

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.13-23

УДК 517.9

Робастное отслеживание траектории омни-мобильного робота с учетом проскальзывания колес© А. С. Андреев¹, О. А. Перегудова²

Аннотация. В настоящей статье рассматривается задача построения робастного закона управления для отслеживания траектории мобильного робота с тремя омни-колесами, движущегося по горизонтальной поверхности. Построена динамическая модель робота, центр масс круглой платформы которого смещен относительно ее геометрического центра, учитывающая проскальзывание колес при торможении. Управление движением колесного робота осуществляется при помощи трех независимых электродвигателей постоянного тока. При этом моменты, развиваемые двигателями, являются линейными относительно напряжения, подаваемого на двигатель, и угловой скорости вращения ротора. На основе метода функций Ляпунова построен ограниченный закон управления без измерения скоростей, решающий задачу робастного слежения. Это означает, что каковы бы ни были начальные отклонения, по истечении некоторого времени траектория робота попадает в заданную окрестность отслеживаемой траектории и остается в ней. Доказана теорема о предельной ограниченности замкнутой системы. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность предложенного закона управления.

Ключевые слова: колесный мобильный робот, омни-колесо, скольжение, отслеживание траектории, функция Ляпунова, динамическая модель.

1. Введение

Мобильные роботы с омни-колесами обладают преимуществом перед роботами с обычным дифференциальным типом колес, которое состоит в высокой маневренности омни-колес, обеспечивающей движение робота в любом направлении без предварительного разворота. Такая возможность обеспечивается конструкцией омни-колес, по ободу которых нанизаны ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колеса. Таким образом, омни-колесо может двигаться не только в направлении, лежащем в плоскости колеса, но и перпендикулярно ему.

В работах [1]-[5] построены кинематические и динамические модели, описывающие движение робота с омни-колесами, а также решены задачи о стабилизации программных движений таких механических систем. В работах [6]-[7] рассмотрена задача построения

¹Андреев Александр Сергеевич, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9408-0392>, asa5208@mail.ru

²Перегудова Ольга Алексеевна, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2701-9054>, peregudovaoa@gmail.com

управления для кинематических моделей робота. Динамическая модель и закон управления для неголомного мобильного робота с омни-колесами были построены в работе [8].

Для решения задачи отслеживания траектории четырехколесного мобильного робота в работе [9] предложен закон управления, учитывающий действие сил, основанный на методе линеаризации обратной связью. Этот метод заключается в исключении всех нелинейных членов из уравнений движения с целью получить линейную стационарную систему в отклонениях. Отметим, что законы управления, основанные на этом методе, требуют вычисления всех сил, действующих на систему в режиме онлайн, что невозможно в условиях неполноты информации о массо-инерционных характеристиках системы.

Отметим, что построение робастного закона управления для динамической модели робота, позволяющего выводить робота на заданную траекторию и стабилизировать движение вдоль нее в условиях неполной информации о массо-инерционных характеристиках системы, является математически сложной и актуальной задачей. В работе [10] предложен адаптивный закон управления, основанный на методе бэкстепинга и построении функции Ляпунова, позволяющий отслеживать траекторию робота с тремя омни-колесами с учетом неизвестных массо-инерционных параметров системы и действия сил трения скольжения. Отметим, что релейный закон управления, предложенный в [10], имеет сложную структуру и требует онлайн-вычислений оценок неизвестных параметров.

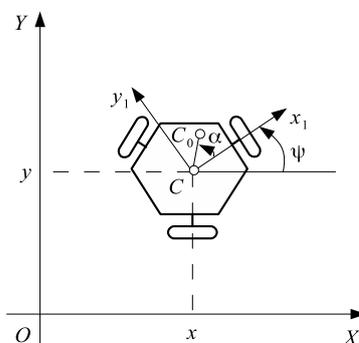
В работах [11]-[12] рассмотрены модели трехколесных омни-мобильных роботов без учета проскальзывания колес и построены законы управления, решающие задачу отслеживания траектории системы, в том числе при неточно известных параметрах системы.

В работах [13]-[14] построена нелинейная модель четырехколесного мобильного робота, учитывающая действие сил сухого и вязкого трения, и предложен закон управления для такой модели. Динамическая модель омни-мобильного робота, учитывающая проскальзывание колес, построена в [15].

В настоящей статье предложена новая динамическая модель робота с тремя омни-колесами и смещенным центром масс с учетом проскальзывания колес. Построен робастный закон управления для данной модели, обеспечивающий отслеживание нестационарной траектории. Представлены результаты численного моделирования.

2. Модель мобильного робота с учетом проскальзывания колес

Рассмотрим модель робота (Рис. 2.1) с тремя омни-колесами, движущегося по горизонтальной поверхности под действием моментов, развиваемых тремя электродвигателями постоянного тока, с учетом проскальзывания колес.



Р и с. 2.1

Мобильный робот с тремя омни-колесами и смещенным центром масс

Робот имеет следующие массово-инерционные параметры: m_0 — масса платформы; m_1 — масса колеса робота; ρ_0 , ρ_1 — соответственно радиусы инерции платформы и колеса

относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс; r — радиус колеса; r_1 — радиус инерции колеса относительно оси вращения.

Пусть $OXYZ$ — неподвижная декартова система координат, связанная с горизонтальной опорной плоскостью OXY , ось OZ направлена вертикально вверх. Пусть C — центр равностороннего треугольника $C_1C_2C_3$ с вершинами, лежащими в центрах масс колес робота. $Cx_1y_1z_1$ — подвижная система координат с началом в точке C , жестко связанная с платформой робота. Ось Cx_1 совпадает с осью вращения первого колеса. Расстояние от центра платформы C до центра масс C_i ($i = 1, 2, 3$) каждого колеса равно a .

Пусть x, y — координаты центра C платформы в системе координат $OXYZ$, ψ — угол поворота платформы вокруг вертикальной оси Cz_1 . Центр масс робота C_0 смещен относительно центра C платформы на расстояние d , угол между осью Cx_1 и прямой CC_0 равен α .

Обозначим $q = (x, y, \psi)$, $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi})^T$, $V = (V_{x1}, V_{y1}, \omega)$ — вектор скорости платформы в подвижной системе координат $Cx_1y_1z_1$.

Выразим связь между векторами \dot{q} и V в следующем виде [2]:

$$V = \Gamma \dot{q}, \quad (2.1)$$

где $\Gamma \in R^{3 \times 3}$ — матрица поворота следующего вида:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если движение робота происходит без проскальзывания колес, то справедливо следующее условие [2]:

$$\dot{\varphi} = JV, \quad (2.2)$$

где $\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3)^T$ — вектор угловых скоростей колес, матрица $J \in R^{3 \times 3}$ имеет следующий вид:

$$J = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -a \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & -a \end{pmatrix},$$

Если возникает проскальзывание i -го колеса, то будет отлична от нуля следующая величина [15]:

$$s_i = \frac{(r\omega_i - V_{ci})}{\max\{r\omega_i, V_{ci}\}}, \quad (2.3)$$

где V_{ci} — абсолютная величина скорости центра C_i колеса; ω_i — абсолютная величина угловой скорости колеса.

Очевидно, что переменная s_i изменяется со временем в пределах от -1 до 1, $i = 1, 2, 3$.

Если имеет место скольжение колеса при торможении, т. е. $V_{ci} > r\omega_i$, то соотношение (2.3) можно записать в виде:

$$\omega_i = \frac{(1 + s_i)V_{ci}}{r}. \quad (2.4)$$

При этом условие (2.2) заменяется следующим соотношением:

$$\dot{\varphi} = (E + S)JV, \quad (2.5)$$

где $E = \text{diag}(1, 1, 1)$ — единичная матрица; $S = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$ — матрица переменных коэффициентов, характеризующих проскальзывание колес.

Построим динамическую модель робота, учитывая, что имеет место проскальзывание колес при торможении. Кинетическая энергия робота складывается из суммы кинетических энергий платформы и трех колес и имеет вид [2]

$$T = \frac{(m_s(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_q\dot{\psi}^2 - 2m_0d\dot{\psi}(\dot{x}\sin(\alpha + \psi) - \dot{y}\cos(\alpha + \psi)) + m_1\rho_3^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2))}{2} \quad (2.6)$$

где $m_s = m_0 + 3m_1$ — масса робота; $I_q = m_0(\rho_0^2 + d^2) + 3m_1(\rho_1^2 + a^2)$ — момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс платформы.

Тогда уравнения динамики робота в системе координат $OXYZ$ примут вид

$$\begin{aligned} A(q_3)\ddot{q} + \tilde{B}(q_3, \dot{q}_3)\dot{q} &= P(q_3)rf_t \\ I_w\ddot{\psi} &= M - rf_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $q = (q_1, q_2, q_3)^T$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \psi$;

$$\begin{aligned} A(q_3) &= \begin{pmatrix} m & 0 & -s(q_3) \\ 0 & m & c(q_3) \\ -s(q_3) & c(q_3) & I_s \end{pmatrix}; \\ \tilde{B}(q_3, \dot{q}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3 \\ -m_2\dot{q}_3 & 0 & -s(q_3)\dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ P(q_3) &= \begin{pmatrix} \sin q_3 & \sin\left(q_3 + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(q_3 + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos q_3 & -\cos\left(q_3 + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3 + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$c(q_3) = m_0d\cos(\alpha + q_3)$; $s(q_3) = m_0d\sin(\alpha + q_3)$; $I_w = m_1r_1^2$ — момент инерции колеса относительно его оси вращения; $f_t = (f_{t1}, f_{t2}, f_{t3})^T$; f_{ti} — тяговое усилие, приложенное в точке контакта i -го колеса с поверхностью; $M = (M_1, M_2, M_3)^T$; M_i — вращающий момент, развиваемый i -ым электродвигателем;

$$\begin{aligned} m &= m_0 + 3m_1 + \frac{3m_1\rho_3^2}{2r^2}; \\ I_s &= m_0(d^2 + \rho_0^2) + 3m_1\left[\rho_1^2 + a^2\left(1 + \frac{2\rho_3^2}{r^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Запишем уравнения (2.7) в виде

$$(A(q_3) + P(q_3)I_w(E + S)P^T(q_3))\ddot{q} + (\tilde{B}(q_3, \dot{q}_3) + P(q_3)I_w\dot{S}P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)M. \quad (2.8)$$

Согласно [2], предположим, что моменты, развиваемые электродвигателями постоянного тока, являются линейными относительно напряжения, подаваемого на двигатель, и угловой скорости вращения ротора, т. е.

$$M_j = c_u u_j - c_v \dot{\varphi}_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

где c_u и c_v — положительные постоянные коэффициенты; u_j — напряжение, подаваемое на j -ый двигатель; $c_v \dot{\varphi}_j$ — момент противоэлектродвижущей силы.

Подставляя выражения (2.9) в уравнения (2.7) и используя соотношения (2.2) и (2.5), получим

$$(A(q_3) + P(q_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3))\ddot{q} + (B(q_3, \dot{q}_3) + P(q_3)(I_\omega\dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)U, \quad (2.10)$$

где $U = (U_1, U_2, U_3)^T$, $U_j = c_u u_j$, $j = 1, 2, 3$, матрица $B(q_3, \dot{q}_3)$ имеет вид

$$B(q_3, \dot{q}_3) = \begin{pmatrix} h & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3 \\ -m_2\dot{q}_3 & h & -s(q_3)\dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 2a^2h \end{pmatrix},$$

где $h = 3c_\nu/(2r^2)$.

3. Решение задачи об отслеживании траектории робота

Пусть $q = q^{(0)}(t)$ — отслеживаемая траектория, которая является дважды непрерывно дифференцируемой функцией времени. Предположим, что найдутся положительные числа ξ_1 , η_k и ζ_k ($k = 1, 2$) — такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |q_k^{(0)}(t)| &\leq \xi_1, \quad |\dot{q}_k^{(0)}(t)| \leq \eta_1, \quad |\dot{q}_3^{(0)}(t)| \leq \eta_2, \\ |\ddot{q}_k^{(0)}(t)| &\leq \zeta_1, \quad |\ddot{q}_3^{(0)}(t)| \leq \zeta_2, \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Введем отклонения от отслеживаемой траектории:

$$e_k = q_k - q_k^{(0)}(t), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

Будем решать задачу отслеживания траектории $q^{(0)}(t)$ робота при помощи управления

$$U = P^{-1}(q_3)(U^{(0)}(t) + U^{(2)}), \quad (3.2)$$

где функции $U^{(0)}(t)$ и $U^{(2)}$ определяются в виде

$$\begin{aligned} U^{(0)}(t) &= A(q_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + B(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t), \\ U_j^{(2)} &= -\gamma_j \arctan(q_j - q_j^{(0)}), \quad j = 1, 2, \quad U_3^{(2)} = -\gamma_3 \sin\left(\frac{q_3 - q_3^{(0)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\gamma_j > 0$, $j = 1, 2, 3$.

Уравнения в отклонениях (3.1) примут вид

$$\begin{aligned} &(A(q_3^{(0)}(t) + e_3) + P(q_3^{(0)}(t) + e_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3))\ddot{e}_q + \\ &+ (B(q_3^{(0)}(t) + e_3, \dot{q}_3^{(0)}(t) + \dot{e}_3) + P(q_3^{(0)}(t) + e_3)(I_\omega\dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3))\dot{e}_q + f(t, e_3)\dot{e}_3 = \\ &= -diag(\gamma_1 \arctan e_1, \gamma_2 \arctan e_2, \gamma_3 \sin e_3/2) + \delta(t, e_3). \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $f = (m_2\dot{q}_2^{(0)}(t) - c(q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t), -s(q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t) - m_2\dot{q}_1^{(0)}(t), 0)^T$, $\delta(t, e_3) = P(q_3^{(0)}(t) + e_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + P(q_3^{(0)}(t) + e_3)(I_\omega\dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{q}^{(0)}(t)$.

Теорема 3.1 Рассмотрим замкнутую систему в отклонениях (3.4). Пусть выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\delta(t, e_3)| &< \delta_0, \quad h > \varepsilon, \\ 2(2a^2h - \varepsilon)(h - \varepsilon) &> (m_0d\eta_2 + m_2\eta_1)^2, \\ \max\left(\frac{3}{2}, 2a^2\right) \frac{(c_\nu + 2I_\omega(\eta_2 + \delta_3))}{r^2} &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где ε – малое положительное число, $\delta_3 > 0$ таково, что $|\dot{e}_3| < \delta_3$.

Тогда система (3.4) предельно ограничена.

Доказательство.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \dot{e}_q^T (A(q_3^{(0)}(t) + e_3) + P(q_3^{(0)}(t) + e_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3)) \dot{e}_q + \\ + \sum_{i=1}^2 \gamma_i \int_0^{e_i} \arctan e_i de_i + 2\gamma_3 \left(1 - \cos \frac{e_3}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Легко заметить, что функция V является положительно определенной, радиально неограниченной по всем переменным, кроме e_3 , по которой она является периодической с периодом 4π , и выполняется следующее соотношение

$$V(t, e_q, \dot{e}_q) \rightarrow 0 \text{ равномерно по } t \in \mathbb{R} \text{ при } (e_q, \dot{e}_q) \rightarrow 0$$

Производная по времени функции Ляпунова (3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{q}_3^{(0)}(t) + \dot{e}_3) \times \\ \times (\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c(q_3) \\ 0 & 0 & -s(q_3) \\ -c(q_3) & -s(q_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} - \\ - \dot{e}_3 (\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & m_2 & -c(q_3) \\ -m_2 & 0 & -s(q_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^{(0)}(t) \\ \dot{q}_2^{(0)}(t) \\ \dot{q}_3^{(0)}(t) \end{pmatrix} - \\ - (\dot{e}_3 + \dot{q}_3^{(0)}(t)) (\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & m_2 & -c(q_3) \\ -m_2 & 0 & -s(q_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} - \\ - (\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3) \text{diag}(h, h, 2a^2h) \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} + \\ + (\dot{q}_3^{(0)}(t) + \dot{e}_3) \dot{e}_q^T P'(q_3^{(0)}(t) + e_3) I_\omega(E + S) P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3) \dot{e}_q + \\ + \dot{e}_q^T P(q_3^{(0)}(t) + e_3) c_\nu S P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3) \dot{e}_q + \dot{e}_q^T \delta(t, e_3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя неравенства (3.5), получим, что выполняется следующее неравенство:

$$\dot{V} \leq -\varepsilon(\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2 + \dot{e}_3^2) + \delta_0 \sqrt{\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2 + \dot{e}_3^2}. \quad (3.8)$$

Из неравенства (3.8) получим, что найдется такой момент времени $T > 0$, что $V(t) \leq \varepsilon_0 \forall t \geq T$, где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число. Отсюда получаем предельную ограниченность системы (3.4). Теорема доказана.

4. Численное моделирование

Параметры робота выбраны следующими:

$$\begin{aligned} m_0 &= 20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & m_1 &= 1 \text{ кг}, \\ r &= 0.1 \text{ м}, & a &= 0.25 \text{ м}, & d &= 0.05 \text{ м}, \\ \alpha &= \pi/61 \text{ рад}, & c_\nu &= 6 * 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\ \rho_0 &= 0.5 \text{ м}, & \rho_1 &= 0.1 \text{ м}, & \rho_3 &= 0.1 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отслеживаемая траектория имеет вид

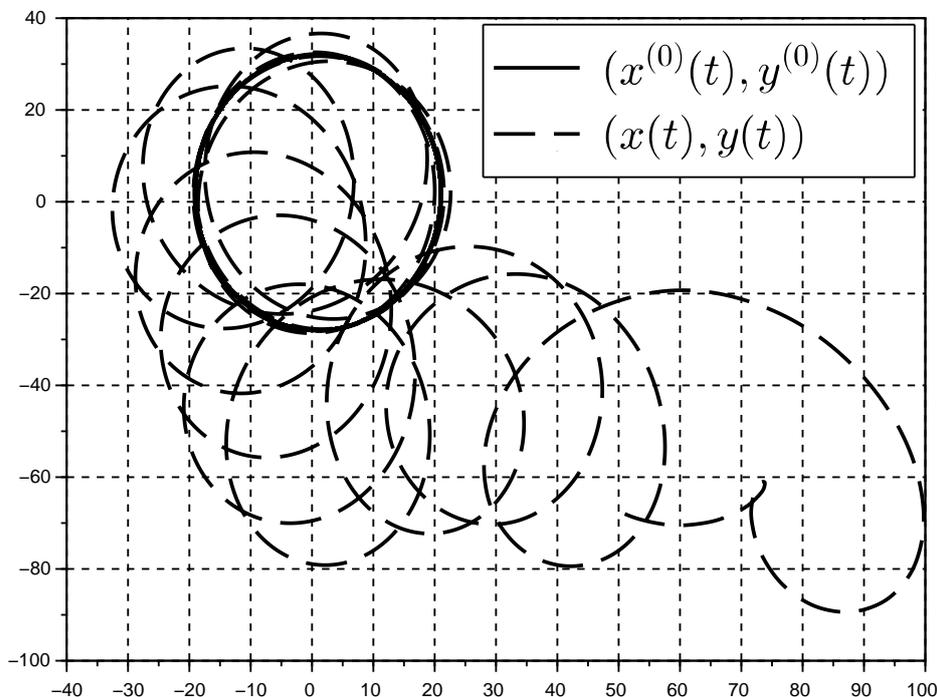
$$\begin{aligned} q_1^{(0)}(t) &= 1 + 20 \cos t \text{ м}, & q_2^{(0)}(t) &= 2 + 30 \cos(t) \text{ м}, \\ q_3^{(0)}(t) &= \pi/4 + 10t \text{ рад}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Параметры управления выбраны следующими:

$$\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 20E,$$

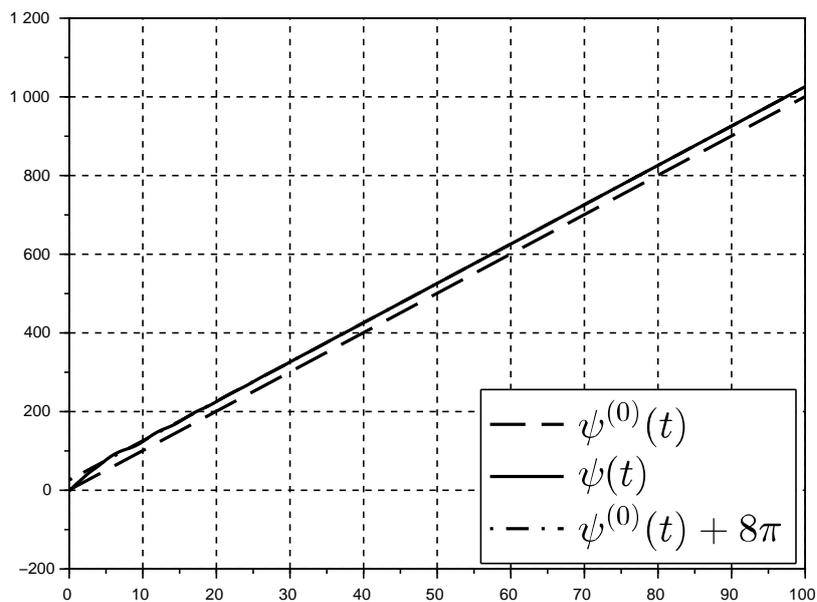
где $E \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ – единичная матрица; $h = 9$; $t = 100$ с.

На Рис. 4.1 и 4.2 показаны результаты численного моделирования движения робота. Зависимость от времени управляющих стабилизирующих моментов показана на Рис. 4.3. Анализируя графические результаты, можно сделать вывод, что закон управления (3.2)-(3.3) обеспечивает гладкую и быструю сходимость к отслеживаемой траектории.



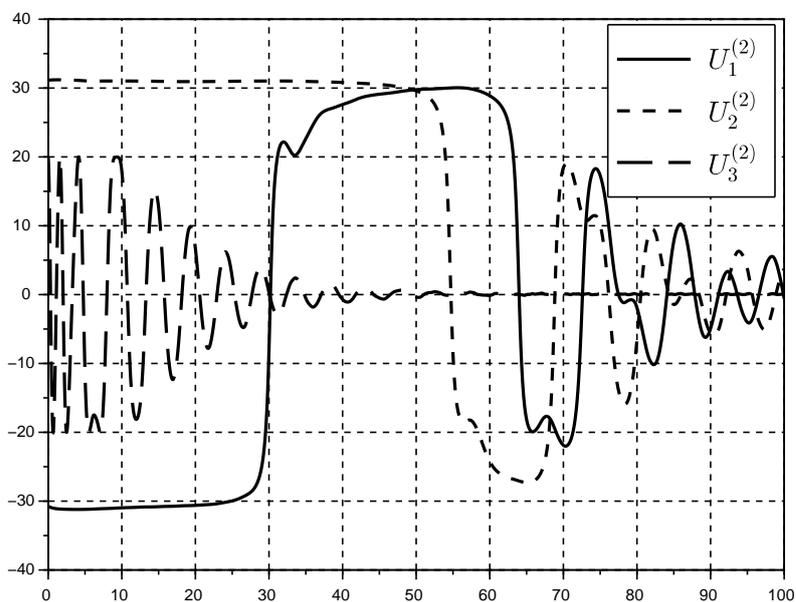
Р и с. 4.1

Траектория мобильного робота и отслеживаемая траектория



Р и с. 4.2

Зависимость от времени угловой координаты платформы робота



Р и с. 4.3

Зависимость от времени управляющих стабилизирующих моментов

Робастность найденного закона управления (3.2)-(3.3) состоит в том, что он обеспечивает решение задачи отслеживания траектории робота при любых неизвестных изменяющихся коэффициентах скольжения s_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющих заданным ограничениям, сформулированным в Теореме.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания по НИР [9.5994.2017/БЧ] и РФФИ [18-01-00702].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский, “О движении мобильного робота с роликонесущими колесами”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2007, №6, 142–149.
2. Ю.Г. Мартыненко, “Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс”, *Прикладная математика и механика*, **74**:4 (2010), 610–619.
3. А.А. Зобова, Я.В. Татаринев, “Динамика экипажа с роликонесущими колесами”, *Прикладная математика и механика*, **73**:1 (2009), 13–22.
4. А.А. Зобова, К.В. Герасимов, “Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами”, *Прикладная математика и механика*, **82**:4 (2018), 427–440.
5. А.В. Борисов, А.А. Килин, И.С. Мамаев, “Тележка с омниколесами на плоскости и сфере”, *Нелинейная динамика*, **7**:4 (2011), 785–801.
6. Ю.Л. Караваев, С.А. Трефилов, “Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильным роботом с омниколесами”, *Нелинейная динамика*, **9**:1 (2013), 91–100.
7. А.А. Килин, Ю.Л. Караваев, А.В. Клековкин, “Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 113–126.
8. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “Dynamics and control of an omniwheel vehicle”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20** (2015), 153–172.
9. Y. Liu, J. J. Zhu, R. L. Williams, J. Wu, “Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization”, *Robotics and Autonomous Systems*, **56** (2008), 461–479.
10. H. C. Huang, C. C. Tsai, “Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties” (Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008), 2008, 5383–5388.
11. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “The motion control of a wheeled mobile robot”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **79**:4 (2015), 316–324.
12. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots”, *IFAC Papers-OnLine*, **51**:4 (2018), 7–12.
13. S. J. C. Lins Barreto, A. G. Scolari Conceicao, C. E. T. Dorea, L. Martinez, E. R. De Pieri, “Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot”, *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, **19**:2 (2014), 467–476.

14. Y. Huang, Q. Cao, C. Leng, “The path-tracking controller based on dynamic model with slip for one four-wheeled OMR”, *Industrial Robot: An International Journal*, **37**:2 (2010), 193–201.
15. D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi, N.-S. Kuppuswamy, J.-H. Kim, “Nonlinear slip dynamics for a omniwheel mobile robot platform” (IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, April 10–14, 2007), 2007, 2367–2372.

Поступила 7.11.2018

MSC2010 45K05

Robust trajectory tracking control of omni-mobile robot with slipping of the wheels

© A. S. Andreev¹, O. A. Peregudova²

Abstract. In this paper we consider the problem of constructing a robust controller to track the trajectory of a mobile robot with three omni-wheels moving on a horizontal surface. A dynamic model of the robot has been constructed such that the center of mass of the circular platform is offset from its geometric center and the wheel slippage occurs during braking. The motion control of the wheeled robot is carried out by using three independent DC motors. The torques developed by the engines are linear with respect to voltage supplied to the engine and to angular velocity of the rotor. Basing on the Lyapunov function method we construct a bounded controller without velocity measurement that solves the robust trajectory tracking problem. This means that for all initial deviations the robot’s trajectory falls into a given neighborhood of the tracked trajectory after some time and remains there forever. Theorem on an ultimate boundedness of a closed system is proved. The results of numerical simulation are presented confirming the effectiveness of the proposed controller.

Key Words: wheeled mobile robot, omni-wheel, slipping, trajectory tracking control, Lyapunov function, dynamical model.

REFERENCES

1. Yu. G. Martynenko, A. M. Formalskii, “On the motion of a mobile robot with roller-carrying wheels”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **46**:6 (2007), 976–983 (In Russ.).
2. Ju. G. Martynenko, “Stability of steady motions of mobile robot with omniwheels and displacement of the center of mass”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **74**:4 (2010), 436–442 (In Russ.).
3. A. A. Zobova, Ja. V. Tatarinov, “The dynamics of an omni-mobile vehicle”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **73**:1 (2009), 8–15 (In Russ.).

¹**Aleksandr S. Andreev**, Head of Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9408-0392>, asa5208@mail.ru

²**Olga A. Peregudova**, Professor, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2701-9054>, peregudovaoa@gmail.com

4. A. A. Zobova, K. V. Gerasimov, “[The movement of a symmetric carriage on omni-wheels with massive rollers]”, *Applied Mathematics and Mechanics*, **82**:4 (2018), 427–440 (In Russ.).
5. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere”, *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*, **1**:1 (2013), 33 (In Russ.).
6. Ju. L. Karavaev, S. A. Trefilov, “[Deviation based discrete control algorithm for omni-wheeled mobile robot]”, *Nelineynaya Dinamika*, **9**:1 (2013), 91–100 (In Russ.).
7. A. A. Kilin, Ju. L. Karavaev, A. V. Klekovkin, “[Kinematic control of a high manoeuvrable mobile spherical robot with internal omni-wheeled platform]”, *Nelineynaya Dinamika*, **10**:1 (2014), 113–126 (In Russ.).
8. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “Dynamics and control of an omniwheel vehicle”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20** (2015), 153–172.
9. Y. Liu, J. J. Zhu, R. L. Williams, J. Wu, “Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization”, *Robotics and Autonomous Systems*, **56** (2008), 461–479.
10. H. C. Huang, C. C. Tsai, “Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties” (Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008), 2008, 5383–5388.
11. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “The motion control of a wheeled mobile robot”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **79**:4 (2015), 316–324.
12. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots”, *IFAC Papers-OnLine*, **51**:4 (2018), 7–12.
13. S. J. C. Lins Barreto, A. G. Scolari Conceicao, C. E. T. Dorea, L. Martinez, E. R. De Pieri, “Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot”, *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, **19**:2 (2014), 467–476.
14. Y. Huang, Q. Cao, C. Leng, “The path-tracking controller based on dynamic model with slip for one four-wheeled OMR”, *Industrial Robot: An International Journal*, **37**:2 (2010), 193–201.
15. D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi, N.-S. Kuppuswamy, J.-H. Kim, “Nonlinear slip dynamics for a omniwheel mobile robot platform” (IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, April 10–14, 2007), 2007, 2367–2372.

Submitted 7.11.2018