

УДК 517.938.5, 512.721

О периодических данных отображения двумерного тора с одной седловой орбитой

© А. А. Босова¹, О. В. Починка²

Аннотация. Периодические данные диффеоморфизмов с регулярной динамикой на поверхностях изучались с помощью дзета-функции в серии уже классических работ таких авторов, как П. Бланшар, Дж. Фрэнкс, С. Нарасимхан, С. Баттерсон, Дж. Смилл и др. Описание периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей было дано в работе А. Безденежных и В. Гринеса посредством классификации периодических преобразований поверхности, полученных Дж. Нильсеном. В. Гринесом, О. Починкой, С. Ван Стриеном показано, что топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях основана на задаче вычисления периодических данных диффеоморфизмов с единственной седловой периодической орбитой. Именно, конструкция фильтрации для диффеоморфизмов Морса-Смейла позволяет свести задачу исследования периодических данных диффеоморфизма поверхности к задаче вычисления периодических данных диффеоморфизмов с единственной седловой периодической орбитой. Т. Медведевым, Е. Ноздриновой, О. Починкой эта проблема была решена в общей постановке, то есть по известному периоду стоковой и седловой орбиты вычислены периоды источниковых орбит. Однако, данные формулы не позволяют определить реализуемость полученных периодических данных на поверхности данного рода. Исчерпывающим образом задача реализуемости решена только на сфере. В настоящей работе установлены полный перечень периодических данных диффеоморфизмов двумерного тора с одной седловой орбитой, при условии, что хотя бы одна узловая точка отображения является неподвижной.

Ключевые слова: устойчивое и неустойчивое многообразие, седловая орбита

1. Введение

При изучении дискретных динамических систем, т. е. при изучении поведения орбит отображения f , определенных на данном компактном многообразии, важную роль играют периодические данные отображения. За последние сорок лет появилось много результатов, показывающих, что некоторые простые предположения о периодических данных системы приводят к глубоким выводам о ее глобальном поведении. Одним из наиболее известных результатов в этом направлении является эффект, обнаруженный А. Шарковским [1] — наличие у отображения отрезка орбиты периода три влечет хаос, выражающийся в существовании орбиты любого периода (см., например, [2]).

Наиболее полезными инструментами для доказательства существования неподвижных точек или, в более общем случае, периодических точек для непрерывного отображения f компактного многообразия, является теорема Лефшеца о неподвижной точке и ее обобщения (см., например, [3], [4]). Формула Лефшеца выражает число неподвижных точек

¹Босова Анна Александровна, студент, кафедра «Фундаментальная математика», НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1863-8398>, bossandboss@yandex.ru

²Починка Ольга Витальевна, заведующая лабораторией Топологических Методов в Динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, olga-pochinka@yandex.ru

эндоморфизма топологического пространства через следы соответствующих эндоморфизмов в группах гомологий, а дзета-функция связывает рост числа периодических орбит с глобальной топологической информацией о диффеоморфизмах.

Периодические данные диффеоморфизмов с регулярной динамикой на поверхностях изучались с помощью дзета-функции в серии уже классических работ таких авторов, как П. Бланшар [5], Дж. Фрэнкс, С. Нарасимхан [6], [7], С. Баттерсон, Дж. Смилл [8] и др. Описание периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей было дано в работе А. Безденежных и В. Гринеса в [9] посредством классификации периодических преобразований поверхности, полученных Дж. Нильсеном [10].

В работе В. Гринеса, О. Починки, С. Ван Стриена [11] было показано, что топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях основана на задаче вычисления периодических данных диффеоморфизмов с единственной седловой периодической орбитой. В статье Т. Медведева, Е. Ноздриновой, О. Починки [12] эта проблема была решена в общей постановке, то есть по известному периоду стоковой и седловой орбиты вычислены периоды источниковых орбит. Однако, данные формулы не позволяют определить реализуемость полученных периодических данных на поверхности данного рода. Исчерпывающим образом задача реализуемости решена только на сфере. Целью настоящей работы является установление полного списка периодических данных диффеоморфизмов тора с одной седловой орбитой, при условии, что хотя бы одна узловая точка отображения является неподвижной.

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g и $f : S_g \rightarrow S_g$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, который имеет конечное гиперболическое неблуждающее множество Ω_f . Из того, что диффеоморфизм имеет конечное неблуждающее множество следует, что любая точка $p \in \Omega_f$ является периодической. Пусть $per(p) \in \mathbb{N}$ — ее период.

Неподвижная точка p называется гиперболической, если среди собственных значений матриц Якоби, нет чисел по модулю равных 1. Точка p называется притягивающей или стоком, если все собственные значения матрицы Якоби меньше 1 по абсолютной величине. Точка p называется источниковой, если все собственные значения по модулю больше 1. Узловой точкой называется притягивающая или отталкивающая точка. Седловая точка (седло) — гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся узловой.

Чтобы получить классификацию гиперболических периодических точек, нужно применить предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{per(p)}$, для которого точка p является неподвижной. Устойчивое W_p^s и неустойчивое W_p^u многообразия периодической точки определяются следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in S_g : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{kper(p)}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in S_g : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-kper(p)}(x), p) = 0\}.$$

Инвариантное многообразие — это устойчивое или неустойчивое многообразие для гиперболической неподвижной или периодической точки p . Устойчивая (неустойчивая) сепаратриса — это компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$). Гиперболическая структура периодической точки приводит к тому, что W_p^u (W_p^s) диффеоморфно \mathbb{R}^{q_p} (\mathbb{R}^{2-q_p}), где q_p — число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших 1.

Периодическими данными орбиты \mathcal{O}_p называется тройка чисел (m_p, q_p, ν_p) , где $q_p = \dim W_p^u$, m_p — период точки p , а ν_p — тип ориентации точки p , равный $+1(-1)$ если $f^{m_p} |_{W_p^u}$

сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узловых точек равен $+1$, а у седла он может равняться либо $+1$, либо -1 .

Обозначим через G множество диффеоморфизмов $f : S_g \rightarrow S_g$, имеющих единственную седловую периодическую орбиту. Пусть G_1 и G_2 ($G = G_1 \cup G_2$) — множества диффеоморфизмов, тип ориентации седловой орбиты которых равен -1 и $+1$, соответственно.

Согласно работе [12] неблуждающее множество иффеоморфизмов класса G имеет следующую структуру.

Предложение 2.1 ([12], Теорема 1)

1. Неблуждающее множество каждого диффеоморфизма $f \in G_1$ состоит из одной седловой орбиты, одной стоковой орбиты и одной источниковой орбиты.

2. Неблуждающее множество каждого диффеоморфизма $f \in G_2$ состоит из одной седловой орбиты и трех узловых орбит (одной стоковой и двух источниковых или один источник и два стока).

Будем обозначать через \mathcal{O}_σ единственную седловую орбиту диффеоморфизмов класса G . Пусть \mathcal{O}_ω и \mathcal{O}_α обозначают стоковую и источниковую орбиту диффеоморфизма $f \in G_1$. Если диффеоморфизм $f \in G_2$, то мы предполагаем, что он имеет единственную стоковую орбиту \mathcal{O}_ω и две источниковые орбиты $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}$ (в противном случае мы рассматриваем обратный диффеоморфизм f^{-1}).

Пусть $f \in G$. Хорошо известно, что эйлерова характеристика ориентируемой поверхности задается формулой:

$$\chi(S_g) = 2 - 2g,$$

где g — род поверхности (см., например, [13], [14]). С другой стороны, в силу [15], многообразия S_g является двумерным клеточным комплексом

$$S_g = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u,$$

где число c_2 двумерных клеток равно числу источниковых точек, число c_1 одномерных клеток равно числу седловых точек, число c_0 нульмерных клеток равно числу стоковых точек. Таким образом,

$$c_2 - c_1 + c_0 = 2 - 2g \quad (2.1)$$

Для $f \in G_1$ мы имеем

$$m_\alpha - m_\sigma + m_\omega = 2 - 2g \quad (2.2)$$

и для $f \in G_2$

$$m_{\alpha_1} + m_{\alpha_2} - m_\sigma + m_\omega = 2 - 2g \quad (2.3)$$

Обозначим (a, b) наибольший общий делитель натуральных чисел a, b и положим $(0, b) = b$.

Предложение 2.2 ([12], Теорема 2)

1. Каждый диффеоморфизм $f \in G_1$ имеет один из следующих наборов периодических данных:

- $m_\omega = 1, m_\sigma = 2g, m_\alpha = 1, g > 0$
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 2g + 1, m_\alpha = 2, g \geq 0$
- $m_\omega = 2, m_\sigma = 2g + 1, m_\alpha = 1, g \geq 0$.

2. Каждый диффеоморфизм $f \in G_2$ имеет следующие периодические данные:

$$\begin{aligned} m_\omega &= m, \quad m_\sigma = km, \\ m_{\alpha_1} &= (k, j + 1) \left(\frac{k}{(k, j+1)}, m \right), \\ m_{\alpha_2} &= (k, j) \left(\frac{k}{(k, j)}, m \right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

для некоторых натуральных чисел $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, k - 1\}$.

3. Полный перечень периодических данных диффеоморфизмов двумерного тора с одной седловой орбитой

В настоящей работе рассмотрены диффеоморфизмы, заданные на двумерном торе S_1 и имеющие по крайней одну неподвижную узловую орбиту. Обозначим через G^* введенный класс диффеоморфизмов. Положим $G_1^* = G^* \cap G_1, G_2^* = G^* \cap G_2$. Основным результатом работы являются следующие теоремы.

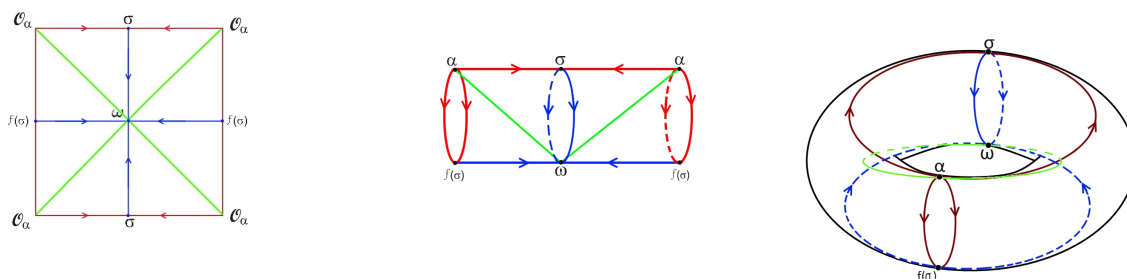
Т е о р е м а 3.1 *Каждый диффеоморфизм $f \in G_1^*$ имеет один из следующих наборов периодических данных:*

1. $m_\omega = 1, m_\sigma = 2, m_\alpha = 1$.
2. $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_\alpha = 2$.
3. $m_\omega = 2, m_\sigma = 3, m_\alpha = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 3.1 является непосредственным следствием формул 2.2 и 2.4, при подстановке в них значения $g = 1$.

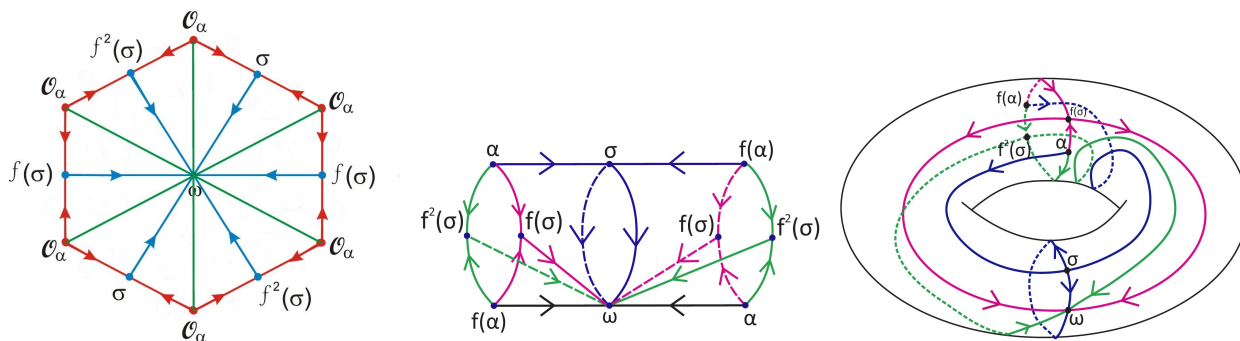
1. $m_\omega = 1, m_\sigma = 2, m_\alpha = 1$.
2. $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_\alpha = 2$.
3. $m_\omega = 2, m_\sigma = 3, m_\alpha = 1$.

На рис. 3.1-3.3 приведены фазовые портреты всех диффеоморфизмов из класса G_1^* , в виде развертки тора в многоугольник и на самом торе.



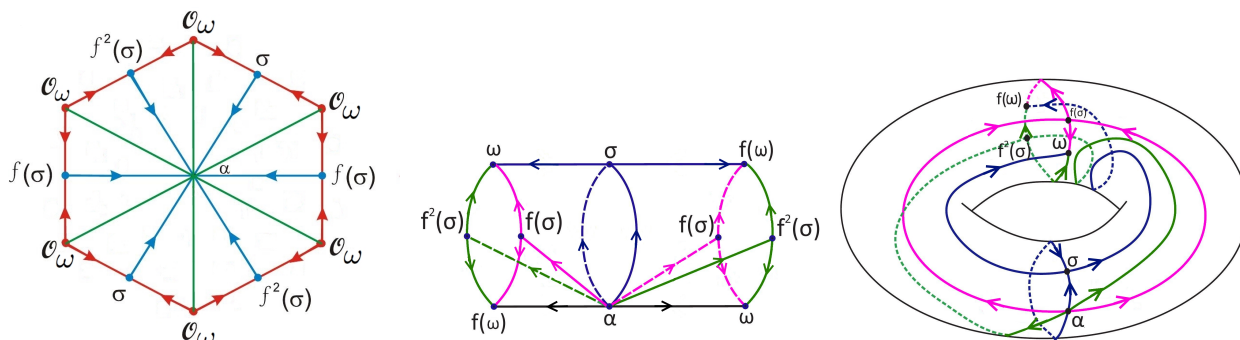
Р и с. 3.1

Диффеоморфизм из класса G_1^* с периодическими данными $m_\omega = 1, m_\sigma = 2, m_\alpha = 1$.



Р и с. 3.2

Диффеоморфизм из класса G_1^* с периодическими данными $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_\alpha = 2$.



Р и с. 3.3

Диффеоморфизм из класса G_1^* с периодическими данными $m_\omega = 2, m_\sigma = 3, m_\alpha = 1$.

Т е о р е м а 3.2 *Каждый диффеоморфизм $f \in G_2^*$ имеет один из следующих наборов периодических данных:*

1. $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2} = 1$.
2. $m_\omega = 1, m_\sigma = 4, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 2$.
3. $m_\omega = 1, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 3$.
4. $m_\omega = 3, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 1$.
5. $m_\omega = 2, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 3, m_{\alpha_2} = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия существования неподвижной узловой орбиты, наложенного на диффеоморфизмы класса G_2^* , следуют две возможности: 1) $m_\omega = 1$; 2) $m_{\alpha_2} = 1$. В случае 1), в силу формулы 2.5, мы имеем

$$\begin{aligned} m_\omega &= 1, \quad m_\sigma = k, \\ m_{\alpha_1} &= (k, j), \\ m_{\alpha_2} &= (k, j + 1), \end{aligned}$$

для $k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, k - 1\}$.

Из 2.3 следует, что

$$1 + (k, j) + (k, j + 1) - k = 0.$$

Откуда

$$(k, j) + (k, j + 1) = k - 1.$$

Поскольку числа (k, j) и $(k, j + 1)$ являются делителями k , то $(k, j) + (k, j + 1) \geq 2$ и, следовательно, $k \geq 3$. Так как $(k, j) + (k, j + 1) < k$, то $(k, j) < k$ и $(k, j + 1) < k$, то $j \neq 0, j \neq k - 1$. Поскольку числа (k, j) и $(k, j + 1)$ являются делителями k , строго меньшими k , то

$$(k, j) \leq \frac{k}{3}, (k, j + 1) \leq \frac{k}{2}.$$

Следовательно,

$$k - 1 = (k, j) + (k, j + 1) \leq \frac{k}{3} + \frac{k}{2},$$

$$k - 1 \leq \frac{5k}{6} \Rightarrow \frac{k}{6} \leq 1 \Rightarrow k \leq 6.$$

Учитывая, что $k \geq 3$ и $j \neq 0, j \neq k - 1$, получаем следующие наборы пар (k, j) :

- (3, 1),
- (4, 1), (4, 2),
- (5, 1), (5, 2), (5, 3),
- (6, 1), (6, 2), (6, 3).

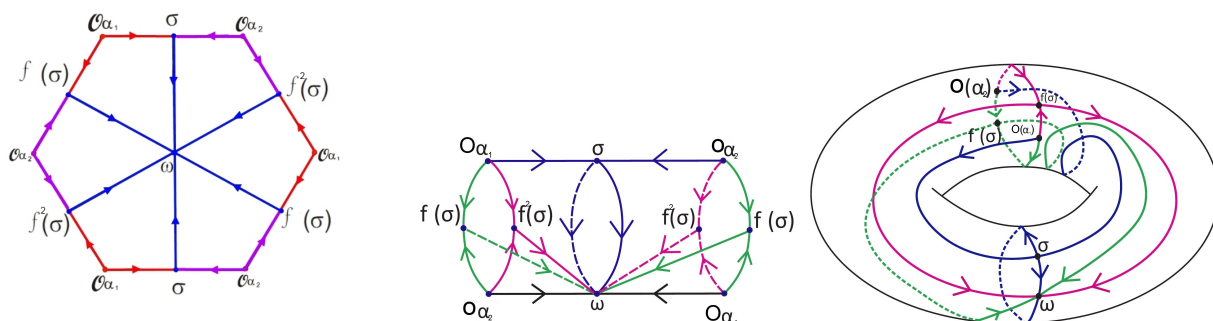
Непосредственной проверкой убеждаемся, что условию $(k, j) + (k, j + 1) = k - 1$ удовлетворят только три пары (k, j) :

- (3, 1),
- (4, 1),
- (6, 2).

Откуда получаются следующие наборы периодических данных:

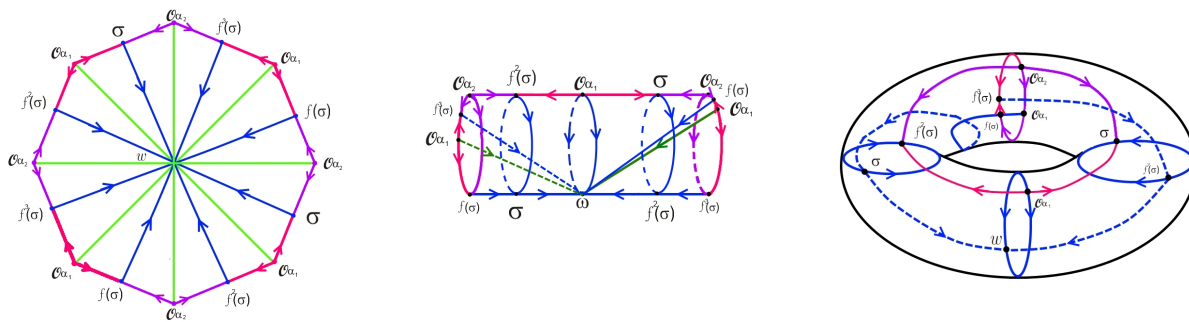
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2} = 1$;
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 4, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 2$;
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 3$.

На рис. 3.4–3.6 приведены фазовые портреты всех диффеоморфизмов из класса G_2^* в случае 1), в виде развертки тора в многоугольник и на самом торе.



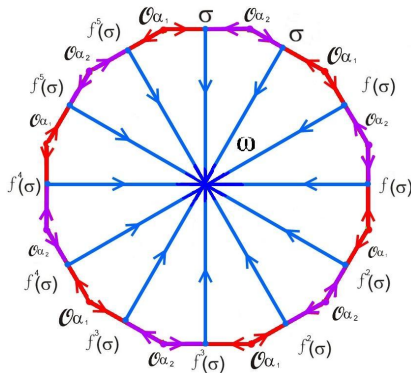
Р и с. 3.4

Диффеоморфизм из класса G_2^* с периодическими данными $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 1$.



Р и с. 3.5

Диффеоморфизм из класса G_2^* с периодическими данными $m_\omega = 1, m_\sigma = 4, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 2$.



Р и с. 3.6

Диффеоморфизм из класса G_2^* с периодическими данными $m_\omega = 1, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 3$.

Рассмотрим случай 2). В силу формулы 2.5, мы имеем

$$\begin{aligned}
 m_\omega &= m, \\
 m_\sigma &= mk, \\
 m_{\alpha_1} &= (k, j) \left(\frac{k}{(k, j)}, m \right), \\
 m_{\alpha_2} &= (k, j + 1) \left(\frac{k}{(k, j + 1)}, m \right) = 1,
 \end{aligned}$$

для $k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, k - 1\}$.

Из 2.3 следует, что

$$(k, j) \left(\frac{k}{(k, j)}, m \right) + 1 - mk + m = 0.$$

Покажем, что m и k взаимно простые.

Положим $A = (k, j + 1)$. Тогда $k = pA, j + 1 = qA$, где $(p, q) = 1$. Таким образом, $m_{\alpha_2} = AB$, где $B = (p, m)$. Так как $m_{\alpha_2} = AB = 1 \Rightarrow A = B = 1$. Отсюда следует, что

$$(k, j + 1) = 1, (k, m) = 1.$$

Тогда формула 2.3 приобретает вид

$$(k, j) = mk - m - 1.$$

Поскольку $(k, j) \leq k$, то $mk - m - 1 \leq k$ и, следовательно, $m(k - 1) \leq k + 1$. Из последнего равенства следует, что $k \neq 1$ и, таким образом,

$$m \leq \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}.$$

Поскольку $k \geq 2$, то $1 + \frac{2}{k-1} \leq 3$. Отсюда следует, что m может принимать значения 1, 2 или 3. Случай $m = 1$ был рассмотрен выше, рассмотрим оставшиеся два.

В случае $m = 2$ равенство 2.3 приобретает вид

$$(k, j) = 2k - 3.$$

Учитывая, что $(k, j) \leq k$, получаем, что $2k - 3 \leq k \Rightarrow k \leq 3$. Поскольку $k \geq 2$ и $(k, 2) = 1$, получаем следующие наборы пар (k, j) :

$$\begin{aligned} &(3, 0), \\ &(3, 1), \\ &(3, 2). \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условиям $(k, j) = 2k - 3, (k, j + 1) = 1$ удовлетворяют только одна пара (k, j) :

$$(3, 0).$$

Откуда получается следующий набор периодических данных:

- $m_\omega = 2, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 3, m_{\alpha_2} = 1$.

В случае $m = 3$ равенство 2.3 приобретает вид

$$(k, j) = 3k - 4.$$

Учитывая, что $(k, j) \leq k$, получаем, что $3k - 4 \leq k \Rightarrow k \leq 2$. Поскольку $k \geq 2$ и $(k, 3) = 1$, получаем следующие наборы пар (k, j) :

$$(2, 0), (2, 1).$$

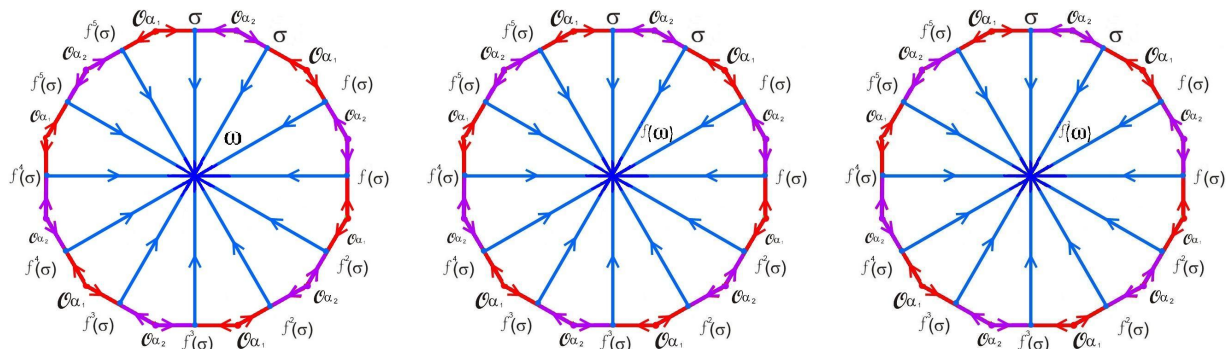
Непосредственной проверкой убеждаемся, что условиям $(k, j) = 3k - 4, (k, j + 1) = 1$ удовлетворяют только одна пара (k, j) :

$$(2, 0).$$

Откуда получается следующий набор периодических данных:

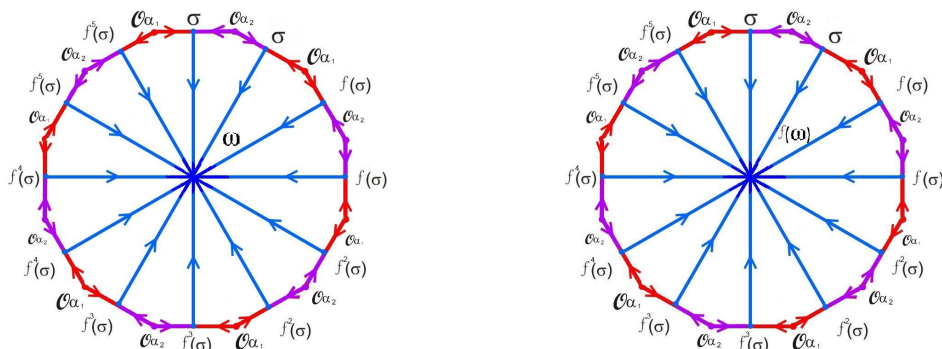
- $m_\omega = 3, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 1$.

На рисунках 3.7 и 3.8 приведены фазовые портреты G_2^* в случае 2), в виде развертки тора.



Р и с. 3.7

Диффеоморфизм из класса G_2^* с периодическими данными $m_\omega = 3, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 1$.



Р и с. 3.8

Диффеоморфизм из класса G_2^* с периодическими данными $m_\omega = 2, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 3, m_{\alpha_2} = 1$.

Благодарности. Результаты, касающиеся сохраняющих ориентацию седел выполнены при поддержке гранта РФФИ 17-11-01041, для меняющих ориентацию — в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ в 2019 году.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Н. Шарковский, “Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя”, *Украин. математ. журн.*, **16**:1 (1964), 61–71.
2. A. Li, J. Yorke., “Period three implies chaos.”, *Amer. Math. Monthly*, **82**:10 (1975), 985–992.
3. R. F. Brown., *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott, Foresman and Company, 1971.
4. J. Franks., *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 1982.
5. P. Blanchard., “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46.
6. J. Franks and C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Invent. Math.*, **48** (1978), 279–292.
7. C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms on compact surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **248** (1979), 145–169.

8. S. Batterson, J. Smillie., *Filtrations and periodic data on surfaces*, 1986, 234 p.
9. А. Н. Безденежных, В. З. Гринес., *Реализация градиентоподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий, Дифференциальные и интегральные уравнения*, Изд-во Горьковск. ун-та., 1985, 37 с.
10. J. Nielsen, “Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen”, *Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **15**:1 (1937), 65–102.
11. V. Grines, O. Pochinka S. Van Strien., “A complete topological classification of morse-smale diffeomorphisms on surfaces: a kind of kneading theory in dimension two”, *Cornell University Library, arXiv*, 2017.
12. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka., “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit.”, *Topology Proceedings. USA.*, **54** (2019), 49–68.
13. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016, 313 p.
14. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Ю. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко., *Введение в топологию*, Москва, Высшая школа, 1980, 416 с.
15. S. Smale, “Diferentiable dynamical systems.”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

Поступила 10.04.2019

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

On periodic mapping data of a two-dimensional torus with one saddle orbit

© A. A. Bosova¹, O. V. Pochinka²

Abstract. Periodic data of diffeomorphisms with regular dynamics on surfaces were studied using zeta functions in a series of already classical works by such authors as P. Blanchard, J. Franks, S. Narasimhan, S. Batterson and others. The description of periodic data for gradient-like diffeomorphisms of surfaces were given in the work of A. Bezdenezhnykh and V. Grines by means of the classification of periodic surface transformations obtained by J. Nielsen. V. Grines, O. Pochinka, S. Van Strien showed that the topological classification of arbitrary Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces is based on the problem of calculating periodic data of diffeomorphisms with a single saddle periodic orbit. Namely, the construction of filtering for Morse-Smale diffeomorphisms makes it possible to reduce the problem of studying periodic surface diffeomorphism data to the problem of calculating periodic diffeomorphism data with a single saddle periodic orbit. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka solved this problem in a general formulation, that is, the periods of source orbits are calculated from a known period of the sink and saddle orbits. However, these formulas do not allow to determine the feasibility of the obtained periodic data on the surface of this kind. In an exhaustive way, the realizability problem is solved only on a sphere. In this paper we establish a complete list of periodic data of diffeomorphisms of a two-dimensional torus with one saddle orbit, provided that at least one nodal point of the map is fixed.

Key Words: stable and unstable manifolds, saddle orbit

¹**Anna A. Bosova**, student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1863-8398>, bossandboss@yandex.ru

²**Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, olga-pochinka@yandex.ru

REFERENCES

1. A. N. Sharkovsky, “Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself”, *Ukraine. math journals*, **16**:1 (1964), 61-71 (In Russ.).
2. A. Li, J. Yorke., “Period three implies chaos.”, *Amer. Math. Monthly*, **82**:10 (1975), 985-992 (In Eng.).
3. Robert F. Brown., *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott, Foresman and Company, 1971 (In Eng.)
4. J. Franks., *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 1982 (In Eng.)
5. P. Blanchard., “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46 (In Eng.).
6. J. Franks and C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Invent. Math.*, **48** (1978), 279–292 (In Eng.).
7. C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms on compact surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **248** (1979), 145–169 (In Eng.).
8. S. Batterson, J. Smillie., *Filtrations and periodic data on surfaces*, 1986 (In Eng.), 234 p.
9. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, *Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds*, *Inte-gral’nyi Uravn., Gor’kij Gos. Univ*, 1985 (In Russ.), 37 p.
10. J. Nielsen, “Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen”, *Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk*, **15**:1 (1937), 65–102 (In Deu.).
11. V. Grines, O. Pochinka S. Van Strien., “A complete topological classification of morse-smale diffeomorphisms on surfaces: a kind of kneading theory in dimension two”, *Cornell University Library, arXiv*, 2017 (In Eng.).
12. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka., “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit.”, *Topology Proceedings. USA.*, **54** (2019), 49–68 (In Eng.).
13. V. Grines , T. Medvedev , O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016 (In Eng.), 313 p.
14. Yu. G. Borisovich, N. M. Bliznyakov, T. N. Fomenko, Y. A. Izrailevich, *Introduction to Topology*, Moscow, High School, 1980 (In Russ.), 416 p.
15. S. Smale, “Diferentiable dynamical systems.”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817 (In Eng.).

Submitted 10.04.2019