DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.187-214

УДК 519.6:517.962

Аппроксимация задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений конвекции-диффузии с условиями сопряжения типа неидеального контакта

© **Ф. В. Лубышев**[1], **А. Р. Манапова**[2]

Аннотация. Рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления процессами, описываемыми несамосопряженными эллиптическими уравнениями конвекции-диффузии с условиями сопряжения типа неидеального контакта (т. е. задач со скачком коэффициентов и решения на внутренней границе разрыва, скачок решения пропорционален нормальной составляющей потока). Управляющими функциями являются одновременно коэффициенты операторов диффузионного и конвективного переноса, а также коэффициенты при нелинейных слагаемых уравнения состояния. Строются и исследуются разностные аппроксимации экстремальных задач, причем для аппроксимации уравнений состояний предложены некоторые «модифицированные» разностные схемы, отличные от известных в литературе традиционных схем другим способом задания переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследуются вопросы корректности задач. Получены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию, оценки скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, установлена слабая сходимость по управлению. Наличие несамосопряженного оператора вызывает определенные трудности при построении и изучении аппроксимаций дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния управляемых процессов, в частности при доказательстве корректности разностных аппроксимаций и при исследовании связи между исходной задачей оптимального управления и аппроксимирующей сеточной задачей. Проведена регуляризация аппроксимаций по А. Н. Тихонову. Результаты, полученные в настоящей работе, будут использованы в дальнейшем при разработке эффективных методов численного решения построенных конечномерных сеточных задач оптимального управления и их компьютерной реализации.

Ключевые слова: задача оптимального управления, несамосопряженное эллиптическое уравнение, неидеальный контакт, разностные аппроксимации

1. Введение

Нелинейные задачи оптимального управления для уравнений математической физики (УМФ) относятся к наиболее сложному классу задач оптимизации. Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы — «конечномерными задачами оптимизации». При этом возникают проблемы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций [1–2].

[1]**Лубышев Федор Владимирович**, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[2]**Манапова Айгуль Рашитовна**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО«Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8778-4917, aygulrm@mail.ru

В настоящей работе впервые поставлены и исследованы разностные аппроксимации классов задач оптимального управления системами, описываемыми несамосопряженными полулинейными уравнениями эллиптического типа с коэффициентами, зависящими от управления, при этом по своим математическим постановкам уравнения состояния имеют разрывные коэффициенты и разрывные решения. На управления накладываются локальные ограничения, и ограничение на градиент старшего коэффициента уравнения. Настоящая работа продолжает исследования [3–8] (см. также цитируемую литературу) и существенно обобщает результаты работы [3]. В работе [3] были изучены разностные аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах уравнения состояния (включая управления при старших и младших производных). Работа [4] обобщает результаты работы [3] на случай произвольной выпуклой области. Однако в отличие от данных источников результаты настоящей статьи получены для задач оптимизации, описываемых полулинейными эллиптическими уравнениями с разрывными данными и состояниями, с условиями сопряжения типа неидеального контакта (т. е. задач со скачком коэффициентов и решения на внутренней границе разрыва; скачок решения пропорционален нормальной составляющей потока, см. [9]). В работах [5–6], [8] анализируются вопросы сходимости и регуляризации аппроксимаций для задач оптимизации с управлениями в разрывных коэффициентах в граничном условии сопряжения, при старших производных и в коэффициентах оператора конвективного переноса уравнения состояния и в его правой части, соответственно.

Настоящая статья принципиально отличается от вышеперечисленных основным объектом изучения. В ней исследуются задачи оптимального управления для полулинейного эллиптического уравнения с несамосопряженными операторами, с управлениями в коэффициентах при старших производных, в коэффициентах при младших производных и нелинейном члене уравнения. Наличие несамосопряженного оператора вызывает определенные трудности при построении и изучении аппроксимаций дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния управляемых процессов, в частности при доказательстве корректности разностных аппроксимаций, и при исследовании связи между исходной задачей оптимального управления и аппроксимирующей сеточной задачей (см., например, теоремы 3.1, 4.1 и т. д.). Отметим, что результаты статьи [7] связаны с практической реализацией, а именно, в ней доказывается дифференцируемость соответствующего сеточного функционала аппроксимирующих задач оптимального управления для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и самосопряженными операторами, строится итерационный метод решения дискретной задачи и доказывается его сходимость.

В статье разработаны новые конечномерные разностные аппроксимации построенных нелинейных моделей оптимизации, причем для аппроксимации уравнений состояний предложены некоторые «модифицированные» разностные схемы, отличные от известных в литературе традиционных схем другим способом задания переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследованы вопросы сходимости аппроксимаций: установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу и сходимость аппроксимаций по управлению. Оценки точности аппроксимаций установлены при предположении, что обобщенное решение поставленной краевой задачи из $W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$ принадлежит также классу $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$ (т. е. при предположении, аналогичном сделанному в [10, с.6]. Исследуются проблемы регуляризации аппроксимаций. На основе метода А. Н. Тихонова и полученных результатов проведена регуляризация предложенных аппроксимаций, позволяющая строить минимизирующие последовательности для целевых функционалов нелинейных задач оптимального управления, сильно сходящиеся в пространствах управлений к множествам точек минимумов функционалов исходных постановок.

Поставленные в работе нелинейные модели оптимизации включают в себя в качестве частных вариантов постановок большой круг прикладных оптимизационных задач теории упругости, теплопроводности, конвекции-диффузии-реакции (при соответствующей конкретизации уравнений состояний, управляющих воздействий, ограничений на управления и целевых функционалов, соответствующих оптимизации процессов по конечному числу критериев качества). Так, например, в теории упругости возникает множество задач, которые естественно могут быть сформулированы как проблемы оптимального управления. При этом роль управляющих факторов в этих задачах могут выполнять, например, функции, входящие в главную часть дифференциального оператора и задающие внутреннюю структуру конструкций, т. е. описывающие распределение упругих характеристик материала. Кроме того, при исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос (см. [15]). Конвективно-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов. В частности, рассматриваемые задачи можно трактовать, например, в том числе как математические модели оптимизационных задач экологического прогнозирования, в основе которых лежит квазилинейное эллиптическое уравнение в движущейся активной среде — эллиптическое уравнение конвекции-диффузии-реакции, описывающее процесс распространения вещества в некоторой области экологического прогнозирования Ω (например, переноса в атмосфере или реке неоднородной загрязняющей субстанции (см. [11])). Одна из задач оптимизации загрязнений окружающей среды состоит в «конструировании» моделей экологического прогнозирования допустимых норм загрязнения экологически значимых зон за счет выбора «управляющих» параметров (коэффициентов) в уравнении состояний.

Результаты, полученные в настоящей работе, будут использованы в дальнейшем при разработке эффективных методов численного решения построенных конечномерных сеточных задач оптимального управления и их компьютерной реализации.

2. Постановка экстремальных задач и их корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена «внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi, 0 \le r_2 \le l_2\}$, $0 < \xi < l_1$, на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$ с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2$, – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть далее $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль $\overrightarrow{n}$ является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, обладающие в областях Ω_1 и Ω_2 некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области Ω следующей задачей Дирихле для полулинейного несамосопряженного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями. Требуется найти функцию u, определенную на $\overline{\Omega}$, вида $u(r) = u_1(r)$, $r \in \overline{\Omega}_1$, $u(r) = u_2(r)$, $r \in \overline{\Omega}_2$, где компоненты u_p, $p = 1,2$, удовлетворяют условиям:

1) функции u_p, $p = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$, удовлетворяют в Ω_p, $p = 1,2$, уравнениям

$$L_p\, u_p = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k_p(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_p^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} + d_p(r)q_p(u_p) = f_p(r), \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$, $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_1, \quad u_2(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_2; \tag{2.2}$$

2) искомые функции u_p, $p = 1,2$, удовлетворяют также дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения u_1 и u_2 вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = k_2(r)\frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \theta(r_2)\left(u_2(r) - u_1(r)\right), \quad r \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида $u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \Omega_1; \\ u_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases}$ $\quad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

$$k(r), d(r), f(r), \vartheta^{(\alpha)}(r) = \begin{cases} k_1(r), q_1(r), f_1(x), \vartheta_1^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_1; \\ k_2(r), q_2(r), f_2(r), \vartheta_2^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \quad \alpha = 1,2. \tag{2.4}$$

то задачу (2.1)—(2.3) можно переписать в более компактном виде. Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(r) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial r_\alpha} + d(r)q(u) = f(r), \quad r = (r_1, r_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.5}$$

и условиям

$$\begin{gathered} u(r) = 0, \quad r \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \\ \left[k(r)\frac{\partial u}{\partial r_1}\right] = 0, \quad G(r) = \left(k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right) = \theta(r_2)[u], \quad x \in S. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r)$ на $S; f(x)$ – известная функция, определяемая по разному в Ω_1 и Ω_2, терпящая разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2,$ – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,2$; $\theta(r_2)$ – заданная функция на S; $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8) = \left(k_1, k_2, \vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}, d_1, d_2\right)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $f(r) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, $\theta(r_2) \in L_\infty(S)$; $0 < \theta_0 \leq \theta(r_2) \leq \overline{\theta}_0$, $r_2 \in S$, θ_0, $\overline{\theta}_0$, – константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2$, определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, причем $q_\alpha(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq L_q < \infty$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \neq \xi_2$, $L_q = const$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \prod_{k=1}^{8} U_k \subset W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2) \times (L_\infty(\Omega_1))^2 \times (L_\infty(\Omega_2))^2 \times L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2) = B, \tag{2.7}$$

$$g_p \in U_p = \left\{ g_p = k_p \in W^1_\infty(\Omega_p) : \, 0 < \nu_p \le g_p(r) \le \overline{\nu}_p, \left| \frac{\partial g_p(r)}{\partial r_1} \right| \le R^{(1)}_p, \left| \frac{\partial g_p(r)}{\partial r_2} \right| \le R^{(2)}_p \text{ п. в. на } \Omega_p \right\}, p = 1,2, \quad g_\beta \in U_\beta = \left\{ g_\beta = \vartheta_1^{(\beta-2)} \in L_\infty(\Omega_1) = B_\beta : \zeta_\beta \le g_\beta(r) \le \overline{\zeta}_\beta, \text{ п. в. на } \Omega_1 \right\},$$
$$g_\alpha \in U_\alpha = \left\{ g_\alpha = \vartheta_2^{(\alpha-4)} \in L_\infty(\Omega_2) = B_\alpha : \zeta_\alpha \le g_\alpha(r) \le \overline{\zeta}_\alpha, \text{ п. в. на } \Omega_2 \right\}, \alpha = 5,6, \beta = 3,4,$$
$$g_m \in U_m = \left\{ g_m = d_{m-6} \in L_\infty(\Omega_{m-6}) : \zeta_m \le g_m(r) \le \overline{\zeta}_m, \text{ п. в. на } \Omega_{m-6} \right\}, m = 7,8. \tag{2.8}$$

где $B_p = W^1_\infty(\Omega_p)$, $p = 1,2$, – пространства управлений $g_p = k_p$, $p = 1,2$, заданных на Ω_1 и Ω_2 соответственно; $B_p = L_\infty(\Omega_1)$, $p = 3,4$, – пространства управлений $g_{p+2} = \vartheta_1^{(p)}$, $p = 1,2$, заданных на Ω_1; $B_p = L_\infty(\Omega_1)$, $p = 5,6$, – пространства управлений $g_{p+4} = \vartheta_2^{(p)}$, $p = 1,2$, заданных на Ω_2; ν_α, $\overline{\nu}_\alpha$, $R^{(\alpha)}_1$, $R^{(\alpha)}_2$, $\alpha = 1,2$, ζ_p, $\overline{\zeta}_p$, $p = \overline{3,8}$, – заданные числа. Предполагается выполнение следующих условий: $-m_1 \le \zeta_3 \le \overline{\zeta}_3 \le m_1$, $-p_1 \le \zeta_4 \le \overline{\zeta}_4 \le p_1$, $-m_2 \le \zeta_5 \le \overline{\zeta}_5 \le m_2$, $-p_2 \le \zeta_6 \le \overline{\zeta}_6 \le p_2$, $m_\alpha, p_\alpha = const > 0$,

$$\delta_\alpha = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \le \nu_\alpha}} \left\{ \frac{\nu_\alpha - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{C^2_{\Omega_\alpha}} + \lambda_\alpha - \frac{m^2_\alpha}{4\epsilon_1} - \frac{p^2_\alpha}{4\epsilon_2} \right\} > 0, \ \alpha = 1,2, \tag{2.9}$$

$C^2_{\Omega_1} = \left(\dfrac{8}{\xi^2} + \dfrac{8}{l_2^2} \right)^{-1}$, $C^2_{\Omega_2} = \left(\dfrac{8}{(l_1 - \xi)^2} + \dfrac{8}{l_2^2} \right)^{-1}$; здесь λ_α, $\alpha = 1,2$, любая из следующих констант: 1) $\lambda_\alpha = q_0 \, \zeta_{\alpha+6}, \zeta_{\alpha+6} \ge 0$; 2) $\lambda_\alpha = \zeta_{\alpha+6}, \zeta_{\alpha+6}$ — любая константа, когда $q_\alpha(u_\alpha) = u_\alpha$; 3) $\lambda_\alpha = -L_q \zeta_0$, где $\zeta_0 = \max\left\{ |\zeta_7|, |\zeta_8| \left|\overline{\zeta}_7\right|, \left|\overline{\zeta}_8\right| \right\}$.

Зададим целевой функционал $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} |u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)|^2 d\Omega_1, \tag{2.10}$$

где $u_0^{(1)}(r) \in W^1_2(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset B$ целевой функционал $J(g)$, точнее, на решениях $u(g)$ задачи (2.1)—(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям $g \in U$, требуется минимизировать целевой функционал (2.10).

Для полноты изложения опишем некоторые введенные ранее (см. [5–6]) пространства. Рассмотрим $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u = (u_1, u_2)$: $V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \left\{ u = (u_1, u_2) \in W^1_2(\Omega_1) \times W^1_2(\Omega_2) \right\}$, где $W^1_2(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$, соответственно и нормами [6]: $\|u_k\|^2_{W^1_2(\Omega_k)} = \displaystyle\int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k$, $\quad k = 1,2$. Снабженное скалярным произведением и нормой $(u,v)_V = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} (u_k, v_k)_{W^1_2(\Omega_k)}$, $\|u\|^2_V = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W^1_2(\Omega_k)}$, $V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$. Через $W^1_2\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W^1_2(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1,2$, – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$. Рассмотрим также нормированное пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ $(\Omega^{(1,2)})$ пар

функций $u = (u_1, u_2)$: $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\}$,
$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})} = \sum\limits_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum\limits_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{S} [u]^2 dS.$

Под решением прямой задачи (2.1)—(2.3) при фиксированном управлении $g \in U$ понимается функция $u(g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $v \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ равенству

$$Q(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k\, \frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\frac{\partial v}{\partial r_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} v + d\, q(u) v\right] d\Omega_0 + \int\limits_{S} \theta\, [u][v]\, dS = \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\Omega_0 = l(v). \tag{2.11}$$

Разрешимость задачи (2.1)–(2.3) в смысле ее определения (2.11) гарантирует

Т е о р е м а 2.1 *При любом $g \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи (2.1)–(2.3), определяемое из интегрального равенства (2.11), причем*

$$\|u(g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C_7 \sum_{k=1}^{2} \|f_k\|_{L_2(\Omega_k)} = \overline{C}_7, \text{ где } C_7 = const > 0. \tag{2.12}$$

Доказательство теоремы 2.1 опирается на теорию монотонных операторов [12], при этом существенно используются введенные выше Гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы.

Отметим, что оценки точности аппроксимаций в дальнейшем установлены при предположении, что обобщенное решение поставленной краевой задачи из $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ принадлежит также классу $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$ (т. е. при предположении, аналогичном сделанному в [10, с.6], при исследовании задач с условиями неидеального контакта), точнее, принадлежит пространству $\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \{u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\}$, и справедлива оценка

$$\sup_{g \in U} \sum \|u_k(g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \le M, \quad M = const > 0.$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.10), (2.1)–(2.9).

Л е м м а 2.1 *Пусть U – множество допустимых управлений в экстремальной задаче (2.10), (2.1)–(2.9). Пусть далее $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ – произвольная последовательность, а $u^{(n)} \equiv u(r, g^{(n)})$ – решение задачи (2.1)–(2.3) при $g = g^{(n)}$. Тогда из условия $g^{(n)} \to \overline{g}$ слабо в H следует, что $u^{(n)}(r) = u(r, g^{(n)}) \to u(r, \overline{g}) = \overline{u}(r)$ слабо в $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, где $\overline{u}(r) = u(r, \overline{g})$ - решение задачи (2.1)–(2.3) при $g = \overline{g}$, т. е. отображение $g \to u(r, g)$ является слабо непрерывным из U в $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, переводящим слабую сходимость в H – пространстве управлений на множестве U – в слабую сходимость в $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$ – пространстве состояний.*

З а м е ч а н и е 2.1 *Отображение $g \to u(r, g)$ – усиленно непрерывное из U в $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ в том смысле, что оно переводит слабую сходимость в H на множестве U в сильную сходимость в $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$.*

Доказательство леммы 2.1 и замечания 2.1 проводится по методике из [1].

Т е о р е м а 2.2 *Существует по крайней мере одно оптимальное управление* $g_* \in U$ *задачи* (2.10), (2.1)–(2.9), *т.е.* $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$. *Множество точек минимума* U_* *целевого функционала* $J(g)$ *в экстремальной задаче* (2.10), (2.1)–(2.9) *слабо компактно в* $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \times (L_2(\Omega_1))^2 \times \times (L_2(\Omega_2))^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$. *Любая минимизирующая последовательность* $\left\{g^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ *функционала* $J(g)$ *слабо сходится в* H *к множеству* U_*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что множество U является выпуклым замкнутым и ограниченным в H, а следовательно, U слабо компактно в H. Далее, рассмотрим функционал цели $g \to J(g)$, определенный формулой (2.10). В силу замечания 2.1 из условия $g^{(n)} \to \overline{g}$ слабо в H следует, что $J(g^{(n)}) \to J(\overline{g})$ при $n \to \infty$, т. е. функционал $g \to J(g)$ является слабо непрерывным в H на множестве U, а следовательно, и слабо полунепрерывным снизу на U. Кроме того, как было отмечено выше, множество U является слабо компактным в H. Отсюда, применяя результат из [1, с.505] (см. теорему 4), получим все утверждения теоремы 2.2.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Постановка сеточной задачи оптимизации и ее корректность

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.10), (2.1)–(2.9) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [9], [15]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задачи (2.1)–(2.9) нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, и в $\overline{\Omega}$.

3.1. Некоторые обозначения

Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2: $\widehat{\omega}_\alpha = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in \in [0, l_\alpha] : \ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \, x_\alpha^{(0)} = 0, \, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, \, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}\right\}$, $\alpha = 1, 2$, также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$: $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}_1 \times \widehat{\omega}_2$. Очевидно, что всегда можно построить сетку $\widehat{\omega}_1$ на $[0, l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно и, исходя из положения точки $x_1 = \xi$, находить число узлов из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. В дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\overline{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1 - 1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2 - 1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$. По аналогии с работами [5–6] введем сетки узлов: $\overline{\omega}_1^{(1)} = \left\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : \ i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, \ N_{1\xi} h_1 = \xi\right\}$, $\overline{\omega}_1^{(2)} = \left\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : \ i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1}, \ N_{1\xi} h_1 = l_1\right\}$, $\omega_1^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\overline{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : \ i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \overline{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2$; $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\overline{\omega} \equiv \overline{\omega}^{(1,2)} = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)} = \left(\overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}\right) \times \overline{\omega}_2 = \left\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, \ i_1 = \overline{0, N_1}, \ N_{1\xi} h_1 = \xi, \, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, \, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\right\} \times \overline{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2$; $\gamma_S = \left\{x_1 = \xi, \, x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2 - 1)h_2\right\} = \left\{x_1 = \xi, \, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\right\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$;

$\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \overline{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \overline{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$. Также нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1 \equiv \overline{\Omega}^-$, обозначим через $H_h^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2 \equiv \overline{\Omega}^+$, обозначим через $H_h^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$. Множество $H_h^{(k)}(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой $(y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum\limits_{\overline{\omega}^{(k)}} y_k(x)\, \nu_k(x)\, \hbar_1 \hbar_2$, $\|y_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}$, обозначим через $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x_1)$ – средний шаг сеток $\overline{\omega}_1^{(1)}$ и $\overline{\omega}_1^{(2)}$, а $\hbar_2 = \hbar_2(x_2)$ – средний шаг сетки $\overline{\omega}_2$ [3]. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}^{(1)}$ и $\overline{\omega}^{(2)}$ соответственно, со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y_{k\overline{x}_1} \nu_{k\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\overline{x}_2} \nu_{k\overline{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$
$$\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad k = 1, 2,$$

где $\|\nabla y_k\|^2 = \sum\limits_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y^2_{k\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum\limits_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y^2_{k\overline{x}_2} \hbar_1 h_2$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространство $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1, y_2)$, определяемое соотношением $V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \big\{ y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}) \big\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой $(y, \nu)_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum\limits_{k=1}^{2} (y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}$, $\|y\|^2_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum\limits_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}$, $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$, является гильбертовым пространством. Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(k)}$, на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$, по формулам

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{x \in \partial\omega^{(k)}} y_k(x) \nu_k(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями:

$$\|y_k\|^2_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = (y_k, y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

$$\tau_1(x) = \begin{cases} h_1(x_1),\ x_1 \in \omega_1^{(1)},\ x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2),\ x_2 \in \omega_2,\ x_1 = 0, \xi; \\ \dfrac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2},\ x \in \overset{\square}{\gamma}{}^{(1)}, \end{cases} \qquad \tau_2(x) = \begin{cases} h_1(x_1),\ x_1 \in \omega_1^{(1)},\ x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2),\ x_2 \in \omega_2,\ x_1 = \xi, l_1; \\ \dfrac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2},\ x \in \overset{\square}{\gamma}{}^{(2)}, \end{cases}$$

а $\overset{\square}{\gamma}{}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника Ω_k, $k = 1, 2$. Пусть теперь $\overset{\circ}{\gamma}{}^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \cap \overset{\circ}{\Gamma}_k \equiv \gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_s$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\overline{\omega}^{(k)} \subset \overline{\Omega}_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим нормированное подпространство пространства сеточных функций $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x_2 \in \omega_2} y_k^2(\xi, x_2) h_1 h_2, \quad k = 1, 2,$$

индуцированными скалярными произведениями $(y_k, v_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum\limits_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)v_k(x)h_1h_2 +$ $+\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in\gamma_S} y_k(x)v_k(x)h_1h_2$, $k = 1, 2$. Нетрудно видеть, что $(y_1, v_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})} = (y_1, v_1)_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)}$, $(y_2, v_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})} = (y_2, v_2)_{L_2(\omega_2^{(2)-}\times\omega_2)}$. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространства $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций y:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y = (y_1, y_2) \in L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)}) \times L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\right\},$$
$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y = (y_1, y_2) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\right\},$$

с нормами $\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \sum\limits_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}$, $\quad \|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}$.

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0,\xi]$: $e_1^{(1)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le x_1 + 0.5h_1\}$, $x_1 \in \omega_1^{(1)} \subset [0,\xi]$, $e_1^{(1)}(0) = \{r_1 : 0 \le r_1 \le 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi) = \{r_1 : \xi - 0.5h_1 \le r_1 \le \xi\}$; а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi, l_1]$: $e_1^{(2)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le x_1 + 0.5h_1\}$, $x_1 \in \omega_1^{(2)} \subset [\xi, l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi) = \{r_1 : \xi \le r_1 \le \xi + 0.5h_1\}$, $e_1^{(2)}(l_1) = \{r_1 : l_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0, l_2]$: $e_2(x_2) = \{r_2 : x_2 - 0.5h_2 \le r_2 \le x_2 + 0.5h_2\}$, $x_2 \in \omega_2 \subset [0, l_2]$, $e_2(0) = \{r_2 : 0 \le r_2 \le 0.5h_2\}$, $e_2(l_2) = \{r_2 : l_2 - 0.5h_2 \le r_2 \le l_2\}$. Далее через $e^{(1)}(x) \equiv e^{(1)}(x_1, x_2) = e_1^{(1)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1$, будем обозначать элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x) \equiv e^{(2)}(x_1, x_2) = e_1^{(2)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2$,– элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_2$. Пусть $v(x) = v_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$. Определим для функций $v_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову S^{x_α} по переменным x_α, $\alpha = 1, 2$:

$$S^{x_1}v_1(x) = \frac{1}{\hbar_1}\int\limits_{e_1^{(1)}(x_1)} v_1(r_1, x_2)\,dr_1, \quad x_1 \in \overline{\omega}_1^{(1)}, \quad \hbar_1 = \hbar_1(x_1) = \begin{cases} h_1, x_1 \in \omega_1^{(1)}, \\ 0.5h_1, x_1 = 0, \xi, \end{cases}$$
$$S^{x_2}v_1(x) = \frac{1}{\hbar_2}\int\limits_{e_2(x_2)} v_1(x_1, r_2)\,dr_2, \quad x_2 \in \overline{\omega}_2, \quad \hbar_2 = \hbar_2(x_2) = \begin{cases} h_2, x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, x_2 = 0, l_2. \end{cases}$$

С помощью одномерных операторов S^{x_α}, действующих по направлению x_α, $\alpha = 1, 2$, определим усредняющий оператор $S^x = S^{x_1}S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $v(x) = v_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(k)}(\omega^{(k)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)$ будем обозначать пространство сеточных функций $v_{kh}(x)$, $x \in \omega^{(k)} \cup \gamma_S$, заданных на сетке $\omega^{(k)} \cup \gamma_S$, со скалярным произведением и нормой:

$$(v_{kh}, \tilde{v}_{kh})_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup\gamma_S)} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} v_{kh}(x)\tilde{v}_{kh}(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} v_{kh}(x)\tilde{v}_{kh}(x)h_1h_2,$$
$$\|v_{kh}(x)\|^2_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup\gamma_S)} = (v_{kh}, v_{kh})_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup\gamma_S)},\ k = 1, 2.$$

3.2. Постановка сеточной задачи управления, ее корректность

Задачам оптимального управления (2.10), (2.1)–(2.9) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\bar\omega^{(1)}} |y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}|^2 \hbar_1\hbar_2 = \|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|^2_{L_2(\bar\omega^{(1)})}, \tag{3.13}$$

при условиях, что сеточная функция $y \equiv y(\Phi_h) = (y_1(\Phi_h), y_2(\Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи для задачи (2.1)-(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции $v = (v_1, v_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered}
Q_h(y,v) = \sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg\{ \sum_{\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2} b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x)) y_{\alpha\bar x_1} v_{\alpha\bar x_1} h_1h_2 + \sum_{\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+} \tilde b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x)) y_{\alpha\bar x_1} v_{\alpha\bar x_1} h_1h_2 + \\
+\frac12\sum_{\omega_2^+} \tilde b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(\xi,x_2)) y_{\alpha\bar x_2}(\xi,x_2) v_{\alpha\bar x_2}(\xi,x_2) h_1h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} \Phi_{\alpha+2,h}(x) y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(x) v_1(x) h_1h_2 + \\
+\frac12\sum_{\omega_2} \Phi_{\alpha+2,h}(\xi,x_2) y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2) v_1(\xi,x_2) h_1h_2 + \sum_{\omega^{(2)}} \Phi_{\alpha+4,h}(x) y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(x) v_2(x) h_1h_2 + \\
+\frac12\sum_{\omega_2} \Phi_{\alpha+4,h}(\xi,x_2) y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2) v_2(\xi,x_2) h_1h_2 + \sum_{\omega^{(\alpha)}} \Phi_{\alpha+6,h}(x)\, q_\alpha(y_\alpha(x)) v_\alpha(x) h_1h_2 + \\
+\frac12\sum_{\omega_2} \Phi_{\alpha+6,h}(\xi,x_2) q_\alpha(y_\alpha(\xi,x_2)) v_\alpha(\xi,x_2) h_1h_2 \Bigg\} + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2)[y(\xi,x_2)]\,[v(\xi,x_2)]\,h_2 = \\
= \sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg\{ \sum_{\omega^{(\alpha)}} f_{\alpha h}(x) v_\alpha(x) h_1h_2 + \frac12\sum_{\omega_2} f_{\alpha h}(\xi,x_2) v_\alpha(\xi,x_2) h_1h_2 \Bigg\} = l_h(v),
\end{gathered} \tag{3.14}$$

а сеточные управления Φ_h принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$\begin{gathered}
U_h = \prod_{k=1}^{8} U_{kh} \subset W^1_\infty(\bar\omega^{(1)}) \times W^1_\infty(\bar\omega^{(2)}) \times \big(L_\infty(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\big)^2 \times \big(L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)\big)^2 \times L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times \\
\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) = B_h,\ \Phi_{ph}(x) \in U_{ph} = \big\{\Phi_{ph}(x) \in W^1_\infty(\bar\omega^{(p)}) = B_{ph} : 0 < \nu_p \le \Phi_{ph}(x) \le \bar\nu_p, \\
x \in \bar\omega^{(p)},\ |\Phi_{phx_1}(x)| \le R_p^{(1)}, x \in \omega_1^{(p)-} \times \bar\omega_2, |\Phi_{phx_2}(x)| \le R_p^{(2)}, x \in \omega_1^{(p)} \times \bar\omega_2^-\big\},\ p = 1,2, \\
\Phi_{\beta h} \in U_{\beta h} = \big\{\Phi_{\beta h} \in L_\infty(\omega^{(1)}\cup\gamma_S) = B_{\beta h} : \zeta_\beta \le \Phi_{\beta h}(x) \le \bar\zeta_\beta, x \in \omega^{(1)}\cup\gamma_S\big\},\ \beta = 3,4,7, \\
\Phi_{\alpha h} \in U_{\alpha h} = \big\{\Phi_{\alpha h} \in L_\infty(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) = B_{\alpha h} : \zeta_\alpha \le \Phi_{\alpha h}(x) \le \bar\zeta_\alpha, x \in \omega^{(2)}\cup\gamma_S\big\},\ \alpha = 5,6,8,
\end{gathered} \tag{3.15}$$

где $B_{1h} = W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})$, $B_{2h} = W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})$ – пространства сеточных управлений $\Phi_{1h}(x)$, $\Phi_{2h}(x)$, заданных на сетках $\bar\omega^{(1)}$, $\bar\omega^{(2)}$ с нормами

$$\begin{gathered}
\|\Phi_{1h}(x)\|_{W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})} = \max_{\bar\omega^{(1)}} |\Phi_{1h}(x)| + \max_{\omega_1^{(1)-}\times\bar\omega_2} |\Phi_{1hx_1}(x)| + \max_{\bar\omega_1^{(1)}\times\omega_2^-} |\Phi_{1hx_2}(x)|, \\
\|\Phi_{2h}(x)\|_{W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})} = \max_{\bar\omega^{(2)}} |\Phi_{2h}(x)| + \max_{\omega_1^{(2)-}\times\bar\omega_2} |\Phi_{2hx_1}(x)| + \max_{\bar\omega_1^{(2)}\times\omega_2^-} |\Phi_{2hx_2}(x)|
\end{gathered} \tag{3.16}$$

соответственно. Здесь

$$\begin{gathered}
b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2)) = \frac{\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x) + \Phi_{1h}^{(-1_1,-1_2)}(x) + \Phi_{1h}^{(+1_2)}(x) + \Phi_{1h}^{(-1_1,+1_2)}(x)}{4}, \\
b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2)) = \frac{\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x) + \Phi_{2h}^{(-1_1,-1_2)}(x) + \Phi_{2h}^{(+1_2)}(x) + \Phi_{2h}^{(-1_1,+1_2)}(x)}{4}, \\
\tilde b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2)) = \frac{\Phi_{1h}(x) + \Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)}{2},\ \tilde b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2)) = \frac{\Phi_{2h}(x) + \Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)}{2},
\end{gathered} \tag{3.17}$$

$\Phi_{1h}^{(-1_1,-1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1 - h_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_1,+1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$, $\Phi_{1h}^{(+1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 + h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1,-1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1 - h_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1,+1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$, $\Phi_{2h}^{(+1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 + h_2)$, а $\theta_h(x_2)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $\theta(r_2)$, $f_\alpha(r)$, $\alpha = 1, 2$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$f_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} f_\alpha(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, x_2 \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$f_{1h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi - 0.5h_1}^{\xi} \int\limits_{e_2(x_2)} f_1(r)\, dr_1 dr_2,\ f_{2h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi}^{\xi + 0.5h_1} \int\limits_{e_2(x_2)} f_2(r)\, dr_1 dr_2, x_2 \in \omega_2;$$

$$\theta_h(x_2) = \frac{1}{h_2} \int\limits_{e_2(x_2)} \theta(r_2)\, dr_2, x_2 \in \omega_2; \quad u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{\hbar_1 \hbar_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, x \in \bar{\omega}^{(1)}.$$

Здесь усреднения берутся по элементарным ячейкам [5].

Т е о р е м а 3.1 *Задача о нахождении решения разностной схемы* (3.14) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h \in U_h$ *эквивалентна решению операторного уравнения* $A_h y = F_h$, *где* A_h *– разностный оператор, действующий из* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *в* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, *и сеточная фунция* $F_h \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *определяются равенствами* $\big(A_h y, v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = Q_h(y, v)$, $\big(F_h, v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = l_h(v)$, $\forall y, v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$; *задача* (3.14) *однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \le M \sum_{k=1}^{2} \|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)} = \widehat{M}, \quad \forall \Phi_h \in U_h,\ \text{где } M = const > 0. \tag{3.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя ограничения на входные данные краевой задачи (2.1)–(2.9), сеточные неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, разностные аналоги теорем вложения, можно убедиться, что форма $Q_h(y, v)$ при фиксированном $y \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\forall \Phi_h \in U_h$ определяет линейный ограниченный функционал в пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ таким образом, что значение функционала $A_h y$ на элементе $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ определяется выражением $\big(A_h y, v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = Q_h(y, v)$, $\forall y, v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$. Действительно,

$$\big|Q_h(y, v)\big| \le \sum_{\alpha=1}^{2} \Bigg\{ \overline{\nu}_\alpha \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} \big|y_{\alpha \bar{x}_1} v_{\alpha \bar{x}_1}\big| h_1 h_2 + \overline{\nu}_\alpha \sum_{\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+} \big|y_{\alpha \bar{x}_2} v_{\alpha \bar{x}_2}\big| h_1 h_2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \overline{\nu}_\alpha \sum_{\omega_2^+} \big|y_{\alpha \bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{\alpha \bar{x}_2}(\xi, x_2)\big| h_1 h_2 + m_\alpha \sum_{\omega^{(\alpha)}} \big|y_{\alpha \overset{0}{x}_1}(x) v_\alpha(x)\big| h_1 h_2 +$$

$$+p_\alpha\sum_{\omega^{(\alpha)}}\bigl|y_{\alpha \overset{0}{x}_2}(x)v_\alpha(x)\bigr|h_1h_2+\frac{1}{2}p_\alpha\sum_{\omega_2}\bigl|y_{\alpha \overset{0}{x}_2}(\xi,x_2)v_\alpha(\xi,x_2)\bigr|h_1h_2\Bigr\}+$$

$$+\overline{\theta}_0\sum_{\omega_2}\bigl|[y(\xi,x_2)]\,[v(\xi,x_2)]\bigr|\,h_2\le\sum_{\alpha=1}^{2}\overline{\nu}_\alpha\Bigl\{\|y_{\alpha\overline{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}\|v_{\alpha\overline{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+$$

$$+\|y_{\alpha\overline{x}_2}\|_{L_2(\overline{\omega}_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)}\|v_{\alpha\overline{x}_2}\|_{L_2(\overline{\omega}_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)}\Bigr\}+\sum_{\alpha=1}^{2}\zeta_{\alpha+6}L_q\|y_\alpha\|_{L_2(\overline{\omega}_1^{(\alpha)}\times\omega_2)}\|v_\alpha\|_{L_2(\overline{\omega}_1^{(\alpha)}\times\omega_2)}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}m_\alpha\|y_{\alpha \overset{0}{x}_1}\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}\|v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}+\sum_{\alpha=1}^{2}p_\alpha\|y_{\alpha \overset{0}{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}\|v_\alpha\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+$$

$$+\overline{\theta}_0\sum_{\alpha=1}^{2}\bigl\{\|y_\alpha\|_{L_2(\gamma_S)}\|v_\alpha\|_{L_2(\gamma_S)}+\|y_\alpha\|_{L_2(\gamma_S)}\|v_{3-\alpha}\|_{L_2(\gamma_S)}\bigr\}\le$$

$$\le C_0\bigl(\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\bigr)\|v\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})},\quad\forall y,v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}),$$

где постоянная $C_0(\xi)$ зависит от нормы $\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}$ и не зависит от v, является непрерывной функцией от $\xi\ge 0$. Кроме того, $Q_h(y,v)$ линейна по аргументу v. Это вместе с полученной оценкой дает требуемое утверждение. Форма $l_h(v)$ также порождает линейный ограниченный функционал F_h над $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$: $\bigl(F_h,v\bigr)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}=$ $=l_h(v),\forall v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}$. Следовательно, тождество (3.14) примет вид: $\bigl(A_hy,v\bigr)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}}=$ $=\bigl(F_h,v\bigr)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}},\forall v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$. Теперь отыскание решения разностной схемы из сумматорного тождества (3.14) сведено к решению операторного уравнения $A_hy=F_h$.

Теперь покажем, что существует единственное решение $y\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, удовлетворяющее тождеству (3.14). Согласно результату Браудера [13], достаточно доказать, что разностный оператор A_h сильно монотонен. Имеем

$$<A_hy-A_hv,y-v>\ge\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigl\{\nu_\alpha\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2}\bigl[(y_\alpha-v_\alpha)_{\overline{x}_1}\bigr]^2h_1h_2+\nu_\alpha\sum_{\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+}\bigl[(y_\alpha-v_\alpha)_{\overline{x}_2}\bigr]^2h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{2}\nu_\alpha\sum_{\omega_2^+}\bigl[(y_\alpha-v_\alpha)_{\overline{x}_2}(\xi,x_2)\bigr]^2h_1h_2+\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{\alpha+2,h}(x)\bigl[(y_1-v_1)_{\overset{0}{x}_\alpha}(y_1-v_1)\bigr]h_1h_2+$$

$$+\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{\alpha+4,h}(x)\bigl[(y_2-v_2)_{\overset{0}{x}_\alpha}(y_2-v_2)\bigr]h_1h_2\Bigr\}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma_S}\Phi_{3h}(x)\bigl[(y_1-v_1)_{\overset{0}{x}_2}(y_1-v_1)\bigr]h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\gamma_S}\Phi_{5h}(x)\bigl[(y_2-v_2)_{\overset{0}{x}_2}(y_2-v_2)\bigr]h_1h_2+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigl\{\sum_{\omega^{(\alpha)}}\Phi_{\alpha+6,h}\bigl[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\bigr](y_\alpha-v_\alpha)h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\gamma_S}\Phi_{\alpha+6,h}\bigl[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\bigr](y_\alpha-v_\alpha)h_1h_2\Bigr\}+\theta_0\sum_{\omega_2}\bigl[y-v\bigr]^2h_2.\tag{3.19}$$

Используя ε_1 и ε_2–неравенства Коши, отдельно оценим

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigl\{\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{\alpha+2,h}(x)\bigl[(y_1-v_1)_{\overset{0}{x}_\alpha}(y_1-v_1)\bigr]h_1h_2+\sum_{\omega^{(2)}}\Phi_{\alpha+4,h}(x)\bigl[(y_2-v_2)_{\overset{0}{x}_\alpha}(y_2-v_2)\bigr]h_1h_2\Bigr\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_{3h}(x)\bigl[(y_1-v_1)_{\overset{0}{x}_2}(y_1-v_1)\bigr]h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_{5h}(x)\bigl[(y_2-v_2)_{\overset{0}{x}_2}(y_2-v_2)\bigr]h_1h_2\ge$$

$$\geq -\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} \left[(y_1-v_1)_{\overline{x}_1}\right]^2 \hbar_1 h_2 - \varepsilon_2 \sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2^+} \left[(y_1-v_1)_{\overline{x}_2}\right]^2 \hbar_1 h_2 -$$
$$-\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^{(2)-}\times\omega_2} \left[(y_2-v_2)_{\overline{x}_1}\right]^2 \hbar_1 h_2 - \varepsilon_2 \sum_{\omega_1^{(2)-}\times\omega_2^+} \left[(y_2-v_2)_{\overline{x}_2}\right]^2 \hbar_1 h_2 -$$
$$-\frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{\omega^{(1)}} m_1^2 (y_1-v_1)^2 h_1 h_2 - \frac{1}{4\varepsilon_2}\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} p_1^2 (y_1-v_1)^2 \hbar_1 h_2 -$$
$$-\frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{\omega^{(2)}} m_2^2 (y_2-v_2)^2 h_1 h_2 - \frac{1}{4\varepsilon_2}\sum_{\omega_1^{(2)-}\times\omega_2} p_2^2 (y_2-v_2)^2 \hbar_1 h_2 .$$

Для оценки величин $\sum\limits_{\alpha=1}^{2}\sum\limits_{\omega^{(\alpha)\pm}} \Phi_{\alpha+6,h}\big[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\big](y_\alpha-v_\alpha)h_1h_2$ рассмотрим три частных случая. Для частного линейного случая $q_\alpha(u_\alpha)$, $\alpha=1,2$, т. е. $q_0=L_q=1$, имеем

$$\Phi_{\alpha+6,h}\big[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\big](y_\alpha-v_\alpha)\geq \zeta_{\alpha+6}\big|y_\alpha-v_\alpha\big|^2, \quad \alpha=1,2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай: $0\leq q_0\leq (q_\alpha(\xi_1)-q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1-\xi_2)\leq L_q<\infty$, $\zeta_{\alpha+6}\geq 0$, $\alpha=1,2$. Имеем

$$\Phi_{\alpha+6,h}\big[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\big](y_\alpha-v_\alpha)\geq \zeta_{\alpha+6}\, q_0\, \big|y_\alpha-v_\alpha\big|^2, \quad \alpha=1,2.$$

И наконец, рассмотрим случай, когда $\zeta_{\alpha+6}$, $\alpha=1,2$, – константы произвольного знака. Заметим, что $\big|\Phi_{\alpha+6,h}\big|\leq \max\limits_{\alpha=\overline{1,2}}\big\{|\zeta_{\alpha+6}|,|\overline{\zeta}_{\alpha+6}|\big\}\equiv\zeta_0$, тогда

$$\big|\Phi_{\alpha+6,h}\big[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\big](y_\alpha-v_\alpha)\big|\leq L_q\big|\Phi_{\alpha+6,h}(x)\big|\big|y_\alpha-v_\alpha\big|^2\leq L_q\,\zeta_0\big|y_\alpha-v_\alpha\big|^2, \quad \alpha=1,2,$$

т. е. $\Phi_{\alpha+6,h}\big[q_\alpha(y_\alpha)-q_\alpha(v_\alpha)\big](y_\alpha-v_\alpha)\geq -L_q\,\zeta_0\big|y_\alpha-v_\alpha\big|^2$, $\quad \alpha=1,2.$

Тогда

$$\begin{gathered} < A_h y - A_h v, y-v > \geq \sum_{\alpha=1}^{2}\big[\nu_\alpha-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\big]\|y_\alpha-v_\alpha\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(\alpha)})} + \\ +\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\lambda_\alpha-\frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1}-\frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2}\Big]\|y_\alpha-v_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(\alpha)})}+\theta_0\sum_{\gamma_S}[y-v]^2h_2, \quad \varepsilon_1,\varepsilon_2>0, \end{gathered} \tag{3.20}$$

где λ_α, $\alpha=1,2$, любая из следующих констант: 1) $\lambda_\alpha=q_0\,\zeta_{\alpha+6}$, $\quad\zeta_{\alpha+6}\geq 0$; 2) $\lambda_\alpha=\zeta_{\alpha+6}$, $\zeta_{\alpha+6}$ – любая константа, когда $q_\alpha(u_\alpha)=u_\alpha$; 3) $\lambda_\alpha=-L_q\zeta_0$, где $\zeta_0=\max\big\{|\zeta_7|\,,|\zeta_8|\,\big|\overline{\zeta}_7\big|\,,\big|\overline{\zeta}_8\big|\big\}$.

Правая часть в (3.20), благодаря неравенству Фридрихса

$$\|y_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(1)})}\leq C^2_{\Omega_\alpha}\,|y_\alpha|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(\alpha)})},\ \alpha=1,2, \quad C^2_{\Omega_1}=\left(\frac{8}{\xi_1^2}+\frac{8}{l_2^2}\right)^{-1},\ C^2_{\Omega_1}=\left(\frac{8}{(l_1-\xi_1)^2}+\frac{8}{l_2^2}\right)^{-1},$$

не меньше выражения $\sum\limits_{\alpha=1}^{2}\left(\dfrac{\nu_\alpha-(\varepsilon_1+\varepsilon_1)}{C^2_{\Omega_\alpha}}+\lambda_\alpha-\dfrac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1}-\dfrac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2}\right)$, взятого при всех $\varepsilon_1+\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2\leq\nu_\alpha$, $\alpha=1,2$, и поэтому

$$< A_h y - A_h v, y-v > \geq \sum_{\alpha=1}^{2}\delta_\alpha\|y_\alpha-v_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(\alpha)})}\geq\delta_\alpha\|y_\alpha-v_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(\alpha)})}, \quad \alpha=1,2, \tag{3.21}$$

где $\delta_\alpha = \max\limits_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le \nu_\alpha}} \left\{ \dfrac{\nu_\alpha - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{C^2_{\Omega_\alpha}} + \lambda_\alpha - \dfrac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} - \dfrac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} \right\} > 0, \ \alpha = 1, 2.$

Если $\delta_\alpha > 0$, то при делении (3.21) на δ_α знак неравенства (3.21) не изменится. Поэтому

$$\|y_\alpha - v_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(\alpha)})} \le \frac{1}{\delta_\alpha} < A_h y - A_h v, y - v >, \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.22}$$

Умножим обе части (3.22) на $\left(\frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} + \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right)$. Для того чтобы знак неравенства не изменился, нужно, чтобы $\left(\frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} + \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right) \ge 0$, тогда

$$\left(\frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right) \|y_\alpha - v_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(\alpha)})} \le \frac{1}{\delta_\alpha} \max\left\{0; \frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right\} < A_h y - A_h v, y - v >, \tag{3.23}$$

$\alpha = 1, 2$. Кроме того, из (3.20) при $\varepsilon_k = \frac{\nu_k}{4}$, $k = 1, 2$, получим

$$\begin{gathered} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\nu_\alpha}{2} |y_\alpha - v_\alpha|^2_{W^1_2(\overline{\omega}^{(\alpha)})} + \theta_0 \|[y - v]\|^2_{L_2(\gamma_S)} \le \\ \le < A_h y - A_h v, y - v > + \sum_{\alpha=1}^{2} \Big(\frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\Big) \|y_\alpha - v_\alpha\|^2_{L_2(\omega^{(\alpha)})}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

С учетом (3.23), из (3.24) получим

$$\begin{gathered} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\nu_\alpha}{2} |y_\alpha - v_\alpha|^2_{W^1_2(\overline{\omega}^{(\alpha)})} + \theta_0 \|[y - v]\|^2_{L_2(\gamma_S)} \le \\ \le \Big[1 + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\delta_\alpha} \max\Big\{0; \frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} + \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\Big\}\Big] < A_h y - A_h v, y - v > . \end{gathered} \tag{3.25}$$

Тогда

$$\begin{gathered} < A_h y - A_h v, y - v > \Big[1 + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\delta_\alpha} \max\Big\{0; \frac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} + \frac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\Big\}\Big] \ge \\ \ge \nu \left\{ \sum_{\alpha=1}^{2} |y_\alpha - v_\alpha|^2_{W^1_2(\overline{\omega}^{(\alpha)})} + \|[y - v]\|^2_{L_2(\gamma_S)} \right\} = \nu \|y - v\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}, \end{gathered}$$

где $\nu = \min\left\{\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}, \theta_0\right\}$. Следовательно,

$$\begin{gathered} \big\langle A_h y - A_h v, y - v \big\rangle_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \ge \delta_* \|y - v\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}}, \quad \forall y, v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}} (\overline{\omega}^{(1,2)}), \\ \text{где } \delta_* = \nu \Big[1 + \sum_{\alpha=1}^{2} \tfrac{1}{\delta_\alpha} \max\Big\{0; \tfrac{m^2_\alpha}{4\varepsilon_1} - \tfrac{p^2_\alpha}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\Big\}\Big]^{-1} > 0, \end{gathered}$$

т. е. сеточный оператор $A_h : \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}} (\overline{\omega}^{(1,2)}) \to \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}} (\overline{\omega}^{(1,2)})$ сильно монотонен. Докажем теперь, что оператор A_h непрерывен по Липшицу. Действительно, используя неравенство Коши-Буняковского и Гёльдера, ограничения на входные данные краевой задачи, имеем

$$\begin{gathered} \big|< A_h y - A_h v, \eta >\big| \le \sum_{\alpha=1}^{2} \Bigg\{ \nu_\alpha \Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} \nu_\alpha \big|(y_\alpha - v_\alpha)_{\overline{x}_1} \eta_{\alpha \overline{x}_1}\big| h_1 h_2 \big| h_1 h_2 + \\ + \sum_{\omega_1^{(\alpha)\pm} \times \omega_2^+} \big|(y_\alpha - v_\alpha)_{\overline{x}_2} \eta_{\alpha \overline{x}_2}\Bigg) + \frac{m_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} \big|(y_\alpha - v_\alpha)_{x_1} \eta_\alpha\big| h_1 h_2 + \\ + \frac{m_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} \big|(y_\alpha - v_\alpha)_{\overline{x}_1} \eta_\alpha\big| h_1 h_2 + \frac{p_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} \big|(y_\alpha - v_\alpha)_{x_2} \eta_\alpha\big| h_1 h_2 + \end{gathered}$$

$$+\frac{p_\alpha}{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big|(y_\alpha-v_\alpha)_{\bar{x}_2}\eta_\alpha\big|h_1h_2\Big\}+\frac{p_1}{4}\sum_{\omega_2}\big|(y_1-v_1)_{x_2}\eta_1\big|h_1h_2+$$

$$+\frac{p_1}{4}\sum_{\omega_2}\big|(y_1-v_1)_{\bar{x}_2}\eta_1\big|h_1h_2+L_q\sum_{\alpha=1}^{2}\overline{\zeta}_{\alpha+6}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big|y_\alpha-v_\alpha\big|\,|\eta_\alpha|h_1h_2+$$

$$+\overline{\theta}_0\sum_{\omega_2}\big|[y-v]\,[\eta]\big|h_2+\frac{1}{2}L_q\sum_{\alpha=1}^{2}\overline{\zeta}_{\alpha+6}\sum_{\omega_2}\big|y_\alpha(\xi,x_2)-v_\alpha(\xi,x_2)\big|\,|\eta_\alpha(\xi,x_2)|h_1h_2\leq$$

$$\leq M\|y-v\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\|\eta\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})},\ \forall y,v,\eta\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}).$$

Отсюда следует, что

$$\big\|A_hy-A_hv\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}}=\sup_{\eta\neq0}\frac{\big|< A_hy-A_hv,\eta >\big|}{\|\eta\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}}\leq M\big\|y-v\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}},\ \forall y,v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}),$$

т. е. оператор A_h непрерывен по Липшицу. Следовательно, условия теоремы Браудера [13] выполнены, а значит, уравнение $A_hy=F_h$ однозначно разрешимо. Теперь из коэрцитивности оператора A_h: $\big(A_hy,y\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\geq\delta_*\|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}$ и цепочки легко устанавливаемых неравенств

$$\delta_*\|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}(\overline{\omega}^{(1,2)})}}\leq\big(A_hy,y\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}(\overline{\omega}^{(1,2)})}}=Q_h(y,y)\leq M_1\left(\sum_{k=1}^{2}\|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)}\cup\gamma_S)}\right)\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}}$$

следует оценка (3.18).

Доказательство закончено.

Выпишем явный вид разностной схемы (3.14) в узлах сетки $\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$: требуется найти функцию $y=(y_1,y_2)$, определенную на $\overline{\omega}^{(1,2)}$, где компоненты y_1 и y_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$-\Big(b^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h})y_{1\bar{x}_1}\Big)_{x_1}-\Big(\tilde{b}^{(1)}_{2h}(\Phi_{1h})y_{1\bar{x}_2}\Big)_{x_2}+\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+2,h}\,y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(x)+\Phi_{7h}(x)q_1(y_1)=f_{1h}(x),\ x\in\omega^{(1)},$$

$y_1(x)=0,\quad x\in\gamma^{(1)}=\partial\omega^{(1)}\setminus\gamma_S;$

$$-\Big(b^{(2)}_{1h}(\Phi_{2h})y_{2\bar{x}_1}\Big)_{x_1}-\Big(\tilde{b}^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h})y_{2\bar{x}_2}\Big)_{x_2}+\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+4,h}\,y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(x)+\Phi_{8h}(x)q_2(y_2)=f_{2h}(x),\ x\in\omega^{(2)},$$

$y_2(x)=0,\quad x\in\gamma^{(2)}=\partial\omega^{(2)}\setminus\gamma_S;$

$$\begin{gathered}\frac{2}{h_1}\Big[b^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h}(\xi_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}(\xi_1,x_2)+\theta_h(x_2)y_1(\xi,x_2)\Big]+\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,x_2)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2)-\\-\Big(\tilde{b}^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h})y_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)\Big)_{x_2}+\Phi_{7h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))=f_{1h}(\xi,x_2)+\frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(\xi,x_2),\end{gathered}\tag{3.26}$$

$$-\frac{2}{h_1}\Big[b^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h}(\xi+h_1,x_2))y_{2x_1}(\xi,x_2)-\theta_h(x_2)y_2(\xi,x_2)\Big]+\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+4,h}(\xi,x_2)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2)-$$
$$-\Big(\tilde{b}^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h})y_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)\Big)_{x_2}+\Phi_{8h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))=f_{2h}(\xi,x_2)+\frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(\xi,x_2),x_2\in\omega_2.$$

Теорема 3.2 *Для каждого $h>0$ существует по крайней мере одно оптимальное управление $\Phi_{h*}\in U_h$ в последовательности разностных экстремальных задач* (3.13)–(3.17), *т. е.* $J_{h*}=\inf\{J_h(\Phi_h):\Phi_h\in U_h\}>-\infty$, $U_{h*}=\{\Phi_{h*}\in U_h:J_h(\Phi_{h*})=J_{h*}\}\neq\emptyset$.

Доказательство теоремы проводится путем установления непрерывности функционала $J_h(\Phi_h)$ на множестве U_h в слабой топологии пространства $H_h = W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}) \times \big(L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)\big)^2 \times \big(L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)\big)^2 \times L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)$, опирается на факт слабой компактности U_h в H_h и последующего применения результата из [1], с. 502, теорема 1 и комментарии на с. 565-566.

4. Оценки погрешности и скорости сходимости аппроксимаций. Регуляризация аппроксимаций

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации разностной схемы (2.1)–(2.9) на сетке $\overline{\omega}^{(1,2)}$. Оценку погрешности метода сеток устанавливает следующая

Т е о р е м а 4.1 *Пусть выполнены условия при постановке задачи оптимального управления, $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(g)$ и $y(\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (2.10), (2.1)–(2.9) *и* (3.13)–(3.17). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (2.10), (2.1)–(2.9)*:*

$$\begin{gathered}
\|y(\Phi_h) - u(g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq C\Bigg\{|h|\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L_q\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \\
+\sum_{\beta=1}^{2}\|\vartheta_\alpha^{(\beta)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg] + \\
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\Bigg\|(b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2)) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2)dr_2\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)} + \\
+\Bigg\|\tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2)) - \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2 - 0.5h_2)dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^{+})}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\
+\Bigg\|\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2)dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^{+})}\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} + \\
+\Bigg\|\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2)dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^{+})}\|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)} + \\
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\Bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(r) - \frac{1}{\hbar_1 h_2}\int\limits_{e^1(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Bigg\|_{L_\infty(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)}\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} + \\
+\Bigg\|\Phi_{\alpha+4,h}(r) - \frac{1}{\hbar_1 h_2}\int\limits_{e^2(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r)\,dr\Bigg\|_{L_\infty(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)}\Bigg)\|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)}\Bigg) + \\
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg\|S^x d_{\alpha h}(x) - \Phi_{\alpha+6,h}\Bigg\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg\},
\end{gathered} \tag{4.27}$$

где $C = const$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь разностными формулами суммирования по частям, формулой Грина, используя идеи работ [1, 3, 6, 8], приведем погрешность аппроксимации

$\psi_h(x)$ к специальному виду:

$$
\begin{aligned}
(\psi_h, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = &-\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\eta_1^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_1}h_1h_2 - \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_2}h_1h_2 - \\
&-\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(1)}(\xi,x_2)v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(2)}(\xi,x_2)v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
&+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_3^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(1)}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
&+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(2)}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\eta_4(x_2)[v(\xi,x_2)]\cdot h_2 + \\
&+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_5^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_2}\eta_5^{(\alpha)}(\xi,x_2)v_\alpha(\xi,x_2)h_1h_2,
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

где

$$
\eta_1^{(\alpha)}(x) = B_1^{(\alpha)}(x) + D_1^{(\alpha)}(x), \quad B_1^{(\alpha)}(x) = \left[\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1-0.5h_1, r_2)dr_2\right]u_{\alpha\overline{x}_1}(x) -
$$

$$
-\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1-0.5h_1, r_2)\frac{\partial u_\alpha(x_1-0.5h_1, r_2)}{r_1}dr_2,
$$

$$
D_1^{(\alpha)}(x) = \left[b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2)) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1-0.5h_1, r_2)dr_2\right]u_{\alpha\overline{x}_1}(x),\ x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2,
$$

$$
\eta_2^{(\alpha)}(x) = B_2^{(\alpha)}(x) + D_2^{(\alpha)}(x), \quad B_2^{(\alpha)}(x) = \left[\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2-0.5h_2)dr_1\right]u_{\alpha\overline{x}_2}(x) -
$$

$$
-\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2-0.5h_2)\frac{\partial u_\alpha(r_1, x_2-0.5h_2)}{r_2}dr_1,
$$

$$
D_2^{(\alpha)}(x) = \left[\tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2)) - \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2-0.5h_2)dr_1\right]u_{\alpha\overline{x}_2}(x), \quad x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+,
$$

$$
\eta_2^{(1)}(\xi,x_2) = B_2^{(1)}(\xi,x_2) + D_2^{(1)}(\xi,x_2),\ B_2^{(1)}(\xi,x_2) = \left[\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2-0.5h_2)dr_1\right]u_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) -
$$

$$
-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2-0.5h_2)\frac{\partial u_1(r_1, x_2-0.5h_2)}{r_2}dr_1,
$$

$$D_2^{(1)}(\xi,x_2)=\left[\tilde b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}k_1(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\right]u_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2),\quad x_2\in\omega_2^+,$$

$$\eta_2^{(2)}(\xi,x_2)=B_2^{(2)}(\xi,x_2)+D_2^{(2)}(\xi,x_2),\ B_2^{(2)}(\xi,x_2)=\left[\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\right]u_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)-$$

$$-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)\frac{\partial u_2(r_1,x_2-0.5h_2)}{r_2}dr_1,$$

$$D_2^{(2)}(\xi,x_2)=\left[\tilde b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\right]u_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2),\quad x_2\in\omega_2^+;$$

$$\eta_3^{(\alpha)}(x)=\eta_3^{(\alpha)+}(x)+\eta_3^{(\alpha)-}(x),\ \eta_3^{(\alpha)-}(x)=\left(\Phi_{\alpha+6,h}-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)}d_\alpha(r)dr\right)q_\alpha(u_\alpha),\ x\in\omega^{(\alpha)};$$

$$\eta_3^{(\alpha)+}(x)=\left(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)}d_\alpha(r)dr\right)q_\alpha(u_\alpha(x))-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)}d_\alpha(r)q_\alpha(u_\alpha(r))dr,$$

$$\eta_3^{(1)}(\xi,x_2)=\eta_3^{(1)+}(\xi,x_2)+\eta_3^{(1)-}(\xi,x_2),\quad x_2\in\omega_2; \tag{4.29}$$

$$\eta_3^{(1)-}(\xi,x_2)=\left(\Phi_{7h}(\xi,x_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}d_1(r)dr\right)q_1(u_1(\xi,x_2));$$

$$\eta_3^{(1+)}(\xi,x_2)=\left(\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}d_1(r)dr\right)q_1(u_1(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}d_1(r)q_1(u_1(\xi,x_2))dr;$$

$$\eta_3^{(2)}(\xi,x_2)=\eta_3^{(2)+}(\xi,x_2)+\eta_3^{(2)-}(\xi,x_2),\ x_2\in\omega_2;$$

$$\eta_3^{(2)-}(\xi,x_2)=\left(\Phi_{8h}(\xi,x_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}d_2(r)dr\right)q_2(u_2(\xi,x_2));$$

$$\eta_3^{(2+)}(\xi,x_2)=\left(\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}d_2(r)dr\right)q_2(u_2(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}d_2(r)q_2(u_2(\xi,x_2))dr;$$

$$\eta_4(x_2)=\theta_h(x_2)\big[u(\xi,x_2)\big]-\frac{2}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\big[u(\xi,x_2)\big]\,dr_2,\ x_2\in\omega_2;$$

$$\eta_5^{(\alpha)}(x)=\eta_5^{(\alpha)-}(x)+\eta_5^{(\alpha)+}(x)+\widehat\eta_5^{(\alpha)-}(x)+\widehat\eta_5^{(\alpha)+}(x),\ x\in\omega^{(\alpha)},\ \alpha=1,2;$$

$$\eta_5^{(1)-}(x)=\frac12\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Phi_{\alpha+2,h}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\Big]\,u_{1x_\alpha}(x);$$

$$\eta_5^{(1)+}(x)=\frac12\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Phi_{\alpha+2,h}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\Big]\,u_{1\overline{x}_\alpha}(x);$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)-}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{1x_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)+}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{1\overline{x}_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\eta_5^{(2)-}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\big[\Phi_{\alpha+4,h}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\big]\,u_{2x_\alpha}(x);$$

$$\eta_5^{(2)+}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\big[\Phi_{\alpha+4,h}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\big]\,u_{2\overline{x}_\alpha}(x);$$

$$\widehat{\eta}_5^{(2)-}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{2x_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\widehat{\eta}_5^{(2)+}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{2\overline{x}_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\eta_5^{(\alpha)}(\xi,x_2)=\eta_5^{(\alpha)-}(\xi,x_2)+\eta_5^{(\alpha)+}(\xi,x_2)+\widehat{\eta}_5^{(\alpha)-}(\xi,x_2)+\widehat{\eta}_5^{(\alpha)+}(\xi,x_2),\ x_2\in\omega_2;$$

$$\eta_5^{(1)-}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\big[\Phi_{\alpha+2,h}(x)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\big]\,u_{1x_\alpha}(x);$$

$$\eta_5^{(1)+}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\big[\Phi_{\alpha+2,h}(x)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\big]\,u_{1\overline{x}_\alpha}(x);$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)-}(\xi,x_2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{1x_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)+}(\xi,x_2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{1\overline{x}_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\eta_5^{(2)-}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\big[\Phi_{\alpha+4,h}(x)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\big]\,u_{2x_\alpha}(x);$$

$$\eta_5^{(2)+}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\big[\Phi_{\alpha+4,h}(x)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\big]\,u_{2\overline{x}_\alpha}(x);$$

$$\widehat{\eta}_5^{(2)-}(\xi,x_2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{2x_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

$$\widehat{\eta}_5^{(2)+}(\xi,x_2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Big(\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\Big)u_{2\overline{x}_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\Big];$$

Принимая во внимание уравнения для погрешности $A_hy-A_hu=\psi_h$, представление погрешности аппроксимации (4.28), а также разностные аналоги теорем вложения Соболева, эквивалентные нормировки пространства $V_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\varpi}^{(1,2)})$, неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, получим оценку

$$\|z(g,\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}} = \|y(\Phi_h)-u(g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}} \le M\Bigg\{\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}(\eta_1^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}(\eta_2^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega_2^+}(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\eta_3^{(\alpha)-}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_3^{(\alpha)-}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\eta_3^{(\alpha)+}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_3^{(\alpha)+}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\eta_5^{(\alpha-)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_5^{(\alpha-)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\eta_5^{(\alpha+)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_5^{(\alpha+)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\widehat{\eta}_5^{(\alpha-)})^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\widehat{\eta}_5^{(\alpha-)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}+\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}(\widehat{\eta}_5^{(\alpha+)})^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} \tag{4.30}$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\widehat{\eta}_5^{(\alpha+)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}\Bigg]+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_4(x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}\Bigg\}.$$

Для оценки левой части неравенства (4.30) через параметр h и получения оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию достаточно оценить величины (4.29):

$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\big(\eta_1^{(\alpha)}(x)\big)^2h_1h_2 \le 2\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\Big[|B_1^{(\alpha)}(x)|^2+|D_1^{(\alpha)}(x)|^2\Big]h_1h_2,\ \alpha=1,2;$$
$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}|B_1^{(\alpha)}(x)|^2h_1h_2 \le M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},\ \alpha=1,2;$$

$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2}|D_1^{(\alpha)}|^2h_1h_2 \le M_1^2\Bigg\|b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h})-\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)dr_2\Bigg\|^2_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)};$$
$$\sum_{(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)\cup\gamma_S}\big(\eta_2^{(\alpha)}(x)\big)^2h_1h_2 \le 2\sum_{(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)\cup\gamma_S}\Big[|B_2^{(\alpha)}(x)|^2+|D_2^{(\alpha)}(x)|^2\Big]h_1h_2,\ \alpha=1,2;$$
$$\sum_{(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)\cup\gamma_S}|B_2^{(\alpha)}(x)|^2h_1h_2 \le M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},\alpha=1,2;$$

$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+}|D_2^{(\alpha)}|^2h_1h_2\le M_1^2\left\|\tilde b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h})-\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\right\|^2_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)}\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)};$$
$$\sum_{\omega_2^+}|D_2^{(1)}(\xi,x_2)|^2h_1h_2\le M_1^2\left\|\tilde b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h})-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}k_1(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\right\|^2_{L_\infty(\omega_2^+)}\|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)};$$
$$\sum_{\omega_2^+}|D_2^{(2)}(\xi,x_2)|^2h_1h_2\le M_1^2\left\|\tilde b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h})-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\right\|^2_{L_\infty(\omega_2^+)}\|u_2\|^2_{W_2^2(\Omega_2)};\tag{4.31}$$

$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\big(\eta_2^{(\alpha)}(x)\big)^2h_1h_2\le M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},\alpha=1,2;$$
$$\sum_{\omega_2^+}\big(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2)\big)^2h_1h_2\le M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},\alpha=1,2;$$
$$\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big(\eta_3^{(\alpha)+}(x)\big)^2h_1h_2\le M^2L_q^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},\alpha=1,2;$$
$$\sum_{\omega_2}\big(\eta_3^{(\alpha)+}(\xi,x_2)\big)^2h_1h_2\le M^2L_q^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},\alpha=1,2;$$
$$\sum_{\omega_2}\eta_4^2(x_2)h_2\le M^2h_2^2\|\theta\|^2_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)};$$
$$\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2}\big(\widehat{\eta}_5^{(1\pm)}(x)\big)^2h_1h_2\le M^2\sum_{\alpha=1}^{2}\|\vartheta_1^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_1)}|h|^2\|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)};$$
$$\sum_{\omega^{(2)-}\times\omega_2}\big(\widehat{\eta}_5^{(2\pm)}(x)\big)^2h_1h_2\le M^2\sum_{\alpha=1}^{2}\|\vartheta_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_2)}|h|^2\|u_2\|^2_{W_2^2(\Omega_2)};$$
$$\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big(\eta_3^{(\alpha)-}(x)\big)^2h_1h_2\le M^2\left\|\Phi_{\alpha+6,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^{(\alpha)}(x)}d_\alpha(r)\,dr\right\|^2_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)};$$
$$\sum_{\omega_2}\big(\eta_3^{(1)-}(\xi,x_2)\big)^2h_1h_2\le M^2\left\|\Phi_{7h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}d_1(r)\,dr\right\|^2_{L_\infty(\omega_2)}\|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)};$$
$$\sum_{\omega_2}\big(\eta_3^{(2)-}(\xi,x_2)\big)^2h_1h_2\le M^2\left\|\Phi_{8h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}d_2(r)\,dr\right\|^2_{L_\infty(\omega_2)}\|u_2\|^2_{W_2^2(\Omega_2)};$$
$$\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big(\eta_5^{(1)\pm}(x)\big)^2h_1h_2\le M^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\Phi_{\alpha+2,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\right\|^2_{L_\infty(\omega^{(1)})}\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)};$$

$$\sum_{\omega_2}\big(\eta_5^{(1)\pm}(\xi,x_2)\big)^2h_1h_2\leq M^2\sum_{\alpha=1}^{2}\Big\|\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Big\|^2_{L_\infty(\omega_2)}\|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)};$$

$$\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big(\eta_5^{(2)\pm}(x)\big)^2h_1h_2\leq M^2\sum_{\alpha=1}^{2}\Big\|\Phi_{\alpha+4,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^2(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\,dr\Big\|^2_{L_\infty(\omega^{(2)})}\|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)};$$

$$\sum_{\omega_2}\big(\eta_5^{(2)\pm}(\xi,x_2)\big)^2h_1h_2\leq M^2\sum_{\alpha=1}^{2}\Big\|\Phi_{\alpha+4,h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\,dr\Big\|^2_{L_\infty(\omega_2)}\|u_2\|^2_{W_2^2(\Omega_1)},$$

Докажем первую из оценок (4.31), $\alpha=1$.

$$\Big|\eta_1^{(1)}(x)\Big|=\Bigg|\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{e_2(x_2)}k_1(x_1-0.5h_1,r_2)\Big[\int\limits_{x_1-0.5h_1}^{r_1}\frac{\partial^2u_1(m,r_2)}{\partial m^2}dm-$$
$$-\int\limits_{x_2}^{r_2}\frac{\partial^2u_1(r_1,s)}{\partial r_1\partial s}ds\Big]dr_1dr_2\Bigg|\leq(h_1h_2)^{-1/2}\|k_1\|_{L_\infty(\Omega_1)}\times\Bigg[h_1\Big(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}$$
$$\int\limits_{e_2(x_2)}\Big|\frac{\partial^2u_1(m,r_2)}{\partial m^2}\Big|^2dmdr_2\Big)^{1/2}+h_2\Big(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\Big|\frac{\partial^2u_1(r_1,s)}{\partial r_1\partial s}\Big|^2dr_1ds\Big)^{1/2}\Bigg]\leq$$
$$\leq 2^{1/2}\|k_1\|_{L_\infty(\Omega_1)}|h|(h_1h_2)^{-1/2}\|u_1\|_{W_2^2((x_1-h_1,x_2)\times e_2(x_2))},\quad x\in\omega_1^{(1)+}\times\omega_2.$$

Аналогично доказываются остальные оценки (4.31).
Доказательство закончено.

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.13)–(3.17) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (3.13)–(3.17) и (2.10), (2.1)–(2.9) для любых фиксированных управлений $\Phi_h\in U_h$ и $g\in U$, а также любых $h>0$.

Теорема 4.2 *Для любых управлений $g\in U$ и $\Phi_h\in U_h$ экстремальных задач* (2.10), (2.1)–(2.9) *и* (3.13)–(3.17) *соответственно и любых $h>0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи* (3.13)–(3.17) *справедлива оценка*

$$|J(g)-J_h(\Phi_h)|=|I(u(r;g))-I_h(y(x;\Phi_h))|\leq M\Bigg\{|h|+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Big\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)dr_2-$$
$$-b_{\alpha h}^{(\alpha)}\big(\Phi_{\alpha h}\big)\Big\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+\Big\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1-\widetilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}\big(\Phi_{\alpha h}\big)\Big\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^{+})}\Bigg]+$$
$$+\Big\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}k_1(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1-\widetilde{b}_{1h}^{(1)}\big(\Phi_{1h}\big)\Big\|_{L_\infty(\omega_2^{+})}+\Big\|\widetilde{b}_{2h}^{(2)}\big(\Phi_{2h}\big)-$$
$$-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)dr_1\Big\|_{L_\infty(\omega_2^{+})}+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Big\|\Phi_{\alpha+2,h}-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Big\|_{L_\infty(\omega^{(1)})}+$$

$$+\left\|\Phi_{\alpha+2,h}-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega_2)}+\left\|\Phi_{\alpha+4,h}-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^2(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega^{(2)})}+$$
$$+\left\|\Phi_{\alpha+4,h}-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega_2)}+\left\|\Phi_{\alpha+6,h}-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^{\alpha}(x)}d_\alpha(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})}\Bigg]+$$
$$+\left\|\Phi_{7h}-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}d_1(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega_2)}+\left\|\Phi_{8h}-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}d_2(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega_2)}\Bigg\}, \tag{4.32}$$

где $M=const>0$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g\in U$ и $\Phi_h\in U_h$ – произвольные допустимые управления, а $u(g)$ и $y(\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17). Принимая во внимание (2.9), (3.17) и проводя некоторые преобразования, приведем погрешность $\varepsilon_h(g;\Phi_h)=J(g)-J_h(\Phi_h)$ к специальному виду

$$\begin{gathered}\varepsilon_h(g;\Phi_h)=B_h^{(1)}+B_h^{(2)},\quad B_h^{(1)}=\|u(r;g)-u_0^{(1)}(r)\|^2_{L_2(\Omega_1)}-\|P_{1h}u(r;g)-P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|^2_{L_2(\Omega_1)},\\ B_h^{(2)}=\|P_{1h}u(r;g)-P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|^2_{L_2(\Omega_1)}-\|y(x;\Phi_h)-u_0^{(1)}(x)\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}.\end{gathered} \tag{4.33}$$

Можно показать, что для величин $B_h^{(k)}$, $k=1,2$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}|B_h^{(1)}|\le\Big(\|u(r;g)-P_{1h}u(r;g)\|_{L_2(\Omega_1)}+\|u_0^{(1)}(r)-P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)}\Big)\times\\ \times\Big(\|u(r;g)\|_{L_2(\Omega_1)}+\|P_{1h}u(r;g)\|_{L_2(\Omega_1)}+\|P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)}+\|u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)}\Big),\\ |B_h^{(2)}|\le\|y(\Phi_h)-u(g)\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}\Big(\|u(g)\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}+\|y(\Phi_h)\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}+2\|u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}\Big).\end{gathered} \tag{4.34}$$

Далее, проводя оценки правых частей неравенств (4.34) на основе полученных выше оценок, теорем вложения Соболева [14], их разностных аналогов, эквивалентных нормировок пространств $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ (см. выше) и принимая во внимание представление (4.33) установим оценку (4.32).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач (2.10), (2.1)–(2.9) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.13)–(3.17), зависящих от шага h сетки $\bar{\omega}$ при $|h|\to 0$. Для исследования связи между экстремальными задачами (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17) введем отображения: $R_h:H\to H_h$ и $N_h:H_h\to H$ по правилу: $R_hg=\Phi_h$, где $g=\big(k_1,k_2,\vartheta_1^{(1)},\vartheta_1^{(2)},\vartheta_2^{(1)},\vartheta_2^{(2)},d_1,d_2\big)$, $\Phi_h=\big(R_h^{(1)}k_1,R_h^{(2)}k_2,R_h^{(3)}\vartheta_1^{(1)},R_h^{(4)}\vartheta_1^{(2)},R_h^{(5)}\vartheta_2^{(1)},R_h^{(6)}\vartheta_2^{(2)},R_h^{(7)}d_1,R_h^{(8)}d_2\big)$, $R_h^{(\alpha)}g_\alpha(x)$, $\alpha=1,2$, – дискретизации на сетках $\overline{\omega}^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$, управляющих функций g_α, $\alpha=\overline{1,8}$ по формулам $R_h^{(\alpha)}k_\alpha(x)=S_\alpha^xk_\alpha(x)$, $x\in\overline{\omega}^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$, $R_h^{(\alpha)}g_\alpha=S_1^xg_\alpha$, $x\in\omega^{(1)}$, $\alpha=3,4,7$, $R_h^{(\alpha)}g_\alpha=S_2^xg_\alpha$, $x\in\omega^{(2)}$, $\alpha=5,6,8$, а S_1^x и S_2^x – двумерные операторы усреднения по Стеклову; $N_h\Phi_h=g$, где $\Phi_h=\big(\Phi_{1h},\Phi_{2h},\Phi_{3h},\Phi_{4h},\Phi_{5h},\Phi_{6h},\Phi_{7h},\Phi_{8h}\big)$, $g=\big(F_h^{(1)}\Phi_{1h}(r),F_h^{(2)}\Phi_{2h}(r),P_h^{(3)}\Phi_{3h}(r),P_h^{(4)}\Phi_{4h}(r),P_h^{(5)}\Phi_{5h}(r),P_h^{(6)}\Phi_{6h}(r),P_h^{(7)}\Phi_{7h}(r),P_h^{(8)}\Phi_{8h}(r)\big)$, где $F_h^{(\alpha)}\Phi_{\alpha h}(r)$ – кусочно-линейные восполнения сеточных управлений $\Phi_{\alpha h}$, $\alpha=1,2$, определенные в работе [6] (см. также [3]), а $P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r)$, $k=3,4,7$, $x\in\omega^{(1)}$, и $P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r)$, $k=5,6,8$, $x\in\omega^{(2)}$ – кусочно-постоянные восполнения на $\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$, сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $k = 3,4,7$, $x \in \omega^{(1)}$, и $\Phi_{kh}(x)$, $k = 5,6,8$, $x \in \omega^{(2)}$, соответственно, определяемые по формулам:

$$P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r) = \sum_{i_1=1}^{N_{1\xi}-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Phi_{kh}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})\varphi_{i_1 i_2}^{(1)}(t), \quad k = 3,4,7,$$
$$P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r) = \sum_{i_1=N_{1\xi}+1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\Phi_{kh}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})\varphi_{i_1 i_2}^{(1)}(t), \quad k = 5,6,8,$$
$$\varphi_{i_1 i_2}^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} 1, & (t_1,t_2) \in \hat{e}^{(\alpha)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}); \\ 0, & (t_1,t_2) \notin \hat{e}^{(\alpha)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), \end{cases} \qquad (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1,2,$$

где $\hat{e}^{(1)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) = e^{(1)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $\quad i_1 = \overline{2, N_{1\xi}-2}$, $i_2 = \overline{2, N_2}$, $\hat{e}^{(1)}(h_1, h_2) = \big\{0 \le t_1 \le 1.5h_1, \quad 0 \le t_2 \le 1.5h_2\big\}$; $\hat{e}^{(1)}(h_1, x_2^{(i_2)}) = \big\{0 \le t_1 \le 1.5h_1, \quad x_2^{(i_2)} - 0.5h_2 \le t_2 \le x_2^{(i_2)} + 0.5h_2\big\}$, $i_2 = \overline{2, N_2}$; $\hat{e}^{(1)}(h_1, l_2 - h_2) = \big\{0 \le t_1 \le 1.5h_1, \quad l_2 - 1.5h_2 \le t_2 \le l_2\big\}$, $\hat{e}^{(1)}(\xi - h_1, h_2) = \big\{\xi - 1.5h_1 \le t_1 \le \xi, \quad 0 \le t_2 \le 1.5h_2\big\}$, $\hat{e}^{(1)}(\xi - h_1, x_2^{(i_2)}) = \big\{\xi - 1.5h_1 \le t_1 \le \xi, \quad x_2^{(i_2)} - 0.5h_2 \le t_2 \le x_2^{(i_2)} + 0.5h_2\big\}$, $i_2 = \overline{2, N_2}$; $\hat{e}^{(1)}(\xi - h_1, l_2 - h_2) = \big\{\xi - 1.5h_1 \le t_1 \le \xi, \quad l_2 - 1.5h_2 \le t_2 \le l_2\big\}$, $\hat{e}^{(1)}(x_1^{(i_1)}, h_2) = \big\{x_1^{(i_1)} - 0.5h_1 \le t_1 \le x_1^{(i_1)} + 0.5h_1, \quad 0 \le t_2 \le 1.5h_2\big\}$, $i_1 = \overline{2, N_{1\xi}-2}$; $\hat{e}^{(1)}(x_1^{(i_1)}, l_2 - h_2) = \big\{x_1^{(i_1)} - 0.5h_1 \le t_1 \le x_1^{(i_1)} + 0.5h_1, \quad l_2 - 1.5h_2 \le t_2 \le l_2\big\}$, $i_1 = \overline{2, N_{1\xi}-2}$. Аналогично определяется $\widehat{e}^{(2)}$ в Ω_2. Нетрудно показать, что для любых управлений $g \in U$, $\Phi_h \in U_h$ справедливы включения $R_h g \in U_h$, $N_h\Phi_h \in U$.

Т е о р е м а 4.3 *Пусть J_* и J_{h*} – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в задачах (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17) соответственно. Семейство сеточных задач (3.13)–(3.17), зависящих от шага h сетки $\bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, при $|h| \to 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (2.10), (2.1)–(2.9) по функционалу, т. е. $\lim J_{h*} = J_*$ при $|h| \to 0$, и справедлива оценка скорости сходимости $|J_{h*} - J_*| \le M|h|$.*

Доказательство теоремы следует из методики, изложенной в работе [1].

Предположим теперь, что с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*} + \epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.13)–(3.17) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h} \in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.13)–(3.17) в следующем смысле:

$$J_{h*} \le J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) \le J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\epsilon_h} \in U_h, \tag{4.35}$$

где $\epsilon_h \ge 0$ и $\epsilon_h \to 0$ при $|h| \to 0$. Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h} \in U_h$ из (4.35) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.10), (2.1)–(2.9).

Т е о р е м а 4.4 *Пусть последовательность сеточных управлений $\{\Phi_{h\epsilon_h}\} \subset U_h$ определена из условий (4.35). Тогда последовательность управлений $\{N_h\Phi_{h\epsilon_h}\}$ является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи (2.10), (2.1)–(2.9), т. е. $J(F_h\Phi_{h\epsilon_h}) \to J_*$ при $|h| \to 0$ и справедлива оценка скорости сходимости $0 \le J(F_h\Phi_{h\epsilon_h}) - J_* \le C|h| + \epsilon_h$. Последовательность $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}\}$ слабо сходится в H к множеству $U_* \ne \emptyset$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (2.10), (2.1)–(2.9).*

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [1] и опирается на полученные выше результаты. Слабая сходимость минимизирующей последовательности $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}\}$ исходного функционала $J(g)$ к множеству $U_* \ne \emptyset$ следует из теоремы 2.2.

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в H по управлению разностных аппроксимаций (3.13)–(3.17). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо фунционала $J_h(\Phi_h)$ фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, связанный с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями $J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \le \delta_h, \forall \Phi_h \in U_h, \delta_h \to +0$ при $|h| \to 0$.

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.13)-(3.17) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом h рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.13)–(3.17): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\alpha_h \ge 0$ и $\alpha_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Рассмотрим задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом h определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \le T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) \le T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \tag{4.36}$$

где $\nu_h \ge 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (2.10), (2.1)-(2.9): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$. Поскольку функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.10), (2.1)–(2.9) и функционалы $J(g)$ и $\Omega(g)$ – полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H, то $U_{**} \ne \emptyset$ [1].

Теорема 4.5 *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\hat{\Phi}_h\} \subset U_h$ *определена из условий* (4.36)*. Тогда последовательность управлений* $\{N_h\hat{\Phi}_h(r)\} \subset U_h$ *(см. определение выше) является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной экстремальной задачи* (2.10), (2.1)–(2.9)*, т. е.* $\lim J(N_h\hat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости:* $0 \le J(F_h\hat{\Phi}_h) - J_* \le M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h]$.

Если, кроме того, параметры ν_h, δ_h, α_h *согласованы с* $|h|$ *так, что* $\nu_h, \delta_h, \alpha_h \to +0$ *при* $|h| \to 0$ *и* $\frac{|h|+\nu_h+\delta_h}{\alpha_h} \to 0$ *при* $|h| \to 0$*, то последовательность* $\{N_h\hat{\Phi}_h\}$ *сильно сходится в* H *к множеству* Ω*-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* U_{**} *задачи* (2.10), (2.1)–(2.9).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [1, 6, 8] и опирается на полученные выше результаты.

Список литературы

1. Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, МЦНМО, М., 2011, 624 с.

2. А. З. Ишмухаметов, *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами*, ВЦ РАН, М., 2001, 120 с.

3. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:3 (2007), 376–396.

4. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:1 (2013), 20–46.

5. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:11 (2014), 1767–1792.

6. Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:7 (2016), 1267–1293.

7. F. Lubyshev, A. Manapova, “Numerical solution of optimization problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions”, *Applied Numerical Mathematics*, **104** (2016), 182–203.

8. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “О некоторых задачах оптимального управления и их аппроксимации для некоторых несамосопряженных эллиптических уравнений типа конвекции-диффузии”, *Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*, **143** (2017), 3–23.

9. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989, 616 с.

10. Н. Т. Дренска, “Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах”, *Вестник Московского ун-та. Сер. 15. «Вычисл. матем. и кибернетика»*, 1981, № 4, 15–21.

11. Г. И. Марчук, *Сопряженные уравнения и анализ сложных систем*, Наука, М., 1992, 335 с.

12. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

13. Ф. Е. Браудер, *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Новосибирск, 1963.

14. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с.

15. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Эдиториал УРСС, М., 2003, 784 с.

Поступила 12.04.2019

MSC2010 65N06

An approximation of problems of optimal control on the coefficients of elliptic convection-diffusion equations with an imperfect contact matching condition

© **F. V. Lubyshev**[1], **A. R. Manapova**[2]

Abstract. We consider nonlinear optimization problems for processes described by non-self-adjoint elliptic equations of convection-diffusion problems with an imperfect contact matching conditions. These are the problems with a jump of the coefficients and of the solution on the interface; the jump of the solution is proportional to the normal component of the flux. Variable coefficients multiplying the highest and the lowest derivatives in the equation and the coefficients by nonlinear terms in the equations of state are used as controls. Finite difference approximations of optimization problems are constructed and investigated. For the approximation of state equations we propose a new "modified difference scheme" in which the variable grid coefficients in the principal part of the difference operator are computed using method other than traditionally applied in the theory of difference schemes. The problem's correctness is investigated. The accuracy estimation of difference approximations with respect to the state are obtained. Convergence rate of approximations with respect to cost functional is estimated, too. Weak convergence with respect to control is proved. The presence of a non-self-adjoint operator causes certain difficulties in constructing and studying approximations of differential equations describing discontinuous states of controlled processes, in particular, in proving the difference approximations well-posedness, and in studying the relationship between the original optimal control problem and the approximate mesh problem. The approximations are regularized. The obtained results will be heavily used later in solving problems associated with the development of effective methods for the numerical solution to the constructed finite-dimensional mesh optimal control problems and their computer implementation.

Key Words: optimal control problem, non-self-adjoint elliptic equation, imperfect contact, difference approximations

References

1. F. P. Vasil'ev, *Metody optimizatsii [Optimization methods]*, Moscow center for continuous mathematical education, Moscow, 2011 (In Russ.), 624 c.

2. A. Z. Ishmukhametov, *Voprosy ustoychivosti i approksimatsii zadach optimal'nogo upravleniya [Stability and approximation of optimal control problems of distributed parameter systems]*, Vychisl. Tsentr Ross. Akad. Nauk, Moscow, 2001 (In Russ.), 120 c.

3. F. V. Lubyshev , A. R. Manapova, "[On some optimal control problems and their finite difference approximations and regularization for quasilinear elliptic equations with controls in the coefficients]", *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:3 (2007), 361–380 (In Russ.).

4. F. V. Lubyshev, A. R. Manapova, "[Difference approximations of optimization problems for semilinear elliptic equations in a convex domain with controls in the coefficients multiplying the highest derivatives]", *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:1 (2013), 8–33 (In Russ.).

[1]**Fedor F. Lubyshev**, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[2]**Aigul R. Manapova**, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8778-4917, aygulrm@mail.ru

5. F. V. Lubyshev, A. R. Manapova, M. E, Fairuzov, "[Approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions and with control in matching boundary conditions]", *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:11 (2014), 1700–1724 (In Russ.).

6. F. V. Lubyshev, M. E, Fairuzov, "[Approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and states and with controls in the coefficients multiplying the highest derivatives]", *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:7 (2016), 1238–1263 (In Russ.).

7. F. Lubyshev, A. Manapova, "Numerical solution of optimization problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions", *Applied Numerical Mathematics*, **104** (2016), 182–203.

8. F. V. Lubyshev and A. R. Manapova, "[On certain problems of optimal control and their approximations for some non-self-adjoint elliptic equations of the convection-diffusion type]", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. «Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.»*, **143** (2017), 3–23 (In Russ.).

9. A. A. Samarskij, *Teoriya raznostnykh skhem [Difference theory]*, Nauka, M., 1989 (In Russ.), 616 c.

10. N. T. Drenska, "[Accuracy of numerical algorithms for the one-dimensional problem of cooling metals in molds]", *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15 «Vychisl. Mat. Kibern.»*, 1981, № 4, 15–21 (In Russ.).

11. G. I. Marchuk, *[Adjoint equations and complex system analysis]*, Nauka, M., 1992 (In Russ.), 335 c.

12. H. Gajewski, K. Greger, K. Zacharias, *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen*, Akademie Verlag, Berlin, 1974, 281 c.

13. F. E. Browder, *[Transactions of the Symposium on Partial Differential Equations]*, Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1963.

14. O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1985 (In Russ.), 322 c.

15. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]*, Editorial URSS, Moscow, 2003 (In Russ.), 784 c.

Submitted 12.04.2019