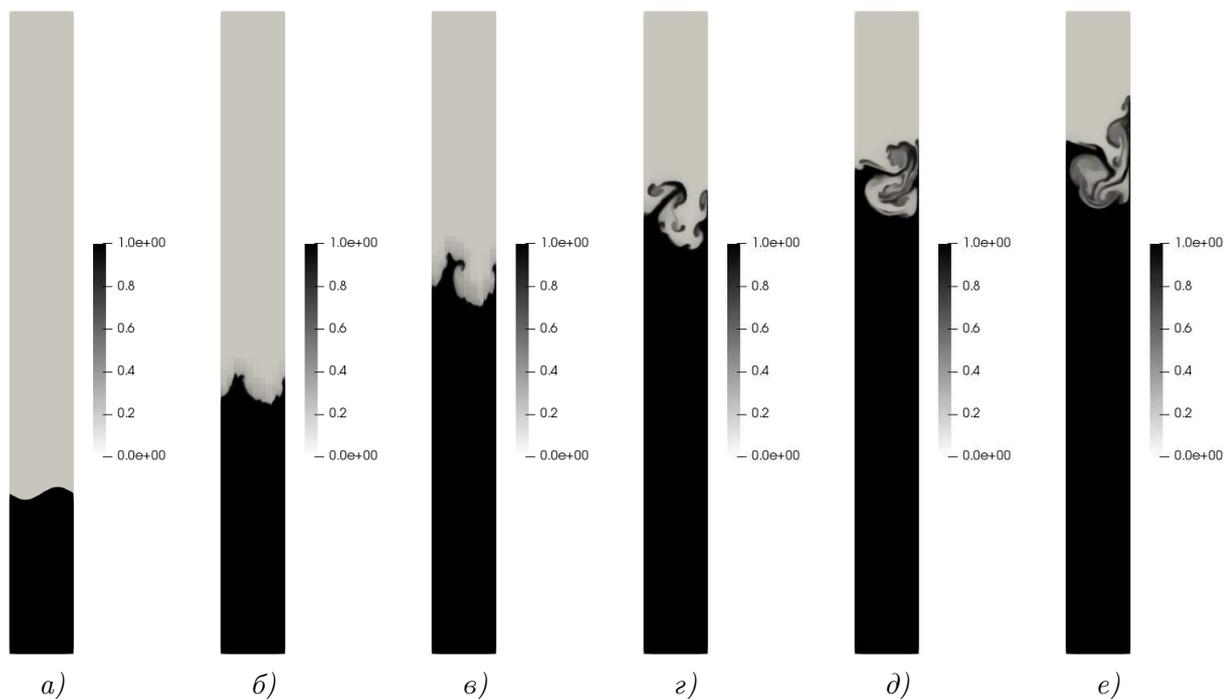
Расчетная область была выбрана в виде прямоугольника  $[0, 0.04] \times [-0.1, 0.3]$ . Положение фронта ударной волны в начальный момент времени полагалось равным  $y = -0.004$ . Положение контактного разрыва задавалось в виде  $y(x) = -0.004 \sin(2\pi x/0.04)$ ,  $x \in [0, 0.04]$ .

На рис. 4.1 и 4.2 представлены картины распределения плотности и концентрации  $SF_6$  в различные моменты времени. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами расчетов на равномерной прямоугольной сетке, которые были проведены ранее в исследованиях, описанных в работе [16].



Р и с. 4.1

Плотность: а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.5$  мкс.; в)  $t = 1$  мкс.; г)  $t = 1.5$  мкс.; д)  $t = 2$  мкс.; е)  $t = 2.5$  мкс.



**Р и с. 4.2**

Концентрация  $SF_6$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.5$  мкс.; в)  $t = 1$  мкс.; г)  $t = 1.5$  мкс.; д)  $t = 2$  мкс.; е)  $t = 2.5$  мкс.

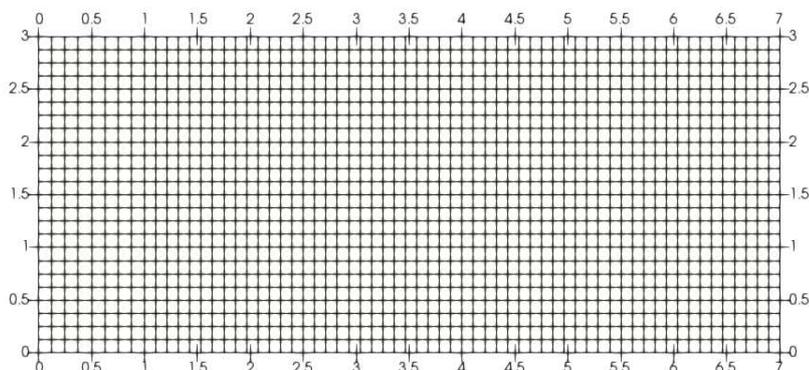
#### 4.2. Тройной распад разрыва

Рассматривается задача о тройном распаде разрыва (triple point problem) [17,18]. Расчетная область представляет собой прямоугольник  $[0, 7] \times [0, 3]$ , разделенный на три под-области со следующими начальными условиями:

$$(\rho, p, \gamma, u, v) = \begin{cases} (1, 1, 1.5, 0, 0), & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 = [0, 1] \times [0, 3]; \\ (1, 0.1, 1.4, 0, 0), & \text{если } (x, y) \in \Omega_2 = [1, 7] \times [0, 1.5]; \\ (0.125, 0.1, 1.5, 0, 0), & \text{если } (x, y) \in \Omega_3 = [1, 7] \times [1.5, 3]. \end{cases} \quad (4.1)$$

На границах расчетной области заданы условия вытекания.

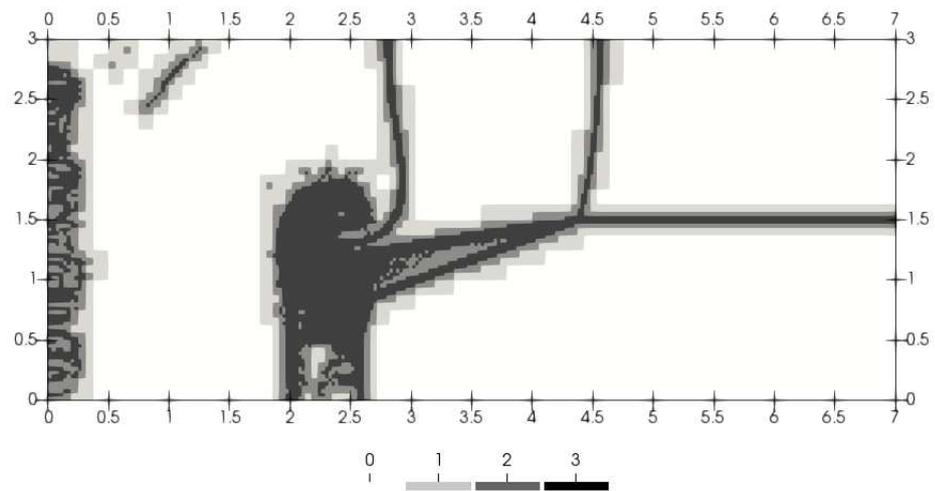
Исходная расчетная сетка (грубый уровень) представлена на рисунке 4.3, ее размерность равна  $56 \times 24$ .



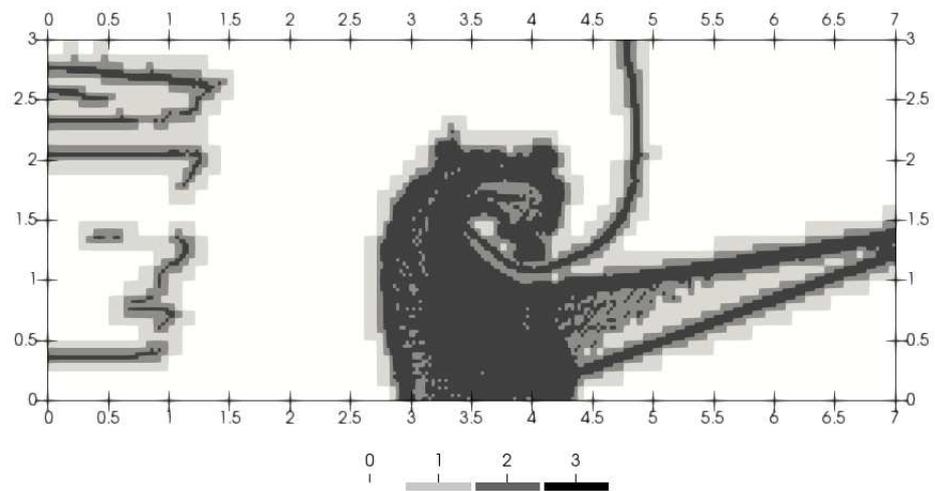
**Р и с. 4.3**

Расчетная сетка (начальный уровень)

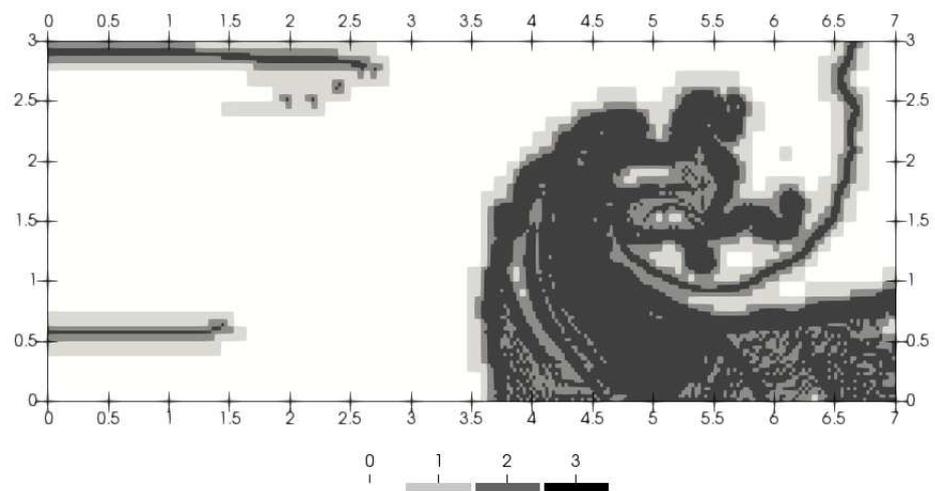
На рисунке 4.4 показаны уровни адаптации сетки на различные моменты времени.



а)



б)



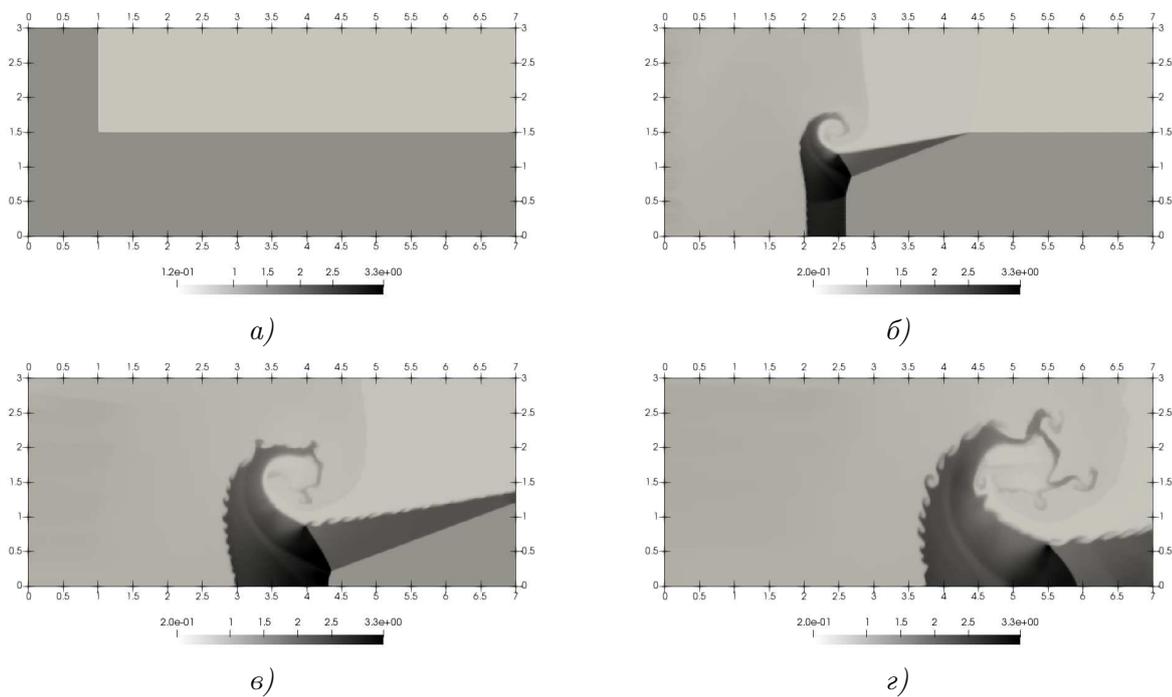
в)

**Р и с. 4.4**

Уровни адаптации сетки: а)  $t = 2$ ; б)  $t = 4$ ; в)  $t = 6$ .

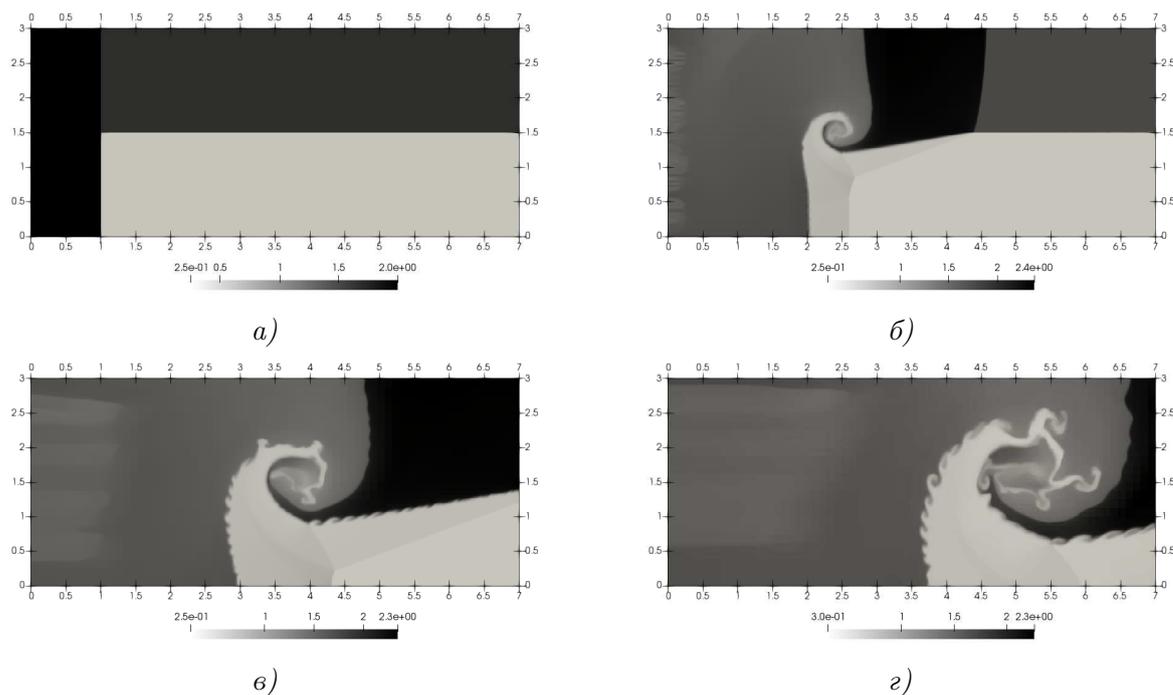
В силу того, что в области  $\Omega_1$  находится вещество под максимальным давлением, отсюда распространяется ударная волна вправо, в сторону областей с меньшим давлением  $\Omega_2, \Omega_3$ . Однако вещество из  $\Omega_1$  проникает быстрее в область с меньшей плотностью  $\Omega_3$ . Данный факт объясняет наличие завихренности в поле распределения плотности смеси (рис. 4.5) и в поле распределения внутренней энергии смеси (рис. 4.6). Отсюда можно сделать вывод о том, что полученные результаты расчетов адекватно описывают процессы, рассматриваемые в данной задаче.

На рис. 4.7 представлены распределения плотности, внутренней энергии и концентрации вещества, в начальный момент времени расположенного в области  $\Omega_2$ , в момент времени  $t = 5$ . Полученные картины распределения хорошо согласуются с результатами, представленными в работе [18].



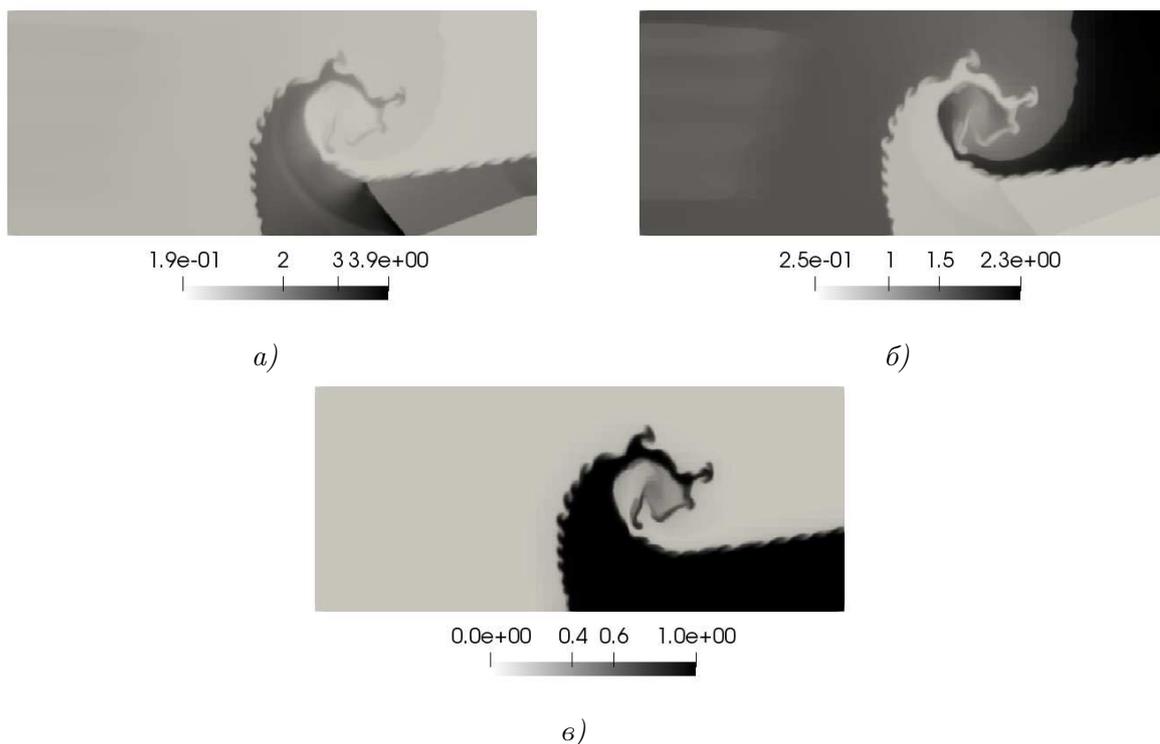
**Р и с. 4.5**

Поле распределения плотности смеси: а)  $t = 0$ ; б)  $t = 2$ ; в)  $t = 4$ ; г)  $t = 6$ .



Р и с. 4.6

Поле распределения внутренней энергии смеси: а)  $t = 0$ ; б)  $t = 2$ ; в)  $t = 4$ ; г)  $t = 6$ .



Р и с. 4.7

Поле распределения величин на момент времени  $t = 5$ : а) плотность; б) внутренняя энергия; в) концентрация газа из области  $\Omega_2$ .

## 5. Заключение

Разработан и реализован численный алгоритм на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений газовой динамики для смеси

идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках. Численный алгоритм был верифицирован с помощью известных модельных задач. Было проведено моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и решена задача о тройном распаде разрыва. Полученные результаты отвечают процессам, протекающим в областях с заданными начальными и граничными условиями, а также хорошо согласуются с существующими решениями данных задач. Как видно из представленных рисунков, используемый в работе лимитер Барта-Йесперсена позволяет получить детальную картину рассматриваемых сложных течений, что свидетельствует о применимости данного лимитера к моделированию рассматриваемого класса задач.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9), РФФИ (проект № 18-41-130001, проект № 18-31-00102) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1). Работа Тишкина В. Ф. выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **56:6** (2016), 989–998.
2. М. М. Краснов, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Реализация разрывного метода Галеркина в программном комплексе DGM”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2018, № 245, 31 с.
3. М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. Ф. Тишкин, “Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения”, *Матем. моделирование*, **30:5** (2018), 99–116.
4. Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин, “Вариационная энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для уравнений газовой динамики”, *Матем. моделирование*, **31:5** (2019), 69–84.
5. М. Д. Брагин, Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин, “Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2019, 018, 25 с.
6. B. Cockburn, Ch.-W. Shu, “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *Journal of Scientific Computing*, **16:3** (2001), 173–261.
7. T. Chen, Ch.-W. Shu, “Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, **345** (2017), 427–461.
8. C. Burstedde, L. C. Wilcox, O. Ghattas, “p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33:3** (2011), 1103–1133.

9. В. В. Русанов, “Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **1:2** (1961), 267–279.
10. P. D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7:1** (1954), 159–193.
11. E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares, “Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver”, *Shock Waves*, **4** (1994), 25–34.
12. C.-W. Shu, S. Osher, “Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes”, *Journal of Computational Physics*, **77** (1988), 439–471.
13. T. J. Barth, D. C. Jespersen, “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes”, *AIAA Paper*, 1989, 89-0366.
14. M. J. Berger, P. Colella, “Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, **82** (1989), 64–84.
15. F. Poggi, M.-H. Thorembey, G. Rodrigues, “Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability”, *Physics of Fluids*, **10:11** (1998), 2698–2700.
16. Р. В. Жалнин, Н. В. Змитренко, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности”, *Матем. моделирование*, **19:10** (2007), 61–66.
17. M. Kucharik, R. V. Garimella, S. P. Schofield, M. J. Shashkov, “A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations”, *Journal of Computational Physics*, **229:7** (2009), 2432–2452.
18. M. Kucharik, M. J. Shashkov, “Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods”, *Journal of Computational Physics*, **258** (2014), 268–304.

Поступила 2.03.2019

MSC2010 65M60

# Application of discontinuous Galerkin method to modeling of two-dimensional flows of a multicomponent ideal gases mixture using local adaptive mesh refinement

© R. V. Zhalnin <sup>1</sup> V. F. Masyagin <sup>2</sup> E. E. Peskova <sup>3</sup> V. F. Tishkin <sup>4</sup>

**Abstract.** In this article a numerical algorithm is developed for solving of gas dynamics equations for a mixture of ideal gases on adaptive locally refined grids. The algorithm is based on discontinuous Galerkin method. To avoid the appearance of non-physical oscillations near the discontinuities, the Barth-Jespersen limiter is used. The numerical algorithm is based on the data structure and algorithms of the p4est library. In present work the numerical simulation of one problem of Richtmyer-Meshkov instability development is considered and the triple point problem is solved using the developed numerical algorithm of high accuracy order. The obtained results are in good agreement with the well-known numerical solutions. The pictures plotted basing on the solution describe in detail the dynamics of the complex flows under consideration.

**Key Words:** discontinuous Galerkin method, gas dynamics equations, multicomponent gas mixture, parallel computing, adaptive mesh refinement, p4est

## REFERENCES

1. R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:6 (2016), 977–986.
2. M. M. Krasnov, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Implementation of the Galerkin discontinuous method in the DGM software package”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Preprint*, 2018, 245 (In Russ.), 31 p.
3. M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, V. F. Tishkin, “Construction of the limiter based on averaging of solutions for discontinued Galerkin method”, *Matematicheskoye Modelirovaniye*, **30**:5 (2018), 99–116 (In Russ.).
4. Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “Variational entropic regularization of discontinuous Galerkin method for gas dynamics equations”, *Matematicheskoye Modelirovaniye*, **31**:5 (2019), 69–84 (In Russ.).
5. M. D. Bragin, Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “Verification of an entropic regularization method for discontinuous Galerkin schemes applied to hyperbolic equations”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Preprint*, 2019, 018 (In Russ.), 25 p.

<sup>1</sup>**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk, 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>2</sup>**Victor F. Masyagin**, Senior Researcher, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk, 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, masyaginvf@mrsu.ru

<sup>3</sup>**Elizaveta E. Peskova**, Junior Researcher, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk, 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@mail.ru

<sup>4</sup>**Vladimir F. Tishkin**, Department Head, Keldysh Institute of Applied Mathematics (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), corresponding member of RAS, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7295-7002>, v.f.tishkin@mail.ru

6. B. Cockburn, Ch.-W. Shu, “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *Journal of Scientific Computing*, **16**:3 (2001), 173–261.
7. T. Chen, Ch.-W. Shu, “Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, **345** (2017), 427–461.
8. C. Burstedde, L. C. Wilcox, O. Ghattas, “p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**:3 (2011), 1103–1133.
9. V. V. Rusanov, “The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **1**:2 (1962), 304–320.
10. P. D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7**:1 (1954), 159–193.
11. E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares, “Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver”, *Shock Waves*, **4** (1994), 25–34.
12. C.-W. Shu, S. Osher, “Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes”, *Journal of Computational Physics*, **77** (1988), 439–471.
13. T. J. Barth, D. C. Jespersen, “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes”, *AIAA Paper*, 1989, 89-0366.
14. M. J. Berger, P. Colella, “Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, **82** (1989), 64–84.
15. F. Poggi, M.-H. Thorembey, G. Rodrigues, “Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability”, *Physics of Fluids*, **10**:11 (1998), 2698–2700.
16. R. V. Zhalnin, N. V. Zmitrenko, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Numerical simulation of Richtmyer-Meshkov instability development using the difference schemes of high order of accuracy”, *Matematicheskoye Modelirovaniye*, **19**:10 (2007), 61–66 (In Russ.).
17. M. Kucharik, R. V. Garimella, S. P. Schofield, M. J. Shashkov, “A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations”, *Journal of Computational Physics*, **229**:7 (2009), 2432–2452.
18. M. Kucharik, M. J. Shashkov, “Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods”, *Journal of Computational Physics*, **258** (2014), 268–304.

*Submitted 2.03.2019*