

УДК 519.63

## Построение параллельного вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения задач конвективного теплообмена на разнесенных неструктурированных сетках

© Р. В. Жалнин<sup>1</sup>, В. Ф. Масягин<sup>2</sup>, Е. Е. Пескова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена построению параллельного вычислительного алгоритма для решения задач конвективного теплообмена с использованием метода Галеркина с разрывными базисными функциями на неструктурированных разнесенных сетках. Вычислительный алгоритм реализован на основе технологии параллельных вычислений MPI. Особенностью алгоритма является то, что в межпроцессорном обмене не участвуют вспомогательные переменные, возникающие при аппроксимации диффузионных членов с помощью разрывного метода Галеркина. Разработанный параллельный алгоритм применен для решения задачи о распределении температуры в нефтяном пласте с трещиной гидроразрыва и вертикальной нагнетательной скважиной. В работе представлены результаты вычислительного эксперимента и приведены оценки эффективности параллельного алгоритма.

**Ключевые слова:** метод Галеркина с разрывными базисными функциями, вертикальная нагнетательная скважина, гидравлический разрыв пласта, уравнение конвективного теплообмена, разнесенные сетки, параллельные вычисления, технология MPI

### 1. Введение

Работа посвящена построению параллельного численного алгоритма для решения уравнений конвекции-диффузии с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями (DG). Метод DG широко используется для решения уравнений конвекции-диффузии [1–3]. В последнее время активно развиваются модификации DG на разнесенных сетках, которые получили название Staggered Discontinuous Galerkin Method. Применение данных модификаций к решению различных задач показывает хорошие результаты [4–8]. Данный подход позволяет сочетать в себе преимущества DG и методов на разнесенных сетках.

<sup>1</sup>**Жалнин Руслан Викторович**, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

<sup>2</sup>**Масягин Виктор Федорович**, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, [vmasyagin@gmail.com](mailto:vmasyagin@gmail.com)

<sup>3</sup>**Пескова Елизавета Евгеньевна**, младший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, [e.e.peskova@mail.ru](mailto:e.e.peskova@mail.ru)

Ранее авторами была предложена оригинальная модификация метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках [13–17]. В данном подходе вспомогательные величины, возникающие при аппроксимации исходных уравнений с помощью DG, ищутся на двойственной сетке, ячейки которой представляют собой медианные контрольные объемы вокруг узлов основной сетки.

Несмотря на очевидные достоинства метода, его реализация требует значительных вычислительных затрат. Настоящая работа посвящена построению и реализации параллельного алгоритма на основе метода Галекркина с разрывными базисными функциями для решения задач конвективного теплообмена на неструктурированных разнесенных сетках.

## 2. Метод Галеркина с разрывными базисными функциями

Рассмотрение численного алгоритма для метода Галеркина с разрывными базисными функциями проведем на примере следующей начально-краевой задачи для переноса тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

Задаются начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \\ T(x, y, 0) &= T_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $V_x, V_y$  — компоненты вектора скорости движения теплоносителя;  $g$  — температура на границе области;  $T_0$  — температура в начальный момент времени.

Производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке с использованием пространства разрывных функций. Поэтому отдельно рассматриваются потоковые переменные как вспомогательные неизвестные уравнения теплопроводности. Исходное уравнение переформулируется в следующую сопряженную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial}{\partial y} \omega_y - \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ \omega_x = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \omega_y = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями область  $D$ , на которой ищется решение, покрывается треугольной сеткой, удовлетворяющей критерию Делоне. Также вводится в рассмотрение сетка, построенная из медианных контрольных объемов  $D_j$ , построенных относительно вершин основной треугольной сетки. На каждом треугольном элементе  $K_j$  температура ищется в виде проекции на пространство полиномов  $P(x, y)$  степени  $st$  в базисе  $\{\phi_i^j(x, y)\}$  с зависящими от времени коэффициентами:

$$T_j(x, y, t) = \sum_{k=0}^{st} T_{kj}(t) \phi_k^j(x, y).$$

На каждом элементе  $D_j$  потоковые переменные ищутся в виде проекции на пространство полиномов  $P(x, y)$  степени  $st$  в базисе  $\{\psi_i^j(x, y)\}$  с зависящими от времени коэффициентами:

$$\omega_{xj}(x, y, t) = \sum_{k=0}^{st} \omega_{xkj}(t) \psi_k^j(x, y),$$

$$\omega_{yj}(x, y, t) = \sum_{k=0}^{st} \omega_{ykj}(t) \psi_k^j(x, y).$$

В работе в качестве пробных (базисных) функций на треугольниках используется базис Тейлора:

$$\phi_0^j = 1, \phi_1^j = \frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j}, \phi_2^j = \frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j},$$

где  $(x_{cj}, y_{cj})$  — координаты центра масс треугольника  $K_j$ ;  $\Delta x_j, \Delta y_j$  — проекции треугольника  $K_j$  на соответствующие оси координат.

В качестве пробных (базисных) функций на ячейках двойственной сетки также используется базис Тейлора:

$$\psi_0^j = 1, \psi_1^j = \frac{x - x'_{cj}}{\Delta x'_j}, \psi_2^j = \frac{y - y'_{cj}}{\Delta y'_j},$$

где  $(x'_c, y'_c)$  — координаты центра масс соответствующей ячейки двойственной сетки  $\Delta x', \Delta y'$  — проекции ячейки  $D_j$  двойственной сетки на соответствующие оси координат.

Приближенное решение системы (2.2) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующих систем:

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \int_{K_j} \phi_i^j \phi_k^j dS = \oint_{\partial K_j} n_x \omega_x^\Gamma \phi_k^j dl + \oint_{\partial K_j} n_y \omega_y^\Gamma \phi_k^j dl - \int_{K_j} \omega_x \frac{\partial \phi_k^j}{\partial x} dS - \int_{K_j} \omega_y \frac{\partial \phi_k^j}{\partial y} dS -$$

$$- \left( \oint_{\partial K_j} V_x T^\Gamma n_x \phi_k^j dl + \oint_{\partial K_j} V_y T^\Gamma n_y \phi_k^j dl \right) +$$

$$+ \left( \int_{K_j} T_j \frac{\partial (V_x \phi_k^j)}{\partial x} dS + \int_{K_j} T_j \frac{\partial (V_y \phi_k^j)}{\partial y} dS \right), \quad \forall \phi_k^j(x, y), \quad k = 0 \dots 2, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{xij} \int_{D_j} \psi_i^j \psi_k^j dS = \oint_{\partial D_j} n_x \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl + \oint_{\partial D_j} n_y \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl -$$

$$- \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial x} dS - \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial y} dS, \quad \forall \psi_k^j(x, y), \quad k = 0 \dots 2, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{yij} \int_{D_j} \psi_i^j \psi_k^j dS = \oint_{\partial D_j} n_x \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl + \oint_{\partial D_j} n_y \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl -$$

$$- \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial x} dS - \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial y} dS, \quad \forall \psi_k^j(x, y), \quad k = 0 \dots 2, \quad (2.5)$$

В системе (2.3) значения потоковых величин  $T^\Gamma$  в конвективных членах на ребрах треугольников выбираются в зависимости от направления вектора скорости подобно тому, как это сделано для уравнений газовой динамики в работе [9]. Для вычисления потоковых величин в диффузионных членах на границе элементов используются стабилизирующие добавки подобно тому, как это сделано в работе [10]. Для вычисления интегралов в системах (2.3)–(2.5) используются квадратурные формулы Гаусса необходимой точности [11]. Применяется двухточечный шаблон для вычисления интегралов по контуру и трехточечный – для вычисления интегралов по элементам. Для обеспечения монотонности решения применяется TVD-ограничитель на каждом шаге по времени [12]. Для аппроксимации по времени используется явная схема Эйлера.

### 3. Параллельный вычислительный алгоритм

Построение параллельного вычислительного алгоритма основано на технологии MPI. С помощью пакета METIS проведено геометрическое разбиение расчетной области на множество связанных подобластей по количеству используемых процессоров (рис. 3.1), на каждой из которых вычисляются значения температурного поля с использованием известных начальных и граничных условий. На Рис. 3.2 представлен фрагмент расчетной сетки возле трещины гидроразрыва, где генерируется подробная сетка, поскольку именно в этой области наблюдается высокий градиент температуры. При таком разбиении в сетке могут присутствовать сильно вытянутые ячейки, на которых возникают проблемы с вычислением потоковых переменных. Методика на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями [13–17] лишена этого недостатка за счет рассмотрения потоковых переменных на медианных контрольных объемах [18]. В других областях генерируется менее подробная сетка для сокращения времени вычислений.

На каждой из подобластей дополнительно хранится информация о соседях первого (соседи по ребру) и второго (соседи по вершине, исключая соседей первого уровня) уровней. Для определения граничных условий между соседними подобластями организован межпроцессорный обмен, для которого использовались команды библиотеки MPICH. Он устроен таким образом, что соседние подобласти обмениваются только искомыми функциями  $T_j$ , при этом потоковые величины  $\omega_{xj}, \omega_{yj}$  не участвуют в обмене за счет того, что вся необходимая информация для их вычисления хранится на каждом процессоре. Такой подход существенно снижает объем передаваемых данных. Для отправки и получения данных применяются парные блокирующие функции  $MPI\_Send()$ ,  $MPI\_Recv()$ , выбор которых обусловлен наличием в параллельном алгоритме только обменов между двумя процессорами.

В общем виде вычислительный алгоритм описывается следующим образом:

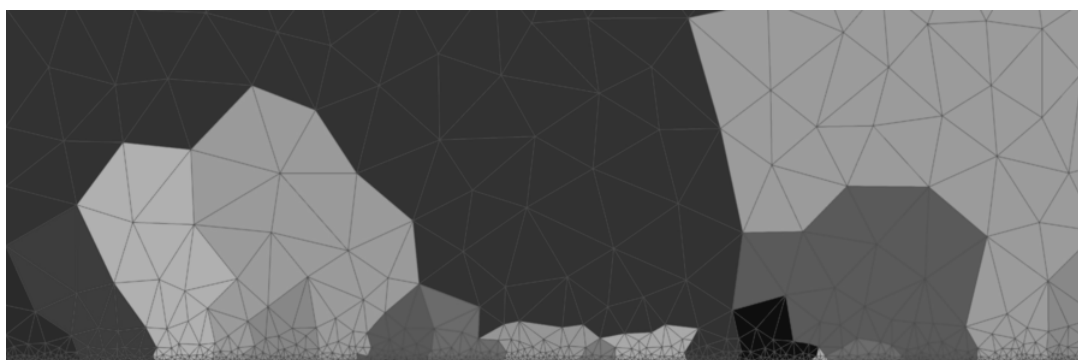
1. начальная инициализация данных;
2. межпроцессорный обмен данными основной сетки;
3. вычисление вспомогательных потоковых величин на ячейках двойственной сетки на текущем шаге по времени с использованием значений температуры на предыдущем шаге по времени или начальное значение для всех внутренних и граничных узлов процессора, согласно системам (2.4)–(2.5);
4. вычисление температуры согласно системе (2.3):
  - (а) вычисление конвективных членов в правой части системы;

- (b) вычисление диффузионных членов в правой части системы;
  - (c) вычисление температуры на текущем шаге по времени;
5. вывод промежуточных результатов расчета, если число шагов кратно значению специальной настройки;
  6. увеличение «счетчика» времени;
  7. если не достигнуто конечное значение времени, переход к п. 2;
  8. завершение работы программы.



Р и с у н о к 3.1

Декомпозиция расчетной области



Р и с у н о к 3.2

Расчетная сетка возле трещины

Исследование эффективности параллельного алгоритма осуществлялось посредством оценки времени выполнения программы на одном процессоре и на нескольких процессорах. При оценке использовались следующие характеристики – ускорение:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}, \quad (3.1)$$

где  $T_1$  – время выполнения на одном процессоре;  $T_p$  – время выполнения на  $p$  процессорах; эффективность:

$$E_p = \frac{S_p}{p}. \quad (3.2)$$

Таблица 1: Ускорение и эффективность работы параллельного алгоритма, 60 169 ячеек

Число процессоров	Время работы программы, с	Ускорение	Эффективность
1	168	–	–
2	83	2.024	1.012
4	42	4.000	1.000
8	22	7.636	0.955
16	12	14.000	0.875

Таблица 2: Ускорение и эффективность работы параллельного алгоритма, 125 052 ячеек

Число процессоров	Время работы программы, с	Ускорение	Эффективность
1	354	–	–
2	174	2.034	1.017
4	89	3.978	0.994
8	45	7.867	0.983
16	24	14.750	0.922

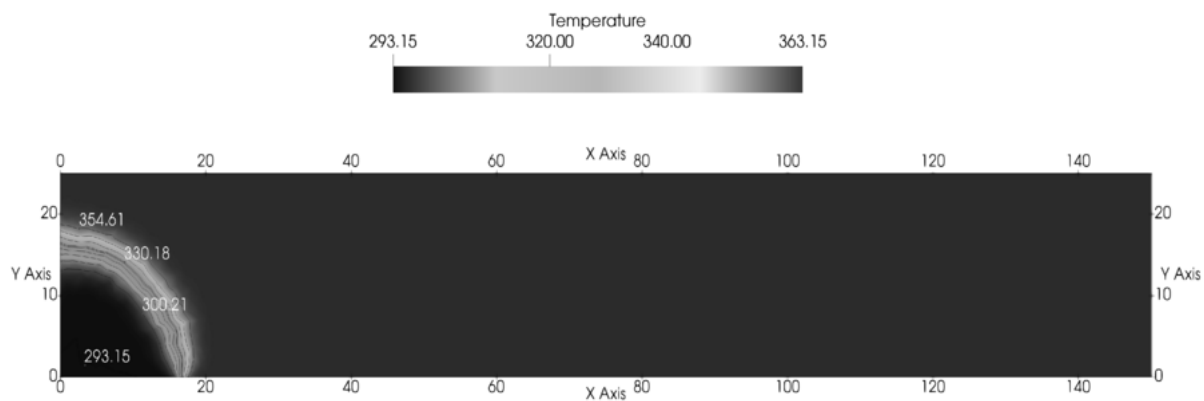
В таблицах 1 и 2 показано время выполнения программы в зависимости от числа используемых в расчетах процессоров с количеством расчетных ячеек 60 169 и 125 052 соответственно. Расчет проводился для 100 шагов по времени. Из таблиц видно, что разработанный параллельный алгоритм достаточно эффективен и дает значительное ускорение при увеличении числа процессоров.

Все расчеты для задачи, описанной в следующем разделе, проводились на кластере с вычислительными ядрами CPU Intel Xeon.

#### 4. Математическое моделирование распространения температуры в пласте с трещиной гидроразрыва и вертикальной нагнетательной скважиной

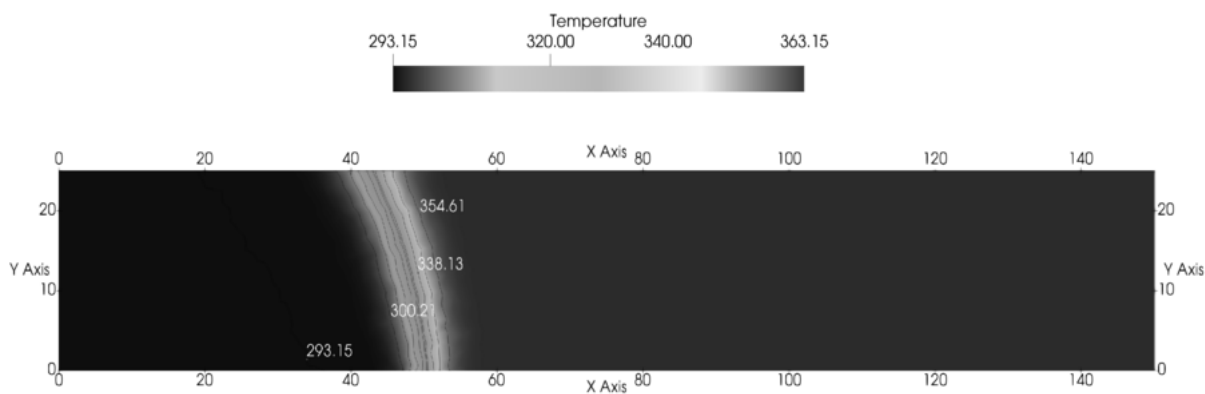
С помощью разработанного параллельного алгоритма проведено математическое моделирование динамики распространения температуры в нефтяном пласте с трещиной и вертикальной нагнетательной скважиной [14].

На Рис. 4.1–4.4 представлено распространение температурного фронта по пласту в различные моменты времени. Ввиду симметрии рассматриваемой области и граничных условий достаточно рассматривать только четверть расчетной области. Из рисунков видно, как во время работы нагнетательной скважины холодная закачиваемая жидкость охлаждает пласт. Значительные изменения температуры наблюдаются вблизи скважины и вдоль распространения трещины, в частности, на створках трещины.



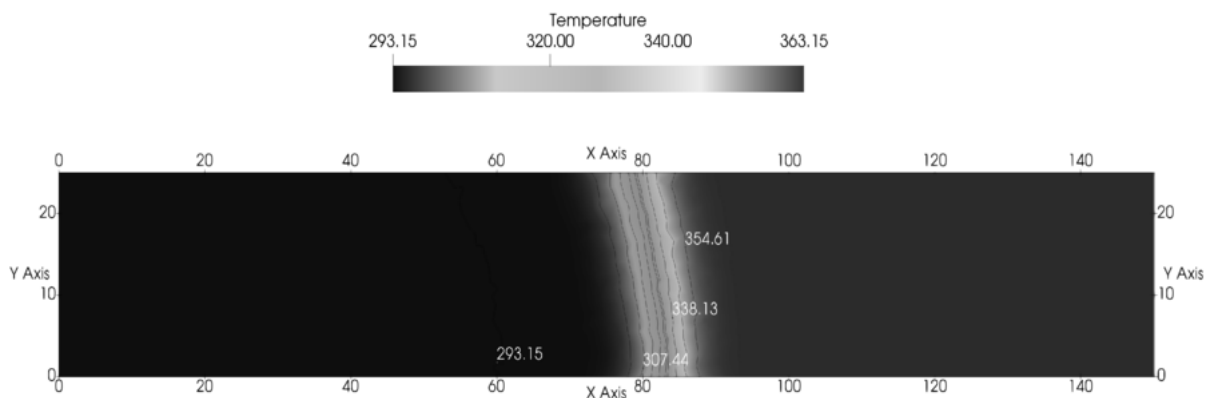
Р и с у н о к 4.1

Распределение температуры на момент времени  $t = 1.0$ , 60 169 ячеек



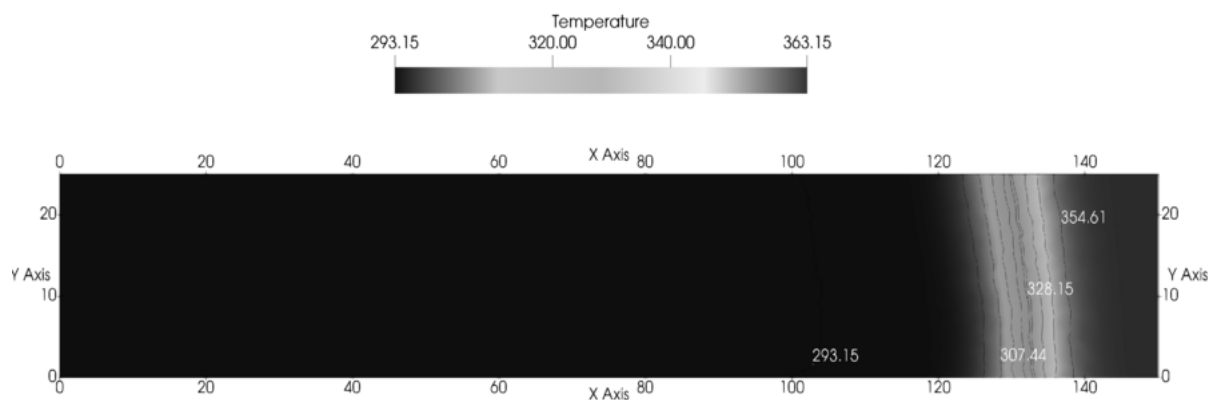
Р и с у н о к 4.2

Распределение температуры на момент времени  $t = 3.0$ , 60 169 ячеек



Р и с у н о к 4.3

Распределение температуры на момент времени  $t = 5.0$ , 60 169 ячеек



Р и с у н о к 4.4

Распределение температуры на момент времени  $t = 8.0$ , 60 169 ячеек

Для верификации работы параллельного алгоритма проведено сравнение численных результатов последовательной и параллельной версий программы на разном количестве процессоров с использованием сеток различной размерности. Совпадение результатов получено во всех случаях, что позволяет сделать вывод о правильности построенного параллельного алгоритма.

Таким образом, разработан и реализован эффективный параллельный алгоритм на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений переноса тепла на неструктурированных разнесенных сетках. С помощью разработанного программного комплекса было проведено исследование температурного поля в нефтяном пласте с трещиной гидроразрыва и вертикальной нагнетательной скважиной. Полученные результаты вычислительного эксперимента хорошо согласуются с полученными ранее результатами с помощью метода конечных объемов на адаптивных сетках [15] и с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями без использования параллельных технологий [14].

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9), РФФИ (проект 18-31-00102) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. J. Sudirham, J. J. W. van der Vegt, R. M. J. van Damme, “Space-time discontinuous Galerkin method for advection-diffusion problems on time-dependent domains”, *Applied Numerical Mathematics*, **56**:2/12 (2006), 1491–1518.
2. I. Oikawa, “Hybridized discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **31**:2 (2014), 335–354.
3. H. Wang, S. Wang, Q. Zhang, C.-W. Shu, “Local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for multi-dimensional convection-diffusion problems”, *ESAIM: M2AN*, **50**:4 (2016), 1083–1105.
4. L. Zhao, E.-J. Park, “A priori and a posteriori error analysis of a staggered discontinuous Galerkin method for convection dominant diffusion equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **346** (2018), 63–83.



5. J. Du, E. Chung, “An adaptive staggered discontinuous Galerkin method for the steady state convection-diffusion equation”, *Journal of Scientific Computing*, 2018, 1–29.
6. M. Tavelli, M. Dumbser, “A pressure-based semi-implicit space-time discontinuous Galerkin method on staggered unstructured meshes for the solution of the compressible Navier-Stokes equations at all Mach numbers”, *Journal of Computational Physics*, **341** (2017), 341–376.
7. E. Chung, W. Leung, “A sub-grid structure enhanced discontinuous Galerkin method for multiscale diffusion and convection-diffusion problems”, *Communications in Computational Physics*, **14**:2 (2013), 370–392.
8. M. Tavelli, M. Dumbser, “A staggered space-time discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations on two-dimensional triangular meshes”, *Computers & Fluids*, **119** (2015), 235–249.
9. С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов, *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, Наука, М., 1976, 400 с.
10. D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini, “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**:5 (2001), 1749–1779.
11. B. Q. Li, *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 p.
12. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Изд. 2-е, исправл. и доп.*, Физматлит, М., 2012, 656 с.
13. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **19**:3 (2015), 523–533.
14. В. Ф. Масыгин, Ю. О. Бобренёва, И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, “Применение разрывного метода Галёркина для моделирования температурного поля в вертикальной скважине с трещиной гидроразрыва”, *Системы управления и информационные технологии*, **63**:1 (2016), 13–16.
15. Ю. О. Бобренёва, И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, В. Ф. Масыгин, “Моделирование температурных полей в вертикальной скважине с техногенной трещиной с использованием адаптивных сеток”, *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2016): тр. междунар. науч. конф. (г. Архангельск, 28 марта — 1 апреля 2016 г.)*, Издательский центр ЮУрГУ, Челябинск, 2016, 454–462.
16. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:6 (2016), 989–998.

17. И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, А. С. Шуршина, “Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18:2** (2016), 48–54.
18. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированной сетке”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16:2** (2014), 7–13.

Поступила 21.10.2018

MSC2010 34C20

## Construction of a parallel computational algorithm based on the Galerkin discontinuous method for solving convective heat transfer problems on unstructured staggered grids

© R. V. Zhalnin<sup>1</sup>, V. F. Masyagin<sup>2</sup>, E. E. Peskova<sup>3</sup>

**Abstract.** The present paper is devoted to the construction of a parallel computational algorithm for solving convective heat transfer problems using the discontinuous Galerkin method on unstructured staggered grids. The computational algorithm is implemented on the basis of MPI parallel computing technology. A special feature of the algorithm is that auxiliary variables that occur when the diffusion terms are approximated by the discontinuous Galerkin method are not involved in interprocessor exchange. The developed parallel algorithm is applied to modelling of temperature dynamics in formation with a vertical injection well and hydraulic fracturing. The paper presents the results of a computational experiment and estimates the effectiveness of a parallel algorithm.

**Key Words:** discontinuous Galerkin method, vertical injection well, hydraulic fracturing, convective heat transfer equation, staggered grids, parallel computing, MPI technology

## REFERENCES

1. J. J. Sudirham, J. J. W. van der Vegt, R. M. J. van Damme, “Space-time discontinuous Galerkin method for advection-diffusion problems on time-dependent domains”, *Applied Numerical Mathematics*, **56:2/12** (2006), 1491–1518.
2. I. Oikawa, “Hybridized discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **31:2** (2014), 335–354.

<sup>1</sup>**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>2</sup>**Viktor F. Masyagin**, Senior Researcher, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, vmasyagin@gmail.com

<sup>3</sup>**Elizaveta E. Peskova**, Junior Researcher, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@mail.ru

3. H. Wang, S. Wang, Q. Zhang, C.-W. Shu, “Local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for multi-dimensional convection-diffusion problems”, *ESAIM: M2AN*, **50**:4 (2016), 1083–1105.
4. L. Zhao, E.-J. Park, “A priori and a posteriori error analysis of a staggered discontinuous Galerkin method for convection dominant diffusion equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **346** (2018), 63–83.
5. J. Du, E. Chung, “An adaptive staggered discontinuous Galerkin method for the steady state convection-diffusion equation”, *Journal of Scientific Computing*, 2018, 1–29.
6. M. Tavelli, M. Dumbser, “A pressure-based semi-implicit space-time discontinuous Galerkin method on staggered unstructured meshes for the solution of the compressible Navier-Stokes equations at all Mach numbers”, *Journal of Computational Physics*, **341** (2017), 341–376.
7. E. Chung, W. Leung, “A sub-grid structure enhanced discontinuous Galerkin method for multiscale diffusion and convection-diffusion problems”, *Communications in Computational Physics*, **14**:2 (2013), 370–392.
8. M. Tavelli, M. Dumbser, “A staggered space-time discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations on two-dimensional triangular meshes”, *Computers & Fluids*, **119** (2015), 235–249.
9. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. YA. Ivanov, A. N. Krajko, G. P. Prokopov, *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 400 p.
10. D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini, “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**:5 (2001), 1749–1779.
11. B. Q. Li, *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 p.
12. A. G. Kulikovskiy, N. V. Pogorelov, A. Yu. Semenov, *[Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems], 2nd ed., corrected. and ext.*, Fizmatlit, Moscow, 2012 (In Russ.), 656 p.
13. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “[Solution of 3D heat conduction equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids]”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta: Fiziko-matematicheskije nauki*, **19**:3 (2015), 523–533 (In Russ.).
14. V. F. Masyagin, Yu. O. Bobreneva, I. M. Gubaidullin, R. V. Zhalnin, “[Application of discontinuous Galerkin method for modeling of the temperature field in a vertical well with hydraulic fracture]”, *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii*, **63**:1 (2016), 13–16 (In Russ.).
15. Yu. O. Bobreneva, I. M. Gubaidullin, R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, “[Modelling of temperature fields in a vertical well with a man-made crack using adaptive grids]”, *PCT 2016 Parallel Computing Technologies Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies*, 2016, 454–462 (In Russ.).

16. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “[Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids]”, *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **56**:6 (2016), 989–998 (In Russ.).
17. I. M. Gubaidullin, R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, A. S. Shurshina, “[Application of the DG method for solution of inverse problem of medicine diffusion out from the chitosan film]”, *Zhurnal SVMO*, **18**:2 (2016), 48–54 (In Russ.).
18. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “[Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids]”, *Zhurnal SVMO*, **16**:2 (2014), 7–13 (In Russ.).

*Submitted 21.10.2018*