Математическое моделирование и информатика

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.89-110

УДК 519.6, 519.865.1

Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса

© В. К. Горбунов[1], А. Г. Львов[2]

Аннотация. Обратная задача теории рыночного спроса заключается в построении коллективной функции полезности по конечному набору данных торговой статистики. Основная вычислительная проблема в данном случае – решение систем линейных неравенств Африата, определяющих значения функции полезности и множителя Лагранжа задачи максимизации функции полезности на статистических данных о спросе, называемые «числами Африата». Данная обратная задача некорректно поставлена ввиду множественности решений неравенств, их возможной несовместности и неустойчивости. Предложен метод регуляризации, заключающийся в релаксации неравенств, обеспечивающей локальную хаусдорфову непрерывность множества их решений, и введении различных критериев отбора решений, формализующих желаемые характеристики аналитических индексов спроса, определяемых функцией полезности Африата: оптимизм, пессимизм, объективность. Приводятся результаты построения аналитических индексов для реальных данных Ульяновской области.

Ключевые слова: обратная задача теории рыночного спроса, аналитические индексы, неравенства Африата, методы регуляризации, релаксация неравенств.

1. Введение: обратная задача и индексы рыночного спроса

1.1. О теории рыночного спроса

Современная неоклассическая экономическая теория построена в рамках методологического индивидуализма, согласно которому общественное поведение полностью сводится к поведению независимых и рациональных индивидов (акторов), и экономическая система не нуждается в регулировании и управлении государством. При этом игнорируется взаимовлияние индивидов, возникновение коалиций разных типов и отрицается несводимость социальных явлений (рынок, стоимость) к сумме действий независимых индивидов. В рамках этой методологии построена математическая теория индивидуального потребителя [1], но на этой основе оказалось невозможным построение научной теории коллективного рыночного спроса – объекта реального экономического интереса.

Статья написана на основе доклада на VIII Международной научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, г. Саранск, 16–20 июля 2018 г.

[1]**Горбунов Владимир Константинович**, профессор кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5276-0501, vkgorbunov@mail.ru

[2]**Львов Александр Геннадьевич**, доцент кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), кандидат экономических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6726-8234, aglvov@mail.ru

Теория рыночного спроса, адекватная реальности, построена в работах В. К. Горбунова [2–4] на иной – холистической (целостностной) – методологической основе. Эта теория формально повторяет теорию индивидуального спроса [1], но относится не к индивиду/домохозяйству с нереальными свойствами, а к *статистическому ансамблю потребителей* (п. 1.4 в [4]) реального рынка n благ, представленному торговой статистикой количества продаж $x^t \in E^n_+$, цен $p^t \in E^{n*}_+$ (сопряженное пространство) и расходов e_t за отчетные периоды t:

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0,T}\right\}, \quad e_t = \left\langle p^t, x^t \right\rangle. \tag{1.1}$$

Коллективная рациональность моделируется задачей максимизации непрерывной, возрастающей и вогнутой *порядковой коллективной функции полезности* $u(x)$, $x \in E^n_+$, представляющей *потребительские предпочтения*, на множестве благ, доступных при ценах p и расходах e всех потребителей:

$$\max\{u(x) : \langle p, x\rangle \leq e, x \geq 0\}. \tag{1.2}$$

Важную роль в теории спроса и аналитических индексов играет множитель Лагранжа этой задачи выпуклого программирования $\lambda(p, e)$.

Теория рыночного спроса представляет собой систему экономически содержательных теорем (утверждений), получаемых в результате анализа регулярной модели (1.2), когда функция полезности $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемая, возрастающая и строго квазивогнутая. В этом случае решение задачи (1.2) единственно, и его зависимость от параметров $x(p, e)$ – непрерывная и дифференцируемая *функция спроса*. **Обратная задача теории спроса** заключается в построении функции полезности по конечному набору данных (1.1).

Функциональные обратные задачи математического моделирования обычно некорректно поставлены [5]. Множество их приближенных решений, эквивалентных относительно возможных вариаций исходных данных, чрезмерно велико по диаметру. Они являются по существу предзадачами, требующими доопределения (регуляризации) до новой, корректно поставленной (возможно, в ослабленном смысле) задачи с привлечением дополнительной информации о решении и, если они имеются, о погрешностях данных [5–7].

Особенностью обратных задач экономики является, как правило, отсутствие надежных оценок погрешностей данных, играющих ключевую роль в теории и большинстве методов регуляризации задач естествознания. В обратных задачах экономики под регуляризацией может пониматься переход к новой задаче, решение которой устойчиво к малым возмущениям исходных данных, приближенно удовлетворяет исходным соотношениям (балансам, ресурсным ограничениям, условиям рациональности) и удовлетворяет дополнительным требованиям. В качестве дополнительной информации для выделения решения обратной задачи теории рыночного спроса с желаемыми свойствами мы используем **индексы рыночного спроса**, которые являются важными индикаторами состояния потребительских рынков и экономики в целом.

1.2. Об индексах спроса

Существует множество подходов к построению индексов спроса [8–13], которые дают различные результаты, и в большинстве подходов не учитываются предпочтения людей, по-разному оценивающих ситуацию на потребительских рынках. Это позволяет подбирать индексы в зависимости от политических целей экономического анализа [9]. До настоящего времени статистические органы используют в основном бинарные индексы, вычисляемые по различным формулам и статистическим парам «цена-количество» продаж в двух сравниваемых периодах: базовом (p^s, x^s) и текущем (p^t, x^t). Наиболее распространенными на практике и используемыми в нашем исследовании являются формульные индексы цен и количества Е. Ласпейреса, и М. Пааше:

$$P_{st}^L = \frac{\langle p^t, x^s\rangle}{\langle p^s, x^s\rangle}, \quad Q_{st}^L = \frac{\langle p^s, x^t\rangle}{\langle p^s, x^s\rangle} \quad \text{и} \quad P_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t\rangle}{\langle p^s, x^t\rangle}, \quad Q_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t\rangle}{\langle p^t, x^s\rangle}. \tag{1.3}$$

Индексы Пааше часто дают заниженные значения относительно индексов Ласпейреса:

$$P_{st}^P \le P_{st}^L, \quad Q_{st}^P \le Q_{st}^L. \tag{1.4}$$

Этот эффект носит имя американского статистика А. Гершенкрона. В случае однородных предпочтений эффект Гершенкрона является обязательным (п. 5.4.3 в [4]). В качестве усреднения индексов Ласпейреса и Пааше были введены *индексы Фишера*:

$$P_{st}^F = \sqrt{P_{st}^L P_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^t, x^s\rangle}{\langle p^s, x^s\rangle}\frac{\langle p^t, x^t\rangle}{\langle p^s, x^t\rangle}}, \quad Q_{st}^F = \sqrt{Q_{st}^L Q_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^s, x^t\rangle}{\langle p^s, x^s\rangle}\frac{\langle p^t, x^t\rangle}{\langle p^t, x^s\rangle}}. \tag{1.5}$$

В нашем исследовании выбор решения обратной задачи рыночного спроса определяется *аналитическими индексами цен и количества*, называемыми также *экономическими индексами* (п. 7.4 в [3]; п. 5.4 в [4]; [8–11]). Идея этих индексов восходит к работе А. А. Конюса 1924 г. [14], где он построил «истинный индекс стоимости жизни» (ИСЖ) с учетом потребительских предпочтений, представляемых семейством поверхностей безразличия. В современном представлении аналитические индексы определяются через *функцию потребительских расходов*, определяющую наименьшую стоимость набора благ, обеспечивающего уровень потребления $w = u(x*)$, где $x*$ – некоторый референтный набор:

$$e(p, w) = \min\left\{\langle p, x\rangle : u(x) \ge w, x \ge 0\right\}. \tag{1.6}$$

Экономическими (аналитическими, Конюса) индексами изменения цен и количеств потребления между периодами сравнения – «базового» s и «текущего» t – называются [10], соответственно, отношения

$$P(p^t, p^s; x) = \frac{e(p^t, u(x))}{e(p^s, u(x))}, \quad Q(x^t, x^s; p) = \frac{e(p, u(x^t))}{e(p, u(x^s))}. \tag{1.7}$$

Здесь векторы количеств x и цен p определяют произвольные "ситуации сравнения".

Для построения аналитических индексов далее используются значения на статистических данных (1.1) функции полезности $u_t = u(x^t)$ и множителя Лагранжа $\lambda_t = \lambda(p^t, e_t)$, называемые **числами Африата** [2].

Для теории спроса и аналитических индексов важен частный случай **однородных (гомотетичных) предпочтений**[3]. Известно (Ex. 3.C.5 в [1]), что потребительские предпочтения однородны тогда и только тогда, когда они имеют представление **линейно однородной функцией полезности** $u(\cdot)$. В этом случае спрос имеет структуру $x\,(p, e) = x\,(p)\,e$, множитель Лагранжа $\lambda\,(p) = u\,(x(p))$, и справедливо тождество (пп. 3.4 и 4.1.4 в [4])

$$e(p, u(x)) = \frac{u(x)}{\lambda(p)}, \quad p > 0, x > 0. \tag{1.8}$$

[3]Однородность (гомотетичность) потребительских предпочтений определяется через понятие эквивалентности наборов благ (sec. 3.B в [1]; п. 3.1 в [4]). Наборы x и x' эквивалентны, если $u(x) = u(x')$, и однородность предпочтений означает, что при масштабировании этих наборов с одинаковым коэффициентом эквивалентность сохраняется: $u(\alpha x) = u(\alpha x'), \alpha > 0$. Функция $u(\cdot)$ называется линейно однородной, если$u(\alpha x) = \alpha u(x), \alpha > 0$.

Подстановка статистических значений (p^t, x^t) в это тождество дает связь чисел Африата при однородных предпочтениях:

$$u_t = \lambda_t e_t, \quad t = \overline{0,T}. \tag{1.9}$$

Соответствующие числа $\{u_t\}$ и $\{\lambda_t\}$ будем называть *однородно сопряженными*.

Из тождества (1.8) следует, что индексы (1.7) не зависят от наборов сравнения x и p:

$$P\left(p^t, p^s; x\right) = \frac{\lambda\left(p^s\right)}{\lambda\left(p^t\right)} \equiv \frac{\lambda_s}{\lambda_t} \triangleq P_{st}, \quad Q\left(x^t, x^s; p\right) = \frac{u\left(x^t\right)}{u\left(x^s\right)} \equiv \frac{u_t}{u_s} \triangleq Q_{st}. \tag{1.10}$$

По причине этой независимости индексы (1.10) названы в [10] *инвариантными*.

Структура однородного спроса $x\left(p, e\right) = x\left(p\right) e$ плохо отражает реальный спрос. Здесь исключается изменение пропорций потребления благ различной потребительской ценности с изменением доходов потребителей[4]. Однако простота однородного спроса и инвариантных индексов (1.10), определяемых только числами Африата, стимулирует использование гипотезы однородности предпочтений как приближение реальности – **аналог линеаризации** нелинейных процессов. Кроме того, эта гипотеза часто не отвергается при обработке агрегированных данных (1.1). Таким образом, несмотря на чрезмерную в общем случае идеализацию предположения однородности предпочтений, этот вариант моделирования рыночного спроса полезен как приближение, облегчающее решение обратной задачи рыночного спроса и построение общих аналитических индексов (1.7).

В [2] введены и в [12, 13] построены для реальных данных *квазиинвариантные индексы* цен и количества, вычисляемые по числам Африата $\{u_t, \lambda_t\}$:

$$\widetilde{P}_{st} = \sqrt{\frac{u_s \lambda_s e_t}{u_t \lambda_t e_s}}, \quad \widetilde{Q}_{st} = \sqrt{\frac{u_t \lambda_t e_t}{u_s \lambda_s e_s}}. \tag{1.11}$$

Подстановка равенств (1.9) в формулы (1.11) показывает, что квазиинвариантные индексы являются эвристическим обобщением инвариантных индексов (1.10) на случай неоднородных предпочтений. Квазиинвариантные индексы могут быть полезным промежуточным инструментом перехода от инвариантных к общим аналитическим индексам.

До настоящего времени аналитические индексы не использовались статистическими службами, так как они не имели научного обоснования из-за отсутствия теории коллективного рыночного спроса. Холистическая теория рыночного спроса [2–4] обеспечивает аналитическим индексам «экономическую легитимность».

1.3. О непараметрическом анализе спроса

Наиболее эффективным методом построения функции полезности по статистике потребления является *непараметрический анализ спроса*, разработанный (в рамках теории индивидуального спроса) в основном С. Африатом [15–16] и Х. Вэрианом [17–18]. Основная вычислительная проблема здесь – решение систем линейных **неравенств Африата**, определяющих числа Африата. Некорректность задачи построения функции полезности проявляется в множественности решений неравенств Африата, их возможной несовместности и неустойчивости. Это требует стабилизации множества приближенных решений неравенств Африата и введения критерия отбора решения с уточняемыми свойствами. Однако Африат и Вэриан ограничились разработкой алгоритмов комбинаторного типа,

[4]На нереалистичность гипотезы однородности для реального спроса и необходимость развития метода общих индексов (1.7) обращали внимание П. Самуэльсон и С. Свэми: «...the Santa Claus hypothesis of homotheticity...» [10, c. 592].

определяющих в совместном случае некоторое решение, без какого-либо обсуждения альтернативного выбора решений. Их последователи развивали метод линейного программирования (ЛП), вводя искусственные переменные в каждое неравенство [19] или одну общую переменную, обеспечивающую совместность всей системы неравенств [20]. В обоих случаях ставилась задача минимальной коррекции, также приводящая к некоторому решению минимально возмущенных систем без какого-либо экономически содержательного обоснования и внимания к типичной неустойчивости таких задач.

Первым методом решения систем неравенств Африата, преодолевающим проблему их неустойчивости и построения приближенного решения с ориентацией на наиболее эффективные статистические индексы спроса Фишера, является статья В. К. Горбунова [21]. В ней был предложен релаксационно-штрафной (РШ) метод класса квадратичного программирования (КП), основанный на однопараметрической релаксации неравенств Африата и выборе решения, ближайшего к набору чисел Африата, определяемого через индексы Фишера. В [12–13] РШ метод реализован для построения инвариантных и квазиинвариантных индексов продуктовых рынков. Основная часть нашей статьи посвящена развитию этого подхода с целью выбора различных по содержательным характеристикам и устойчивых решений неравенств Африата, а также построения общих аналитических индексов (1.7) для реальных данных Ульяновской области.

2. Непараметрический анализ спроса

2.1. Неравенства Африата и их редукция

Непараметрический анализ потребительского спроса Африата-Вэриана разработан с целью выяснения ответа на вопрос, является ли статистика потребления (1.1) совместимой с неоклассической моделью потребительского выбора (1.2) в наиболее общем классе *ненасыщаемых функций полезности*[5]? Основатели считали статистику идеальной и данный вопрос свели к вопросу существования ненасыщаемой функции полезности $u(\cdot)$, **рационализирующей** данные (1.1) в смысле

$$u\left(x^t\right) = \max\left\{u\left(x\right) : \left\langle p^t, x\right\rangle \leq e_t, x \geq 0\right\}, \quad t = \overline{0,T}.$$

Введем перекрестные стоимости и элементы **матрицы Африата**

$$e_{ts} = \left\langle p^t, x^s\right\rangle, \quad a_{ts} = e_{ts} - e_t, \quad s,t = \overline{0,T}. \tag{2.1}$$

Согласно **теореме Африата** (п. 8.3.1 в [3]; п. 6.2.1 в [4]; [17, с. 946]) критерием существования ненасыщаемой функции полезности, рационализирующей данные (1.1), является положительная разрешимость системы ***неравенств Африата***

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leq 0, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \neq t. \tag{2.2}$$

Более того, если $\{u_\tau > 0, \lambda_\tau > 0\}$ – решение системы (2.2), то ***функция Африата***

$$\bar{u}(x) = \min_\tau\{u_\tau + \lambda_\tau \left\langle p^\tau, x - x^\tau\right\rangle\} \tag{2.3}$$

рационализирует данные (1.1) и является вогнутой интерполянтой таблицы значений $\{x_t, u_t : t = \overline{0,T}\}$: $\bar{u}(x^t) = u_t$. Другими словами рационализируемость торговой статистики

[5]Функция полезности $u(\cdot)$ называется ненасыщаемой, если в любой окрестности точки $x \in E^n_+$ существует такая точка $x' \in E^n_+$, что $u(x') > u(x)$.

в широком классе ненасыщаемых функций полезности эквивалентна рационализируемости в более удобном классе вогнутых функций полезности.

Система (2.2) состоит из $T(T+1)$ трехкомпонентных неравенств, связывающих $2T+2$ числа Африата $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{0,T}\}$, и является разряженной системой «высокого типа». Эта система алгебраически однородна, u-числа входят в неравенства разностями $u_s - u_t$, и на ее решения $\{u_\tau, \lambda_\tau\}$ удобно наложить два условия [21]:

$$\lambda_0 = 1, \quad u_0 = e_0. \tag{2.4}$$

Подстановка данных условий в неравенства (2.2) при $s = 0$ и $t = 0$ делает эту систему неоднородной относительно переменных $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1,T}\}$:

$$\begin{cases} e_0 - \lambda_t a_{t0} \le u_t, \quad u_s \le e_0 + a_{0s} \equiv e_{0s}, \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge\ s \ne t\ . \end{cases} \tag{2.5}$$

Будем называть (2.5) *общей редуцированной системой Африата.*

2.2. Однородные предпочтения. Специальная система Африата

Условия рационализируемости статистики (1.1) при дополнительном предположении однородности, когда выполняются равенства (1.9), позволяют получить из общей системы трехкомпонентных неравенств Африата (2.2) две системы двухкомпонентных неравенств Африата, связывающих только u-числа или λ-числа. Можно ограничиться одной из них, и обычно рассматривается *специальная λ-система*

$$\lambda_s e_s \le \lambda_t e_{ts}, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \tag{2.6}$$

Любое решение этой системы $\{\lambda_t > 0\}$ определяет по формуле (1.9) однородно сопряженные компоненты $\{u_t > 0\}$ решения общей системы (2.2).

В дальнейшем рассматривается *специальная редуцированная λ-система*, получаемая из системы (2.6) подстановкой условия из (2.4) $\lambda_0 = 1$:

$$e_0 \le \lambda_t e_{t0}, \quad e_s\lambda_s \le e_{0s}, \quad \lambda_s e_s \le \lambda_t e_{ts}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \ne t. \tag{2.7}$$

Первые блоки в (2.7) запишем как двусторонние оценки λ-чисел:

$$\frac{e_0}{e_{t0}} \le \lambda_t \le \frac{e_{0t}}{e_t}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{2.8}$$

Из этих оценок и равенств (1.9) следуют оценки однородно-сопряженных u-чисел:

$$\frac{e_0 e_t}{e_{t0}} \le u_t \le e_{0t}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{2.9}$$

Двусторонние оценки (2.8) и (2.9), выполняемые при однородных предпочтениях, ввиду положительности стоимостей e_t и e_{st} обеспечивают требуемую положительность решений специальных систем.

2.3. Вычисление функции потребительских расходов

Рационализирующая кусочно-линейная функция полезности Африата (2.3) недифференцируема и порождает многозначный спрос, не отражающий аналитическую теорию спроса. Однако эта функция делает задачу (1.6) вычисления потребительских расходов $e(p,w)$ простой задачей линейного программирования (ЛП). Рассмотрим данную задачу с функцией (2.3), где числа Африата удовлетворяют системе (2.4) и (2.5).

Условия минимизации в (1.6), очевидно, эквивалентны системе линейных неравенств

$$\left\langle p^0, x\right\rangle \geq w, \quad \lambda_\tau \left\langle p^\tau, x\right\rangle \geq w - u_\tau + \lambda_\tau e_\tau, \quad \tau = \overline{1,T}, \quad x \geq 0. \tag{2.10}$$

Эта система совместна при любых наборах чисел $\{u_\tau > 0, \lambda_\tau > 0\}$ и нетривиальных векторах цен $\{p^t \geq 0\}$, и вычисление $e(p,w)$ сводится к задаче ЛП – **минимизации по** x **функции** $\langle p, x\rangle$ **при условиях** (2.10)

$$e(p,w) = \min\left\{\langle p, x\rangle : (2.10)\right\} \tag{2.11}$$

Данная задача разрешима в силу неотрицательности минимизируемой функции.

3. Некоторые сведения об индексах спроса

3.1. Тесты Фишера

Для объективной оценки качества различных индексов И. Фишером предложена система *тестов* [8–11]. Смысл этих тестов сводится к установлению соответствия свойств произвольных индексов цен и количеств

$$\overline{P}_{st} = \overline{P}(p^s, x^s; p^t, x^t), \quad \overline{Q}_{st} = \overline{Q}(p^s, x^s; p^t, x^t)$$

свойствам *элементарных индексов цен и количества*:

$$\pi_i^{st} = \frac{p_i^t}{p_i^s}, \quad \chi_i^{st} = \frac{x_i^t}{x_i^s}.$$

Проблемным является совмещение следующих наиболее важных тестов: *транзитивности* (или *циркулярности*: для любых трех наблюдений (r,s,t) выполняется $\overline{P}_{rt} = \overline{P}_{rs} \cdot \overline{P}_{st}$ и $\overline{Q}_{rt} = \overline{Q}_{rs} \cdot \overline{Q}_{st}$), *мультипликативности* $\left(\overline{P}_{st} \cdot \overline{Q}_{st} = e_t/e_s\right)$ и *среднего*:

$$\min_i \pi_i^{\mathrm{st}} \leq \overline{P}_{st} \leq \max_i \pi_i^{\mathrm{st}}, \quad \min_i \chi_i^{\mathrm{st}} \leq \overline{Q}_{st} \leq \max_i \chi_i^{\mathrm{st}}. \tag{3.1}$$

Известно (см. п. 7.3 в [3]), что индексы Ласпейреса и Пааше удовлетворяют из перечисленных тестов только тесту среднего (3.1). Известно также, что никакие формульные индексы не могут удовлетворять совокупности этих тестов для произвольных статистик (3.1). Индексы Фишера (1.5) удовлетворяют всем основным тестам, кроме транзитивности. Они также удовлетворяют тесту *обратимости*:

$$P_{ts}^F = 1/P_{st}^F, \quad Q_{ts}^F = 1/Q_{st}^F.$$

Индексы Фишера являются лучшими формульными индексами относительно выполнения тестов и названы Фишером «идеальными индексами». Однако свойство транзитивности желательно и достижимо. Оно очевидно выполняется для общих аналитических индексов (1.7) с произвольными ситуациями сравнения и для инвариантных индексов (1.10). Последние удовлетворяют всем основным тестам и достойны названия **идеальных индексов**.

Нетрудно проверить, что квазиинвариантные индексы (1.11) транзитивны и мультипликативны, но тест среднего (3.1) для них не гарантирован.

3.2. Индексы Конюса-Фишера

Для применения аналитических индексов к анализу конкретных данных (1.1) в качестве ситуаций сравнений в формулах (1.7) будем использовать значения количеств и цен для периодов s или t. Подставляя в (1.7) ситуации сравнения $x = x^s$, $p = p^s$, и используя очевидное свойство функции расходов (1.6)

$$e(p^\tau, u(x^\tau)) \equiv e(p^\tau, u_\tau) = \langle p^\tau, x^\tau \rangle = e_\tau,$$

получим *индексы Конюса-Ласпейреса*:

$$P_{st}^{KL} \triangleq P(p^t, p^s; x^s) = \frac{e(p^t, u_s)}{e_s}, \quad Q_{st}^{KL} \triangleq Q(x^t, x^s; p^s) = \frac{e(p^s, u_t)}{e_s}. \tag{3.2}$$

ИСЖ Конюса – это индекс цен P_{st}^{KL}. Аналогично определяются *индексы Конюса-Пааше*

$$P_{st}^{KP} \triangleq P(p^t, p^s; x^t) = \frac{e_t}{e(p^s, u_t)}, \quad Q_{st}^{KP} \triangleq Q(x^t, x^s; p^t) = \frac{e_t}{e(p^t, u_s)} \tag{3.3}$$

и среднегеометрические индексов (3.2) и (3.3) – *индексы Конюса-Фишера*:

$$P_{st}^{KF} \triangleq \sqrt{P_{st}^{KL} P_{st}^{KP}} = \sqrt{\frac{e(p^t, u_s) e_t}{e_s e(p^s, u_t)}}, \quad Q_{st}^{KF} \triangleq \sqrt{Q_{st}^{KL} Q_{st}^{KP}} = \sqrt{\frac{e(p^s, u_t) e_t}{e_s e(p^t, u_s)}}. \tag{3.4}$$

Задача построения индексов Конюса (3.2)–(3.3) сводится к определению значений условных расходов $e(p^t, u_s)$ и $e(p^s, u_t)$ как значений задачи (2.11) с параметрами $p = p^t$, $w = u_s$ и $p = p^s$, $w = u_t$ соответственно.

Нетрудно проверить, что индексы Конюса-Фишера (3.4) удовлетворяют тестам обратимости и мультипликативности.

4. Методы решения систем Африата

4.1. Известные методы

Сидней Африат после фундаментальной работы [15] ограничил теоретические исследования потребительского спроса случаем однородных предпочтений, объявив его «концептуальным базисом индекса цен» [16], не рассматривая индекс количества потребления. Он разработал в 1970-х гг. комбинаторные алгоритмы для решения λ-системы неравенств (2.6). Другие комбинаторные алгоритмы решения общей и специальной (как возможного варианта) систем Африата предложены Х. Вэрианом [17–18]. Для λ-системы (2.6) Вэриан приспособил алгоритм Варшалла, предназначенный для поиска пути минимальной стоимости между вершинами связного графа. Алгоритмы Африата, Вэриана и Варшалла определяют некоторые из множества решений неравенств без возможности содержательного выбора, необходимого для качественного решения обратной задачи и построения аналитических индексов. Подходы к решению общей системы Африата методом ЛП [19–20], основанные на введении искусственных переменных в неравенства, приводят к некоторым решениям исходной системы, которые, как и решения Африата и Вэриана, не имеют экономических характеристик и могут быть неустойчивыми.

Далее подход к выбору содержательного решения [21] развивается как набор инструментов устойчивого выбора решений систем Африата (специальной и общей) с желаемыми содержательными свойствами аналитических индексов: *оптимизм* (занижение индексов цен при завышении индексов количества), *пессимизм* (наоборот) и *объективность* – близость к индексам цен и количества Фишера.

4.2. Регуляризация множеств решений систем неравенств Африата

Задачи содержательного выбора решений неравенств Африата РШ метода [12–13], [21] и новые задачи, представленные далее, являются задачами на условный экстремум с допустимыми множествами решений редуцированных неравенств (2.5) и (2.7). Эти неравенства могут быть несовместными как в силу неадекватности исходной модели спроса (1.2) статистике (1.1), так и в силу неточностей этой статистики, определяющей коэффициенты (2.1). Если некоторая мера несовместности достаточно мала (экспертно), то гипотеза адекватности модели (1.2) с однородными (как первое приближение) или неоднородными предпочтениями не отвергается; можно применять некоторый метод регуляризации систем неравенств и вводить различные критерии отбора их решений с желаемыми свойствами. Ввиду отсутствия оценок погрешностей исходных данных (1.1), регуляризацию будем выполнять методами [6–7], обеспечивая, в общем случае локально, непрерывность по Хаусдорфу зависимости допустимого множества решений от данных[6].

Регулярность допустимого множества экстремальной задачи в метрическом пространстве означает *локальную хаусдорфову непрерывность* зависимости множества решений неравенств от исходных данных [6, с. 578–579], [7, с. 424]. Для множеств, определяемых нестрогими неравенствами непрерывных функций, регулярность обеспечивается, согласно лемме 1.4 из [22], ограниченностью этого множества и его совпадением с замыканием множества соответствующих строгих неравенств.

Для специальной системы (2.7) ограниченность в пространстве всех чисел Африата (λ и сопряженных u-чисел) обеспечивается двусторонними оценками (2.8) и (2.9). Для общей системы (2.5) имеются лишь верхние оценки u-чисел $u_s \leq e_{0s}$, но множители λ_t можно считать ограниченными некоторой величиной Λ, существенно превосходящей наибольшее верхнее ограничение e_{0t}/e_t в (2.8). При этом множество решений общей системы останется шире множества решений специальной системы, и желаемую характеристику анализа статистического спроса можно будет улучшить.

Таким образом, регулярность множеств решений систем Африата (2.5) и (2.7) обеспечивается их строгой совместностью, что соответствует условию Слейтера регулярности задач выпуклого программирования (ВП), и выполнением некоторой априорной оценки $\lambda_t \leq \Lambda$ для общей системы (2.5).

Согласно второму утверждению леммы 1.1 из [22], регулярность допустимого множества обеспечивает непрерывную зависимость значения экстремальной задачи от исходных данных, и если при этом пространство конечномерно и минимизируется строго выпуклый критерий, то задача корректна и ее решение непрерывно зависит от исходных данных (Cor. Theor. 1 в [6]).

Для выяснения регулярности систем Африата и, если установлена нерегулярность рассматриваемой системы, для перехода к близкой (в хаусдорфовой метрике) регулярной системе неравенств будем вводить в правые части неравенств аддитивный *малый параметр релаксации* r, аналогично РШ методу. Этот параметр будет представлять меру возмущения исходной системы неравенств. В обоих случаях, общем (2.5) и однородном (2.7), аддитивные компоненты неравенств имеют размерность стоимости благ e_t, которая меняется на периоде статистики T, обычно не выходя из числового порядка, но сильно варьируется для различных статистик. Для придания универсальности мере возмущения r нерегулярных систем перед релаксацией нормируем их так, чтобы все аддитивные компоненты общей системы (2.5), связывающей разномасштабные переменные λ_tи u_t, стали порядка

[6]Многозначное отображение $A(\cdot)$ из векторного пространства X в пространство Λ с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$ называется непрерывным по Хаусдорфу в точке x^0, если $h(A(x), A(x^0)) \to 0$ при $x \to x^0$, где $h(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$, $\beta(A,B) = \sup\{\inf\{\rho(a,b) : b \in B\} : a \in A\}$, $A \subseteq \Lambda$ и $B \subseteq \Lambda$.

единицы. Для этого неравенства первого блока в (2.5) (для $s = 0$) разделим на e_t, неравенства второго блока (для $t = 0$) – на e_s, а третьего блока – на $\sqrt{e_s e_t}$, после чего введем в правую часть параметр r и получим **общую редуцированную релаксированную нормированную систему Африата**:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_t}{e_t} - \lambda_t \dfrac{a_{t0}}{e_t} \le -\dfrac{e_0}{e_t} + r, \quad \dfrac{u_s}{e_s} \le \dfrac{e_{0s}}{e_s} + r, \\ \dfrac{u_s}{\sqrt{e_s e_t}} - \dfrac{u_t}{\sqrt{e_s e_t}} - \lambda_t \dfrac{a_{ts}}{\sqrt{e_s e_t}} \le r, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge \ s \neq t \ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Все аддитивные компоненты неравенств системы (4.1), кроме параметра r, имеют порядок единицы, и она совместна в области положительных чисел Африата при достаточно большом значении r. Если система (4.1) совместна при $r < 0$, то система (2.5) регулярна, так как является строго совместной. Если отрицательное r отделено от нуля существенно относительно уровня вычислительных погрешностей, то исходная система (2.5) может быть основой постановок устойчивых задач содержательного выбора решения без релаксации.

Выведем из общей системы (4.1) **специальную редуцированную нормированную релаксированную λ-систему Африата**, используя условие однородности $u_t = \lambda_t e_t$:

$$-\lambda_t \le -\frac{e_0}{e_{t0}} + \frac{e_t}{e_{t0}} r, \quad \lambda_s \le \frac{e_{0s}}{e_s} + r, \quad \lambda_s - \lambda_t \frac{e_{ts}}{e_s} \le \sqrt{\frac{e_t}{e_s}} r, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \tag{4.2}$$

Подобно редуцированной λ-системе (2.7), первые два блока системы (4.2) запишем как двусторонние оценки λ-чисел Африата:

$$\frac{e_0}{e_{t0}} - \frac{e_t}{e_{t0}} r \le \lambda_t \le \frac{e_{0t}}{e_t} + r, \quad t = \overline{1, T}. \tag{4.3}$$

При достаточно малых значениях параметра r нижняя оценка (4.3) будет положительной.

Специальная система (4.2) будет использоваться на первом этапе, результатом которого станет построение инвариантных индексов. Ее решение – положительные λ-числа и им сопряженные u-числа – может использоваться на втором этапе как начальное приближение для решения общей системы (4.1).

Системы (4.1) и (4.2) могут считаться допустимыми аппроксимациями исходных систем (2.5) и (2.7) при достаточно малых положительных значениях возмущения r , которые сравнимы с влиянием неточностей статистики (1.1) на решения. Для выявления совместности и регулярности исходных систем поставим задачи о минимальном значении параметра r, при котором релаксированные системы (4.1) и (4.2) совместны. Начнем с более простого варианта специальной λ-системы (4.2) в пространстве переменных $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, r\}$:

$$r_\lambda = \arg\min \{r : (4.2), \lambda \ge 0\} . \tag{4.4}$$

Данную задачу ЛП будем называть *специальной задачей минимальной релаксации*. Согласно леммам 1.1 и 1.4 из [22], допустимое множество этой задачи регулярно, и значение задачи r_λ непрерывно зависит от данных (1.1). Обозначим решение задачи (4.4) как $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r, r_\lambda)$. Если $r_\lambda \le 0$, то исходная система (2.7) совместна, набор множителей $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r)$ является одним из ее решений и, при $r_\lambda > 0$, – псевдорешений. Для этой части решения задачи (4.4) непрерывность зависимости от данных (1.1) не гарантирована и не обладает специальной экономической характеристикой. Соответственно, эти компоненты не должны использоваться для дальнейшего построения инвариантных индексов.

Аналогичную задачу поставим для общей релаксированной системы (4.1) в расширенном пространстве переменных $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, u_1, \ldots, u_T, r\}$:

$$r_{\lambda u} = \arg\min \{r : (4.1), \lambda \geq 0, u \geq 0\}. \tag{4.5}$$

Данную задачу ЛП будем называть *общей задачей минимальной релаксации*. Допустимое множество этой задачи также регулярно, и значение задачи $r_{\lambda u}$ непрерывно зависит от данных (1.1). Решение этой задачи обозначим $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r, u_1^r, \ldots, u_T^r, r_{\lambda u})$. Набор чисел Африата $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r, u_1^r, \ldots, u_T^r)$ при $r_{\lambda u} \leq 0$ является решением системы (2.5) и, при $r_{\lambda u} > 0$, – псевдорешением. Для этой части решения задачи (4.5) непрерывная зависимость от данных также не гарантирована, и она не имеет специальной экономической характеристики. Соответственно, эти компоненты не должны использоваться для дальнейшего построения аналитических индексов.

Специальная система (4.2) эквивалентна общей системе (4.1) с наложенным дополнительным условием однородности (1.9). Поэтому в случае совместности расширенное множество решений специальной системы (с сопряженными u-числами) является подмножеством решений общей системы. Следовательно, значения задач (4.5) и (4.4) связаны априорным соотношением $r_{\lambda u} \leq r_\lambda$.

Сверхрелаксация. Для экономически содержательных решений систем (4.1) и (4.2) далее поставлены экстремальные задачи, для которых эти системы определяют допустимые множества в соответствующих пространствах чисел Африата при закрепленном параметре релаксации r. Если этот параметр равен значению задачи минимальной релаксации (4.5) и (4.4) соответственно, то система (4.1) или (4.2) не будет иметь внутренних решений и может стать несовместной при сколь угодно малых возмущениях исходных данных. Поэтому параметр релаксации должен быть несколько больше, чем значение минимальной релаксации $r_{\lambda u}$ или r_λ, чтобы обеспечить как регулярность, так и практическую устойчивость допустимого множества. Положительную величину превышения минимальной релаксации назовем *сверхрелаксацией* и обозначим ρ. Соответственно, параметр релаксации будет принимать значения $r_{\lambda u}^\rho = r_{\lambda u} + \rho$ для системы (4.1) и $r_\lambda^\rho = r_\lambda + \rho$ для (4.2).

Параметр сверхрелаксации должен быть достаточно малым, чтобы вносимое им возмущение в решение не нарушало **принятую точность представления содержательного результата**. В нашем случае неравенства Африата и их решения – числа Африата – играют техническую роль инструмента вычисления функции потребительских расходов (2.11), через которую вычисляются аналитические индексы Конюса-Фишера (3.4), и инвариантные индексы (1.10) вычисляются непосредственно по числам Африата. Индексы спроса принято определять с точностью до десятых долей процента. Эта норма ограничивает абсолютную погрешность вычисления индексов величиной $\Delta = 0.001$.

Основное значение обычно придается индексу цен. Пусть это будет инвариантный индекс изменения цен на всем периоде $P_{0T}(r)$, вычисленный по некоторому решению λ-системы (4.2). В данном случае $P_{0T}(r) = \lambda_T^{-1}(r)$. Конечное возмущение (вариацию) этого индекса обозначим

$$\delta P_{0T}(r, \rho) \stackrel{\Delta}{=} P_{0T}(r + \rho) - P_{0T}(r). \tag{4.6}$$

Ввиду нерегулярности множества решения системы (4.2) при $r = r_\lambda$ будем вычислять вариацию (4.6) для значений $r = r_\lambda + \rho$, обеспечивающих регулярность этой системы, и определять параметр ρ из условий

$$|\delta P_{0T}(r_\lambda + \rho, \rho)| = |P_{0T}(r_\lambda + 2\rho) - P_{0T}(r_\lambda + \rho)| \leq \Delta, \quad |\delta P_{0T}(r_\lambda + \rho, \rho)| \approx \Delta. \tag{4.7}$$

Первое условие обеспечивает ограничение влияния сверхрелаксации $\rho > 0$ на конечный индекс цен P_{0T} в пределах погрешности Δ, и второе условие предупреждает выбор очень малой величины ρ, неэффективный относительно регуляризации множества допустимых решений.

Отдавая приоритет исходной системе (2.7), множество решений которой при $r_\lambda < 0$ имеет непустую внутренность, будем добавлять релаксационный параметр $r = r_\lambda + \rho$ только при $-\rho < r_\lambda$. При этом допустимое множество задач содержательного (псевдо) решения этой системы будет представляться системой (4.2) с параметром релаксации

$$r_\lambda^\rho = \begin{cases} 0, & r_\lambda \leq -\rho, \\ r_\lambda + \rho, & -\rho < r_\lambda. \end{cases} \tag{4.8}$$

Таким образом, **регулярное допустимое множество** задач содержательного псевдорешения или решения (при $r_\lambda^\rho = 0$) λ-системы (2.7) определяется системой неравенств

$$-\lambda_t e_{t0} \leq -e_0 + e_t r_\lambda^\rho, \quad \lambda_s e_s \leq e_{0s} + e_s r_\lambda^\rho, \quad \lambda_s e_s - \lambda_t e_{ts} \leq \sqrt{e_t e_s} r_\lambda^\rho, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \tag{4.9}$$

Допустимое множество задач содержательного выбора решений общей системы (2.5) аналогично однородному случаю (4.8)–(4.9) будет представляться системой (4.1) с параметром сверхрелаксации

$$r_{\lambda u}^\rho = \begin{cases} 0, & r_{\lambda u} \leq -\rho, \\ r_{\lambda u} + \rho, & -\rho < r_{\lambda u}, \end{cases} \tag{4.10}$$

и уровень сверхрелаксации ρ будет выбираться из условий, аналогичных (4.7) с использованием индекса цен Конюса-Фишера $P_{0T}^{KF}(r)$ вместо индекса $P_{0T}(r)$.

Таким образом, **регулярное допустимое множество** задач содержательного псевдорешения или решения (при $r_{\lambda u}^\rho = 0$) общей системы (2.5) определяется системой неравенств

$$\begin{cases} -u_t - \lambda_t a_{t0} \leq -e_{0s} + r_{\lambda u}^\rho e_t, \quad u_s \leq e_{0s} + r_{\lambda u}^\rho e_s, \\ \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leq r_{\lambda u}^\rho \sqrt{e_s e_t}, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge \ s \neq t, \end{cases} \tag{4.11}$$

с параметром релаксации (4.10).

4.3. Задачи содержательного выбора

Каждое решение специальной (4.9) или общей (4.11) системы Африата определяет по $T(T+1)$ пар индексов – инвариантных $\{P_{st}, Q_{st}\}$ или Конюса-Фишера $\{P_{st}^{KF}, Q_{st}^{KF}\}$, и эти индексы допускают множество вариантов целевых индикаторов социально-экономической динамики. Мы ограничиваемся в качестве основных индикаторов индексами, представляющими накопленные изменения цен и количеств за весь период наблюдений – (P_{0T}, Q_{0T}) или $(P_{0T}^{KF}, Q_{0T}^{KF})$. В силу мультипликативности эти индексы жестко связаны. Минимизация индекса цен одновременно максимизирует сопряженный ему индекс количества, что эквивалентно относительно достижения оптимистической оценки конечного состояния рынка, и наоборот. При этом можно также управлять поведением промежуточных индексов $\{P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF}\}$ различными способами, усложняя целевые функции и вводя дополнительные условия на выбор решений систем Африата.

Специальная система Африата. Начнем с λ-системы (4.9), разрешимость которой при достаточно малом значении минимальной релаксации (4.4) означает возможность построения инвариантных индексов$\{P_{0t}, Q_{0t}\}$. Эти индексы, определяющие качество решения системы (4.9), связаны с решениями простыми формулами $P_{0t} = \lambda_t^{-1}$ и $Q_{0t} = u_t/e_0$. При допустимом произвольном выборе решения можно ставить задачи минимизации или максимизации накопленного индекса цен P_{0T}, получая при этом максимальный или минимальный сопряженный индекс количества Q_{0T} и реализуя цель улучшения или ухудшения этих важных показателей социально-экономической динамики.

Первая однородная задача. Найти решение λ-системы (4.9) с максимальным значением множителя λ_T:

$$\lambda_T^{Max} = \arg\max \left\{ \lambda_T : (4.9) \right\}. \tag{4.12}$$

Эта задача ЛП обеспечивает минимальное значение индекса цен P_{0T} и максимальное значение индекса количества потребления Q_{0T}. Соответственно, решение $(\lambda_1^M, \ldots, \lambda_T^M)$ задачи (4.12) можно назвать **оптимистическим**.

Вторая однородная задача. Найти решение λ-системы (4.9) с минимальным значением множителя λ_T:

$$\lambda_T^{\min} = \arg\min \left\{ \lambda_T : (4.9) \right\} \tag{4.13}$$

Эта задача ЛП, в отличие от задачи (4.12), обеспечивает противоположные показатели социально-экономической динамики – максимальное значение индекса цен P_{0T} и минимальное значение индекса количества Q_{0T}. Соответственно, решение $(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_T^m)$ задачи (4.13) можно назвать **пессимистическим**.

В третьей задаче выбор решения системы (4.9) будем ориентировать на близость соответствующих инвариантных индексов цен набору бинарных индексов цен Фишера (1.5). Если составлять функционал – сумму квадратов разностей $P_{0t} - P_{0t}^F = \lambda_t^{-1} - P_{0t}^F$, то получим задачу нелинейного программирования (НП) с невыпуклым функционалом. Поставим более простую аналогичную задачу, заменив разности $P_{0t} - P_{0t}^F$ на разности обратных индексов $P_{t0} - P_{t0}^F = \lambda_t - P_{t0}^F$. При этом получим задачу класса КП.

Третья однородная задача. Найти решение λ-системы (4.9), для которого соответствующий набор *обратных инвариантных индексов цен* $\{P_{10}, \ldots, P_{T0}\}$ наиболее близок к набору *обратных индексов цен Фишера* $\left\{P_{10}^F, \ldots, P_{T0}^F\right\}$:

$$F_\lambda(\lambda) = \sum_{t=1}^{T} \left(\lambda_t - P_{t0}^F\right)^2. \tag{4.14}$$

Краткая форма третьей задачи:

$$F_\lambda^{\min} = \min \left\{ F_\lambda(\lambda) : (4.9) \right\}. \tag{4.15}$$

Целью задачи (4.15) является нахождение инвариантных индексов, наиболее близких к индексам Фишера, удовлетворяющим естественным критериям наилучшим образом, и этот вариант выбора решения можно считать **объективным**. Для данной задачи выполнены условия классической корректности из [9], приведенные в п. 4.2: регулярность допустимого множества (4.9) и строгая выпуклость функционала (4.14). Решение задачи $\left(\lambda_1^F, \ldots, \lambda_T^F\right)$ является проекцией «точки Фишера» $(P_{10}^F, \ldots, P_{T0}^F)$ на множество решений системы (4.9).

При решении задачи КП (4.15) для сокращения вычислений важно иметь хорошее приближение искомого решения. Таким приближением для общих алгоритмов НП будет точка Фишера, и для метода КП «активных наборов» [2], [12–13], стартующего с допустимой точки, можно использовать усреднение решений первых двух задач.

Общая система Африата. Задачи содержательного выбора решений общей системы (4.11), подобные задачам для специальной λ-системы (4.9) – минимизации (4.12) или максимизации (4.13) инвариантного индекса цен $P_{0T} = \lambda_T^{-1}$, а также задачи (4.15) о проекции точки Фишера – предполагают замену индексов $P_{0t} = \lambda_t^{-1}$ на индексы Конюса-Фишера $(P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF})$. Однако эти индексы определяются числами Африата не формулой, а алгоритмически, через значения $e\left(p^t, e_0\right)$ и $e\left(p^0, u_t\right)$ задачи ЛП (2.11). На данном этапе мы решаем более простые задачи, используя в функционалах вместо индексов Конюса-Фишера квазиинвариантные индексы:

$$\widetilde{P}_{0t} = \sqrt{\frac{e_t}{u_t\lambda_t}}, \qquad \widetilde{Q}_{0t} = \frac{\sqrt{u_t\lambda_t e_t}}{e_0}. \tag{4.16}$$

После решения поставленных далее задач по соответствующим числам Африата будут вычисляться индексы Конюса-Фишера $(P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF})$, которые мы принимаем за конечные показатели экономической динамики, отражаемой статистикой (1.1).

Максимизация или минимизация каждого из квазиинвариантных индексов (4.16) на выпуклом множестве решений системы (4.11) эквивалентна соответствующей экстремизации билинейного квазивогнутого функционала

$$u_T\lambda_T. \tag{4.17}$$

Первая общая задача. Найти решение системы (4.11) с максимальным значением функционала (4.17).

Первый вариант выбора решения системы (4.11) можно назвать **квазиоптимистическим**. Здесь естественно ожидать невысокий уровень индекса цен и высокий уровень индекса количества, по крайней мере, при небольшом нарушении свойства однородности предпочтений, когда квазиинвариантные индексы близки к инвариантным и общим аналитическим индексам. Эта задача как максимизация квазивогнутого функционала на выпуклом множестве подобна задаче ВП совпадением локального и глобального максимумов. Для ускорения процесса решения в данном случае естественно использовать в качестве начального решения набор чисел Африата, определяемых как решение первой однородной задачи $(\lambda_1^M, \ldots, \lambda_T^M)$, и сопряженных u-чисел $(u_1^M, \ldots, u_T^M)$.

Вторая общая задача. Найти решение системы (4.11) с минимальным значением функционала (4.17).

Этот вариант можно назвать **квазипессимистическим**. Здесь естественно ожидать высокий уровень индекса цен и невысокий уровень индекса количества. Ввиду возможной многоэкстремальности в данном случае особенно важна роль хорошего начального приближения, в качестве которого, подобно предыдущей задаче, естественно взять решение второй специальной задачи с добавлением сопряженных u-чисел $(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_T^m; u_1^m, \ldots, u_T^m)$.

Для первой и особенно второй задач возможно получение чрезмерно малых или больших компонент решения, приводящих к неестественным значениям промежуточных индексов $(P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF})$ или невозможности вычисления функции расходов, определяющей эти индексы. Для предотвращения этих и других патологий можно вводить условия отделения от нуля множителей (например, $\lambda_t \geq 0.3\lambda_t^m$) или их монотонность $(\lambda_t \geq \lambda_{t+1})$, соответствующую монотонному росту цен.

Третья общая задача. Найти решение $(\lambda_1, \ldots, \lambda_T; u_1, \ldots, u_T)$ системы (4.11), минимизирующее квадратическое отклонение квазиинвариантных индексов (4.16) от индексов Фишера $\{P_{0t}^F, Q_{0t}^F\}$:

$$F_{\lambda u}(\lambda, u) = \sum_{t=1}^{T}\left[\left(\sqrt{\frac{e_t}{u_t\lambda_t}} - P_{0t}^F\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{u_t\lambda_t e_t}}{e_0} - Q_{0t}^F\right)^2\right]. \tag{4.18}$$

Для хорошего начального приближения решения этой задачи НП естественно использовать усреднение решений первых двух задач.

5. Пример построения аналитических индексов

В таблицах 1 и 2 представлена статистика потребления [23] в Ульяновской области в период 2006–2017 гг. следующих агрегированных продуктов питания: 1 – хлебные продукты; 2 – картофель; 3 – овощи и бахчевые; 4 – мясо и мясопродукты; 5 – фрукты и ягоды; 6 – молоко и молочные продукты; 7 – яйца; 8 – рыба и рыбопродукты; 9 – сахар, включая кондитерские изделия; 10 – масло растительное и другие жиры.

Таблица 1. Цены на продукты питания

Период		Цена (руб./кг, 7 – руб./шт)									
T	год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2006	25.74	7.71	20.28	33.84	91.31	9.43	2.07	56.00	46.09	33.83
1	2007	30.04	8.27	25.81	35.22	98.36	11.60	2.56	63.53	45.48	39.12
2	2008	41.08	11.27	31.06	45.51	119.29	16.51	3.13	81.09	54.45	63.64
3	2009	45.35	11.79	32.44	50.02	139.17	17.33	2.98	86.22	69.69	54.73
4	2010	46.88	16.34	38.82	50.17	140.59	19.34	2.98	93.79	77.39	53.36
5	2011	55.67	23.92	36.94	50.09	157.77	21.43	3.12	102.08	92.73	72.23
6	2011	60.45	11.68	37.37	53.50	172.11	22.14	3.52	118.93	91.05	67.11
7	2013	69.02	17.07	43.18	54.00	173.43	24.61	3.95	135.39	98.03	69.67
8	2014	74.58	22.77	45.67	60.28	189.67	28.81	4.39	145.05	104.01	66.51
9	2015	83.95	23.31	53.62	79.20	220.14	33.78	5.53	176.96	135.93	85.52
10	2016	92.62	17.99	56.23	84.86	222.19	36.47	5.51	181.14	140.34	95.51
11	2017	95.35	22.25	57.35	83.52	218.45	39.87	5.00	200.63	139.21	93.75
2017/06		3.70	2.89	2.83	2.47	2.39	4.23	2.42	3.58	3.02	2.77

Таблица 2. Потребление продуктов питания

T	Количество (кг/год, 7 – шт. на чел.)										Расходы
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(руб./год)
2006	114.0	86.1	82.0	44.4	59.1	253.2	181.0	18.0	28.9	9.4	17580.4
2007	102.6	76.5	76.8	55.3	57.9	247.3	176.0	19.4	26.7	9.2	19465.7
2008	96.2	67.4	83.3	52.6	59.2	238.8	165.0	19.0	26.4	8.9	24758.2
2009	92.0	69.5	85.7	54.7	57.9	241.3	171.0	17.3	25.5	9.1	27023.8
2010	98.9	62.0	96.9	65.8	68.0	261.1	189.0	21.7	28.3	10.3	32660.4
2011	98.3	59.0	99.8	66.5	73.4	268.6	193.0	22.7	29.7	10.5	37669.5
2012	99.1	64.0	103.6	69.8	74.7	276.8	191.0	23.6	30.8	10.3	40303.6
2013	94.9	64.8	98.3	70.6	74.7	283.4	198.0	24.4	30.1	9.8	43361.9
2014	93.4	63.5	101.0	68.4	77.7	279.2	216.0	22.9	30.4	9.4	47985.6
2015	91.5	61.1	111.1	65.7	78.2	285.6	211.0	22.5	29.9	9.5	57154.0
2016	94.9	62.5	121.3	72.2	82.6	300.9	236.0	21.1	33.1	9.8	62892.0
2017	88.4	59.1	104.1	70.5	81.8	262.5	228.0	19.2	29.8	9.6	59977.8
2017/06	0.78	0.69	1.27	1.59	1.38	1.04	1.26	1.07	1.03	1.02	3.41

В таблице 3 приведены соответствующие значения формульных индексов цен и количества потребления Ласпейреса, Пааше (1.3) и Фишера (1.5). Для данной статистики эффект Гершенкрона (1.4) выполняется во всех позициях. В конце периода $T = 11$ превышение индекса цен Ласпейреса P^L_{0T} над индексом цен Пааше P^P_{0T} составляет 0.112, т. е. 11.2 %. Индекс количества Ласпейреса Q^L_{0T} также превосходит индекс Пааше Q^P_{0T} на 0.042, т. е. на 4.2 %. Отметим, что разница индексов Ласпейреса и Пааше однонаправленная, и это не позволяет в общем случае выбирать их для тенденциозной оценки экономической ситуации. Индексы Фишера усредняют значения этих наиболее распространенных индексов цен и количества (уровня) потребления и являются в классе формульных индексов наиболее объективными и качественными относительно выполнения естественных тестов Фишера, не удовлетворяя только тесту транзитивности.

Таблица 3. Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера

Период T	Индексы цен			Индексы количества		
	P_{0t}^L	P_{0t}^P	P_{0t}^F	Q_{0t}^L	Q_{0t}^P	Q_{0t}^F
0	1	1	1	1	1	1
1	1.129	1.127	1.128	0.982	0.980	0.981
2	1.459	1.452	1.456	0.970	0.965	0.967
3	1.610	1.603	1.606	0.959	0.955	0.957
4	1.725	1.706	1.716	1.089	1.077	1.083
5	1.944	1.894	1.919	1.131	1.102	1.117
6	2.000	1.973	1.987	1.162	1.147	1.154
7	2.184	2.135	2.159	1.156	1.129	1.142
8	2.413	2.348	2.381	1.162	1.131	1.147
9	2.843	2.784	2.813	1.168	1.144	1.156
10	2.961	2.894	2.927	1.236	1.208	1.222
11	3.050	2.938	2.993	1.161	1.119	1.140

Для приведенной торговой статистики были реализованы все поставленные в предыдущем разделе задачи построения аналитических индексов. На первом этапе в предположении однородности предпочтений построены инвариантные индексы (1.10). Значение задачи минимальной релаксации (4.4) λ-системы (4.2) оказалось равным $r_\lambda = 0.00022$. Это означает несовместность исходной редуцированной λ-системы (2.7) и необходимость ее регуляризации. Для всех трех содержательных задач – максимизации λ_{11} (4.12), минимизации λ_{11} (4.13) и проекции точки Фишера (4.15) – были получены одинаковые значения сверхрелаксации $\rho = 0.000025$. Соответственно, фиксированный параметр (4.8) релаксации системы (4.9) равен $r_\lambda^\rho = 0.000245$. Соответствующие решения и инвариантные индексы представлены в таблице 4.

Таблица 4. Инвариантные индексы

T	$\max\lambda_T$ (4.12)			Проекция (4.15)			$\min\lambda_T$ (4.13)		
	λ^M	P_{0t}	Q_{0t}	λ^F	P_{0t}	Q_{0t}	λ^m	P_{0t}	Q_{0t}
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.887	1.128	0.982	0.886	1.129	0.981	0.885	1.130	0.980
2	0.689	1.452	0.970	0.686	1.457	0.967	0.686	1.458	0.966
3	0.624	1.603	0.959	0.622	1.608	0.956	0.621	1.609	0.955
4	0.584	1.711	1.086	0.583	1.716	1.082	0.582	1.718	1.081
5	0.525	1.903	1.126	0.524	1.910	1.122	0.523	1.911	1.121
6	0.505	1.982	1.157	0.503	1.989	1.153	0.503	1.990	1.152
7	0.466	2.145	1.150	0.464	2.153	1.145	0.464	2.155	1.144
8	0.423	2.364	1.155	0.421	2.374	1.150	0.421	2.375	1.149
9	0.357	2.802	1.160	0.356	2.813	1.156	0.355	2.815	1.155
10	0.343	2.918	1.226	0.341	2.931	1.221	0.341	2.934	1.219
11	0.336	2.980	1.145	0.334	2.997	1.139	0.333	3.006	1.135

Здесь первый (оптимистический) вариант (4.12) выбора наилучших конечных индексов дал результат $P_{0,11} = 2.980$, $Q_{0,11} = 1.145$; пессимистический вариант – $P_{0,11} = 3.006$, $Q_{0,11} = 1.135$. Значения конечных индексов варианта (4.15) $P_{0,11} = 2.997$, $Q_{0,11} = 1.139$ находятся между этими крайними значениями, что соответствует предположению их объективности.

На втором этапе решалась общая система Африата и строились индексы Конюса-Фишера (3.4). Задача минимальной релаксации (4.5) для данной статистики имеет значение $r_{\lambda u} = -0.00028$. Значение параметра сверхрелаксации оказалось наименьшим для третьей общей задачи – минимизации функционала (4.18): $\rho = 0.000001$. Это означает, что исходная общая редуцированная система (2.5) для данной статистики регулярна, и параметр (4.10) релаксации системы (4.11) равен $r^{\rho}_{\lambda u} = 0$. При решении первой и второй общих задач в исходной постановке были получены наборы чисел Африата с немонотонными выбросами первых чисел, что приводило к сильному отклонению индексов Конюса-Фишера от статистических индексов Фишера и близким к последним инвариантным индексам. Во второй задаче также получались нулевые λ-числа. В обоих случаях система неравенств (4.11) была дополнена условием монотонности $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$, и во второй задаче было введено условие $\lambda_{11} \geq 0.5\lambda^{Max}_{11}$, где λ^{Max}_{11} – значение первой задачи. Соответствующие решения и аналитические индексы Конюса-Фишера представлены в таблице 5.

Таблица 5. Индексы Конюса-Фишера

t	$\max \lambda_T u_T$: (4.11), $\lambda_t \leq \lambda_{t-1}$				Третья общая задача				$\min \lambda_T u_T$: (4.11), $\lambda_t \leq \lambda_{t-1}$,$\lambda_{11} \geq 0.5\lambda^{Max}_{11}$			
	λ^M_t	u^M_t	P^{KF}_{0t}	Q^{KF}_{0t}	λ_t	u_t	P^{KF}_{0t}	Q^{KF}_{0t}	λ^m_t	u^m_t	P^{KF}_{0t}	Q^{KF}_{0t}
0	1.000	17580	1	1	1.000	17580	1	1	1.000	17580	1	1
1	1.000	17190	1.131	0.979	0.887	17234	1.129	0.980	0.991	17206	1.130	0.980
2	0.993	16830	1.461	0.964	0.688	16983	1.458	0.966	0.977	16872	1.458	0.966
3	0.978	16554	1.615	0.952	0.623	16803	1.608	0.956	0.956	16606	1.611	0.954
4	0.628	19088	1.716	1.083	0.584	19000	1.719	1.081	0.314	18312	1.754	1.059
5	0.573	19839	1.909	1.123	0.523	19689	1.913	1.120	0.286	18687	1.969	1.088
6	0.538	20419	1.983	1.156	0.495	20221	1.991	1.151	0.269	18977	2.060	1.113
7	0.514	20294	2.151	1.146	0.468	20106	2.158	1.143	0.257	18915	2.231	1.105
8	0.463	20376	2.371	1.151	0.425	20181	2.380	1.147	0.232	18955	2.461	1.109
9	0.388	20488	2.807	1.158	0.356	20283	2.819	1.153	0.194	19011	2.918	1.114
10	0.371	21735	2.917	1.227	0.340	21427	2.934	1.219	0.185	19635	3.072	1.164
11	0.371	20170	2.994	1.140	0.335	19968	3.005	1.135	0.185	18819	3.108	1.098

В данном случае квазиоптимистические индексы Конюса-Фишера ухудшили оценку конечной ситуации по сравнению с оптимистическими инвариантными индексами как относительно инфляции ($P^{KF}_{0,11} = 2.994 > P_{0,11} = 2.980$), так и по уровню потребления ($Q^{KF}_{0,11} = 1.140 < Q_{0,11} = 1.145$). В пессимистическом варианте аналогичные соотношения подтвердили более широкие возможности допустимой целенаправленной «подгонки» индексов: $P^{KF}_{0,11} = 3.108 > P_{0,11} = 3.006$, $Q^{KF}_{0,11} = 1.098 < Q_{0,11} = 1.135$ (цены выше, потребление ниже). Несоответствие ожиданию в первом варианте объясняется тем, что функционалы задач выбора содержательных решений построены не на основе индексов Конюса-Фишера, отражающих потребительские предпочтения в общем (неоднородном) случае, а на основе их эвристической аппроксимации квазиинвариантными индексами. Для данной статистики критерий оптимистического выбора первой общей задачи оказался неэффективным относительно варианта однородных предпочтений.

Подобные расчеты выполнены для аналогичных статистик потребления в Республике Мордовия и Приволжском федеральном округе в целом. Ограничимся перечислением конечных показателей обобщенной динамики потребления. Для Мордовии конечные индексы Фишера равны $P^F_{0,11} = 2.926$, $Q^F_{0,11} = 1.137$; инвариантные индексы цен, построенные по решениям трех однородных задач (4.12), (4.13) и (4.15), равны $P^{(1)}_{0,11} = 2.911$, $P^{(2)}_{0,11} = 2.977$, $P^{(3)}_{0,11} = 2.944$ соответственно (верхний индекс соответствует номеру задачи); инвариантные индексы количеств $Q^{(1)}_{0,11} = 1.143$, $Q^{(2)}_{0,11} = 1.117$, $Q^{(3)}_{0,11} = 1.129$. Индексы Конюса-Фишера, построенные по решениям трех общих задач, равны $P^{KF(1)}_{0,11} = 2.914$, $P^{KF(2)}_{0,11} = 3.111$, $P^{KF(3)}_{0,11} = 2.960$; $Q^{KF(1)}_{0,11} = 1.141$, $Q^{KF(2)}_{0,11} = 1.096$, $Q^{KF(3)}_{0,11} = 1.124$ соответственно.

Аналогичные показатели для ПФО: индексы Фишера $P^F_{0,11} = 2.966$, $Q^F_{0,11} = 1.196$; инвариантные индексы цен $P^{(1)}_{0,11} = 2.950$, $P^{(2)}_{0,11} = 2.971$, $P^{(3)}_{0,11} = 2.966$; инвариантные индексы количеств $Q^{(1)}_{0,11} = 1.203$, $Q^{(2)}_{0,11} = 1.194$, $Q^{(3)}_{0,11} = 1.197$. Индексы Конюса-Фишера $P^{KF(1)}_{0,11} = 2.967$, $P^{KF(2)}_{0,11} = 3.042$, $P^{KF(3)}_{0,11} = 2.967$; $Q^{KF(1)}_{0,11} = 1.196$, $Q^{KF(2)}_{0,11} = 1.166$, $Q^{KF(3)}_{0,11} = 1.196$.

В заключение отметим, что все приведенные варианты аналитических индексов – инвариантных, предполагающих однородность потребительских предпочтений (усредненных по ансамблю потребителей), и общих аналитических индексов Конюса-Фишера – допустимы относительно современной индексологии и непараметрического анализа рыночного спроса, представляющего наиболее эффективный метод современного экономического анализа. Различные значения одинаковых показателей отражают объективные возможности статистических методов для целенаправленного, субъективного и в то же время «честного» манипулирования оценками социально-экономической ситуации различными специалистами, администраторами и политиками, проявляющегося в рамках существующей статистической практики.

Мы также представили вариант объективной оценки рыночной динамики на основе принятия формульных индексов Фишера как ориентиров построения аналитических индексов Конюса-Фишера. Использование на данном этапе квазиинвариантных индексов в критериях отбора решений общей системы Африата ограничивает степень достижения содержательных целей выбора, и преодоление этого ограничения является целью нашего следующего исследования.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области (проект № 18-410-730017), а также РФФИ – проект № 19-010-00972.

Список литературы

1. A. Mas-Colell, M. Whinston, J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, NY, 1995, 981 p.

2. В. К. Горбунов, *Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал*, Экономика, М., 2004, 174 с.

3. В. К. Горбунов, *Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения*, УлГУ, Ульяновск, 2015, 264 с., URL: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

4. В. К. Горбунов, *Математическое моделирование рыночного спроса: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп.*, Лань, СПб., 2018, 212 с.

5. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986, 288 с.

6. V. K. Gorbunov, “Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization”, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **9**:6 (2001), 575–594.

7. В. К. Горбунов, “Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными”, *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филиппов, Физматлит, М., 2003, 418–447.

8. П. Кевеш, *Теория индексов и практика экономического анализа*, Фин. и стат., М., 1990, 304 с.

9. W. E. Diewert, “The consumer price index and index number purpose”, *Journal of Economic and Social Measurement*, **27** (2001), 167–248.

10. P. A. Samuelson, S. Swamy, “Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis”, *The American Economic Review*, **64**:4 (1974), 566–593.

11. W. E. Diewert, “The economic theory of index numbers: a survey”, *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, ed. A. Deaton, Cambridge University Press, London, 1981, 163–208.

12. В. К. Горбунов, Л. А. Козлова, “Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления”, *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, **19**:3 (2008), 120–127.

13. В. К. Горбунов, Л. А. Козлова, “Моделирование рыночного потребительского спроса и аналитические индексы”, *Вопросы статистики*, **6** (2015), 36–45.

14. А. А. Конюс, “Проблема истинного индекса стоимости жизни”, *Экономический бюллетень конъюнктурного института*, **9–10** (1924), 64–71.

15. S. N. Afriat, “The construction of utility functions from expenditure data”, *Intern. Economic Review*, **8**:1 (1967), 67–77.

16. S. N. Afriat, *The index number problem. Construction theorems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2014, 220 p.

17. H. Varian, “The nonparametric approach to demand analysis”, *Econometrica*, **50**:4 (1982), 945–973.

18. H. Varian, “Non-parametric tests of consumer behaviour”, *The Review of Economic Studies*, **50**:1 (1983), 99–110.

19. W. E. Diewert, “Afriat and revealed preference theory”, *Rev. Econ. Studies*, **40** (1973), 419–425.

20. A. Fleissig, G. Whitney, “Testing for the significance of violations of Afriat’s inequalities”, *Journal of Business and Economic Statistics*, **23**:3 (2005), 355–362.

21. В. К. Горбунов, “О линейных неравенствах обратной задачи теории потребления”, *Ученые записки УлГУ: Фунд. пробл. математики и механики*, **1** (1998), 46–53.

22. В. В. Федоров, *Численные методы максимина*, Наука, М., 1979, 280 с.

23. *Потребление продуктов питания в домашних хозяйствах: стат. бюлл.*, 2008–2018, URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1140095125312.

Поступила 12.01.2019

MSC2010 91B42, 91B82, 90C30

Inverse problem of the market demand theory and analytical indices of demand

© **V. K. Gorbunov[1], A. G. Lvov[2]**

Abstract. The inverse problem of the market demand's theory is constructing a collective utility function via a trade statistics consisting of a finite set of pairs “prices-quantities”. The main computational problem here is the solution of the Afriat's inequalities system, which determines the values of the utility function and the Lagrange multiplier on the trade statistics data, which are “Afriat's numbers”. This inverse problem is ill-posed one because of multiplicity of inequalities system's solutions and also because of their possible inconsistency and instability. A regularization method for this problem is proposed, based on the relaxation of the Afriat's system yielding local Hausdorf continuity of its solution set, and on the use of characteristics of analytical index numbers determined via Afriat's numbers. These characteristics formalized by choice criteria are: optimism, pessimism, objectivity. The results of constructing analytical index numbers for real trade statistics of Ulyanovsk region are presented.

Key Words: inverse problem of the market demand's theory, analytical indices, Afriat's inequalities, regularization methods, relaxation of inequalities.

References

1. A. Mas-Colell, M. Whinston, J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, NY, 1995, 981 p.

2. V. K. Gorbunov, *[Mathematical model of consumers' demand: Theory and applied potential]*, Economizdat Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 174 p.

3. V. K. Gorbunov, *[Consumers' demand: Analytical theory and applications]*, ULSU Publishing, Ulyanovsk, 2015 (In Russ.), 264 p.

4. V. K. Gorbunov, *[Mathematical modeling of market demand: Manual. 2-nd ed., revised]*, Lan Publishing, Saint Petersburg, 2018 (In Russ.), 212 p.

[1]**Vladimir K. Gorbunov**, Professor of Digital Economics Department, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5276-0501, vkgorbunov@mail.ru

[2]**Alexander G. Lvov**, Associate Professor of Digital Economics Department, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), PhD (Economics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6726-8234, aglvov@mail.ru

5. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*, Wiley, New York, 1977, 258 p.

6. V. K. Gorbunov, “Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization”, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **9**:6 (2001), 575–594.

7. V. K. Gorbunov, “[Regularization of nonlinear ill-posed problems with parametrized data]”, *Nelinejnyi analiz i nelinejnyie differentsial’nije uravnenija*, eds. V. A. Trenogin, A. F. Filippov, Fizmatlit Publ., Moscow, 2003, 418–447 (In Russ.).

8. P. Kves, *Index Theory and Economic Reality*, Akademiai Kiado, Budapest, 1983, 313 p.

9. W. E. Diewert, “The consumer price index and index number purpose”, *Journal of Economic and Social Measurement*, **27** (2001), 167–248.

10. P. A. Samuelson, S. Swamy, “Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis”, *The American Economic Review*, **64**:4 (1974), 566–593.

11. W. E. Diewert, “The economic theory of index numbers: a survey”, *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, ed. A. Deaton, Cambridge University Press, London, 1981, 163–208.

12. V. K. Gorbunov, L. A. Kozlova, “[The construction and investigation of quasi-invariant consumption indices]”, *Sovremennyye technologii. Sistemnyy analis. Modelirovanye*, **19**:3 (2008), 120–127 (In Russ.).

13. V. K. Gorbunov, L. A. Kozlova, “[The modeling of the market demand and analytical index numbers]”, *Voprosy statistiki*, **6** (2015), 36–45 (In Russ.).

14. A. A. Konus, “The problem of the true index of the cost of living”, *Econometrica*, **7** (1939), 10–29.

15. S. N. Afriat, “The construction of utility functions from expenditure data”, *Intern. Economic Review*, **8**:1 (1967), 67–77.

16. S. N. Afriat, *The index number problem. Construction theorems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2014, 220 p.

17. H. Varian, “The nonparametric approach to demand analysis”, *Econometrica*, **50**:4 (1982), 945–973.

18. H. Varian, “Non-parametric tests of consumer behaviour”, *The Review of Economic Studies*, **50**:1 (1983), 99–110.

19. W. E. Diewert, “Afriat and revealed preference theory”, *Rev. Econ. Studies*, **40** (1973), 419–425.

20. A. Fleissig, G. Whitney, “Testing for the significance of violations of Afriat’s inequalities”, *Journal of Business and Economic Statistics*, **23**:3 (2005), 355–362.

21. V. K. Gorbunov, “[On linear inequalities of the consumption theory’s inverse problem]”, *Uchenyye zapiski UlGU: Fundamentalnyye problemy matematiki i mekhaniki*, **1** (1998), 46–53 (In Russ.).

22. V. V. Fedorov, *Chislennije metody maksimina [Numerical methods for maxmin]*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russ.), 280 p.

23. *[Household food consumption]*, Statisticheskij byulleten' (vypuski 2008–2018gg.) (In Russ.), Available at: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1140095125312.

Submitted 12.01.2019