

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.318-326

УДК 532.529:541.182

Динамика осаждения частицы в вязкой жидкости при наличии двух плоских стенок.© С. И. Мартынов¹, Т. В. Пронькина², Н. В. Дворянинова³, Т. В. Карягина⁴

Аннотация. Рассматривается модельная задача об осаждении твердой сферической частицы в вязкой жидкости, граничащей с двумя твердыми плоскими поверхностями. Для нахождения решения уравнений гидродинамики в приближении малых чисел Рейнольдса с граничными условиями на частице и двух плоскостях используется процедура, разработанная для численного моделирования динамики большого числа частиц в вязкой жидкости с одной плоской стенкой. Процедура основана на использовании фиктивных частиц, расположенных симметрично реальным относительно плоскости. Для решения задачи об осаждении реальной частицы при наличии двух плоскостей получается система фиктивных частиц. Приближенное решение найдено с использованием четырех фиктивных частиц. На основе этого решения получены численные результаты по моделированию динамики осаждения частицы для случая параллельной и перпендикулярной ориентации плоскостей относительно друг друга. В частности, найдены значения линейной и угловой скорости частицы в зависимости от расстояния до каждой из плоскостей и направления действия силы тяжести. В предельном случае, когда одна из плоскостей находится бесконечно далеко от частицы получаем известные результаты вдоль и перпендикулярно одной плоскости.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, частица, гидродинамическое взаимодействие, осаждение, плоские стенки.

1. Введение

В последние годы интенсивно развиваются микрофлюидные системы [1], [2], [3]. Одно из перспективных направлений развития - лаборатории на чипе (lab-on-a-chip) [4]. Их основой являются так называемые микрофлюидные модули, в которых происходит управление объемами жидкостей (объемом от 10^{-9} до 10^{-15} л). Такие капли являются

¹ **Мартынов Сергей Иванович**, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет" (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16.), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

² **Пронькина Татьяна Васильевна**, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет" (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4331-3675>, pronkinatv@mail.ru

³ **Дворянинова Наталья Васильевна**, ведущий программист вычислительной лаборатории факультета математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО "Мордовский государственный университет им.Н.П. Огарева" (430005 г. Саранск, ул. Большевикская, д.68.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6280-6454>, dvorjaninovanv@mail.ru

⁴ **Карягина Татьяна Васильевна**, доцент кафедры информатики и прикладной математики факультета информационных технологий, ФГБОУ ВПО "Российский государственный социальный университет" (129226 г. Москва, ул. Вильгельма Пика, д.4, стр.1.), кандидат технических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1778-2980>, zolinatv@mail.ru

своеобразными реакционными камерами, окруженными инертной средой, в которых могут быть проведены химические реакции или другие взаимодействия исследуемого объекта и изучаемого материала: подготовка проб, транспортировка, смешивание, разделение, детектирование, дозирование и другие операции. Применение микрофлюидных модулей в медицине, биологии, фармацевтике, промышленности и других областях открывает новые возможности по существенному снижению стоимости, сложности и сроков проведения анализов, исследований, контроля. Моделирование динамики капель и частиц в каналах таких устройств представляет актуальную задачу. Одна из возможных форм - каналы с плоскими стенками. Задача о движении одиночной частицы в вязкой жидкости при наличии плоской стенки при малых числах Рейнольдса рассматривалась во многих работах. Фактически задача состоит из двух: движение частицы перпендикулярно плоской стенке и движение частицы параллельно плоской стенке. Классическое решение об осаждении одиночной частицы получено с помощью биполярных координат и приведено в работе [5]. Основная трудность в получении решения - удовлетворить граничным условиям на двух геометрически разных поверхностях: сфере и плоскости. Различные способы нахождения приближенного аналитического решения задачи, в том числе и методом отражения, приведены в [6]. Асимптотическое решение для движения сферы вблизи плоской стенки дано в [7], [8]. В последние годы появилось много работ по численному моделированию динамики частицы или капли в каналах с плоскими стенками [9], [10]. Однако применяемые методы решения задачи о взаимодействии частицы с плоскостью или двумя плоскостями затруднительно применить для случая большого числа взаимодействующих частиц в потоке жидкости при наличии плоских стенок.

В работе [11] разработан метод и его программная реализация для численного расчета динамики конечного числа частиц в потоке вязкой жидкости при наличии плоской стенки. Метод сводит задачу о взаимодействии частиц со стенкой к задаче о взаимодействии реальных и фиктивных частиц, расположенных симметрично первым относительно плоскости стенки. Граничные условия на стенке удовлетворяются точно, а на частицах - приближенно. Метод отличен от известных, использующих фиктивные частицы, например от метода зеркальных отражений, и позволяет рассчитывать динамику группы частиц, взаимодействующих между собой и стенкой. На основе этого метода проведено численное моделирование динамики осаждения частицы в вязкой жидкости для двух ориентаций плоских поверхностей - параллельной и перпендикулярной.

2. Постановка задачи и метод решения

Пусть единичная твердая частица A радиуса a помещена в неограниченную несжимаемую жидкость вязкости η . В жидкости также присутствуют неподвижные плоские твердые поверхности α и β (Рис. 2.1). Скорость и давление невозмущенного потока жидкости (т.е. такого потока, который был бы в отсутствии частиц) предполагаются заданными в виде двух функций: $\vec{U}(\vec{x})$, $P(\vec{x})$.

Скорость $\vec{u}'(\vec{x})$ и давление $p'(\vec{x})$ возмущенного потока будем рассматривать в виде суммы скорости и давления невозмущенного потока и скорости и давления потока возмущения

$$\vec{u}'(\vec{x}) = \vec{U}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{x})$$

$$p'(\vec{x}) = P(\vec{x}) + p(\vec{x})$$

Считая $Re < 1$, запишем уравнения для скорости $\vec{u}(\vec{x})$ и давления $p(\vec{x})$ возмущения в приближении Стокса

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla p \quad (2.1)$$

Плоские стенки α и β считаем неподвижными с граничными условиями на них в виде

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \quad (\vec{x} + \vec{h}) \perp \vec{h}, \\ u_i &= 0 \quad (\vec{x} + \vec{m}) \perp \vec{m} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее через u_i будем обозначать i -ую компоненту вектора \vec{u} , i принимает значения 1, 2, 3. На поверхности частицы граничное условие записывается в виде

$$|\vec{x}| = a: \quad U_i(\vec{x}) + u_i(\vec{x}) = V_i + \Gamma_{ij} x_j \quad (2.3)$$

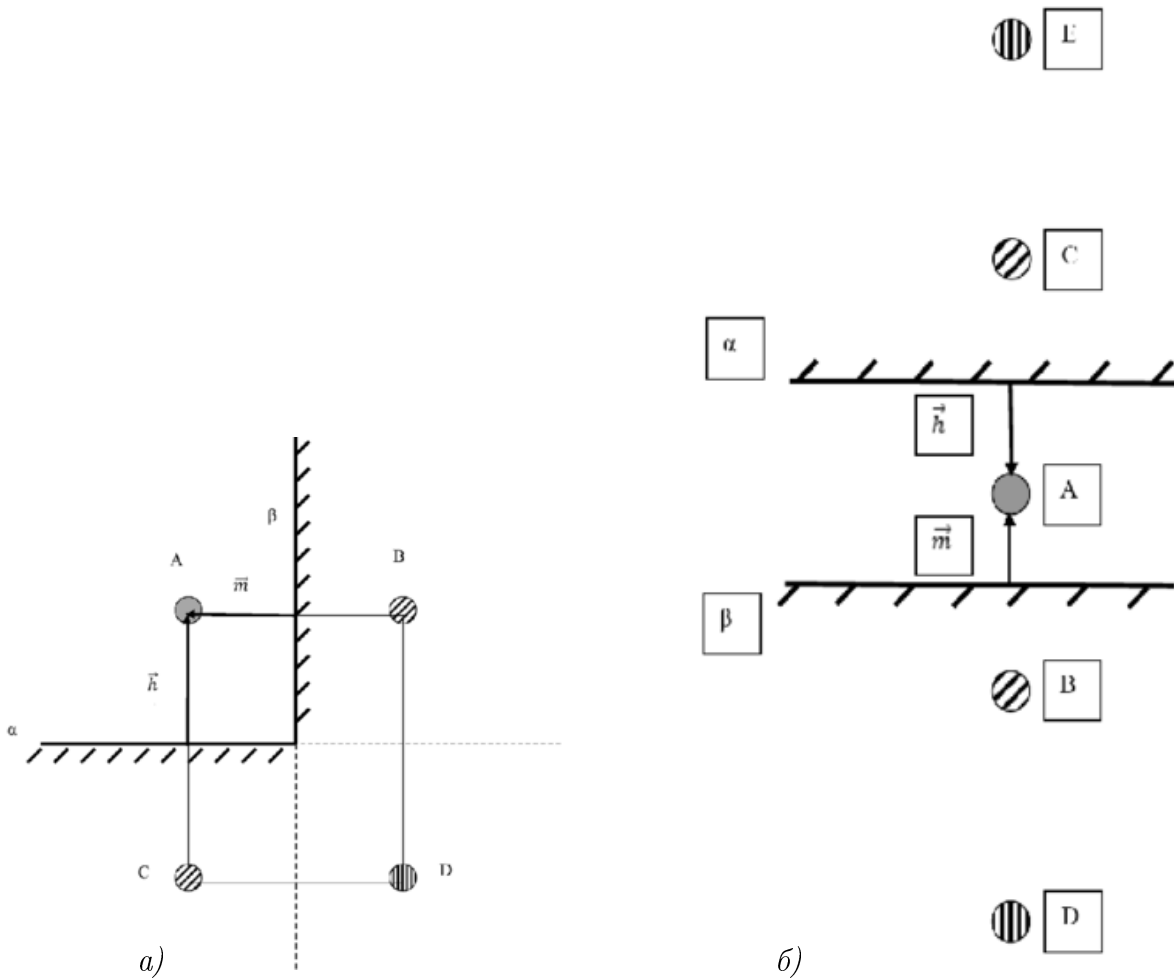
Здесь $\Gamma_{ij} = \varepsilon_{ikj} \omega_k$, \vec{V} , $\vec{\omega}$ - векторы линейной и угловой скоростей частицы соответственно, ε_{ikj} - тензор Леви-Чевиты (антисимметричный тензор третьего ранга, $\varepsilon_{123} = 1$). По повторяющимся индексам происходит суммирование (правило Эйнштейна). Наличие свободных индексов означает, что указанное уравнение должно выполняться при всех значениях этих индексов от 1 до 3.

Возмущения скорости и давления, возникающие при движении частицы, должны удовлетворять условию:

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty: \quad u_i(\vec{x}) \rightarrow 0, \quad p(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

Метод решения заключается в том, чтобы заменить плоскую стенку частицей и воспользоваться разработанной в [12] процедурой решения задачи о взаимодействии любого конечного числа частиц. Для этого вводится дополнительная фиктивная частица B , симметричная данной A относительно плоской стенки β и частица C , симметричная данной A относительно плоской стенки α (Рис. 2.1 а), а затем используется форма записи решения задачи о взаимодействии двух частиц A и B , A и C [11]. Аналогично вводится дополнительная фиктивная частица D , симметричная B и C относительно стенок α и β соответственно, и используется форма записи решения о взаимодействии двух частиц B и D , C и D [11]. Точно такая же процедура применяется и для случая параллельного расположения плоскостей (Рис. 2.1 б). Решение уравнений (2.1) для скорости имеет вид:

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{2}{3} H A_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{6} H A_j L_{ij}(\vec{x}) x^2 - \frac{3}{5} H A_{i,j} L_j(\vec{x}) - \frac{1}{10} H A_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{x}) x^2 - \\ &- \frac{4}{7} H A_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{x}) - \frac{1}{14} H A_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{x}) x^2 - \frac{5}{9} H A_{i,j,k,l} L_{j,k,l}(\vec{x}) - \frac{1}{18} H A_{j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{x}) x^2 - \\ &- \frac{2}{3} G C_i L_0(\vec{y}) - \frac{1}{6} G C_j L_{i,j}(\vec{y}) y^2 - \frac{3}{5} G C_{i,j} L_j(\vec{y}) - \frac{1}{10} G C_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{y}) y^2 - \\ &- \frac{4}{7} G C_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{y}) - \frac{1}{14} G C_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{y}) y^2 - \frac{2}{3} G B_i L_0(\vec{z}) - \frac{1}{6} G B_j L_{i,j}(\vec{z}) z^2 - \\ &- \frac{3}{5} G B_{i,j} L_j(\vec{z}) - \frac{1}{10} G B_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{z}) z^2 - \frac{4}{7} G B_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{z}) - \frac{1}{14} G B_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{z}) z^2 - \\ &- \frac{2}{3} G E_i L_0(\vec{y}_1) - \frac{1}{6} G E_j L_{i,j}(\vec{y}_1) y_1^2 - \frac{3}{5} G E_{i,j} L_j(\vec{y}_1) - \frac{1}{10} G E_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{y}_1) - \\ &- \frac{4}{7} G E_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{y}_1) - \frac{1}{14} G E_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{y}_1) y_1^2 - \frac{5}{9} G E_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{y}_1) - \\ &- \frac{1}{18} G E_{j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{y}_1) y_1^2 - \frac{6}{11} G E_{i,j,k,l,n} L_{j,k,l,n}(\vec{y}_1) - \frac{1}{22} G E_{j,k,l,n,s} L_{i,j,k,l,n,s}(\vec{y}_1) y_1^2 - \\ &- \frac{2}{3} G D_i L_0(\vec{z}_1) - \frac{1}{6} G D_j L_{i,j}(\vec{z}_1) z_1^2 - \frac{3}{5} G D_{i,j} L_j(\vec{z}_1) - \\ &- \frac{1}{10} G D_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{z}_1) z_1^2 - \frac{4}{7} G D_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{z}_1) - \frac{1}{14} G D_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{z}_1) z_1^2 - \\ &- \frac{5}{9} G D_{i,j,k,l} L_{j,k,l}(\vec{z}_1) - \frac{1}{18} G D_{j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{z}_1) z_1^2 - \frac{6}{11} G D_{i,j,k,l,n} L_{j,k,l,n}(\vec{z}_1) - \\ &- \frac{1}{22} G D_{j,k,l,n,s} L_{i,j,k,l,n,s}(\vec{z}_1) z_1^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$



Р и с у н о к 2.1

Зависимость безразмерных координат частицы A от безразмерного времени при различных углах наклона поверхности α к горизонту

Давление представляется следующей функцией

$$\begin{aligned}
 p = & HA_i L_i(\vec{x}) + HA_{[i,j]} L_{i,j}(\vec{x}) + HA_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{x}) + HA_{i,j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{x}) + GC[i] L_i(\vec{y}) + \\
 & + GC_{i,j} L_{i,j}(\vec{y}) + GC_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{y}) + GB_i L_i(\vec{z}) + GB_{i,j} L_{i,j}(\vec{z}) + GB_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{z}) + \\
 & + GE_i L_i(\vec{y}\vec{1}) + GE_{i,j} L_{i,j}(\vec{y}\vec{1}) + GE_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{y}\vec{1}) + GE_{i,j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{y}\vec{1}) + \\
 & + GE_{i,j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{y}\vec{1}) + GD_i L_i(\vec{z}\vec{1}) + GD_{i,j} L_{i,j}(\vec{z}\vec{1}) + GD_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{z}\vec{1}) + \\
 & + GD_{i,j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{z}\vec{1}) + GD_{i,j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{z}\vec{1})
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

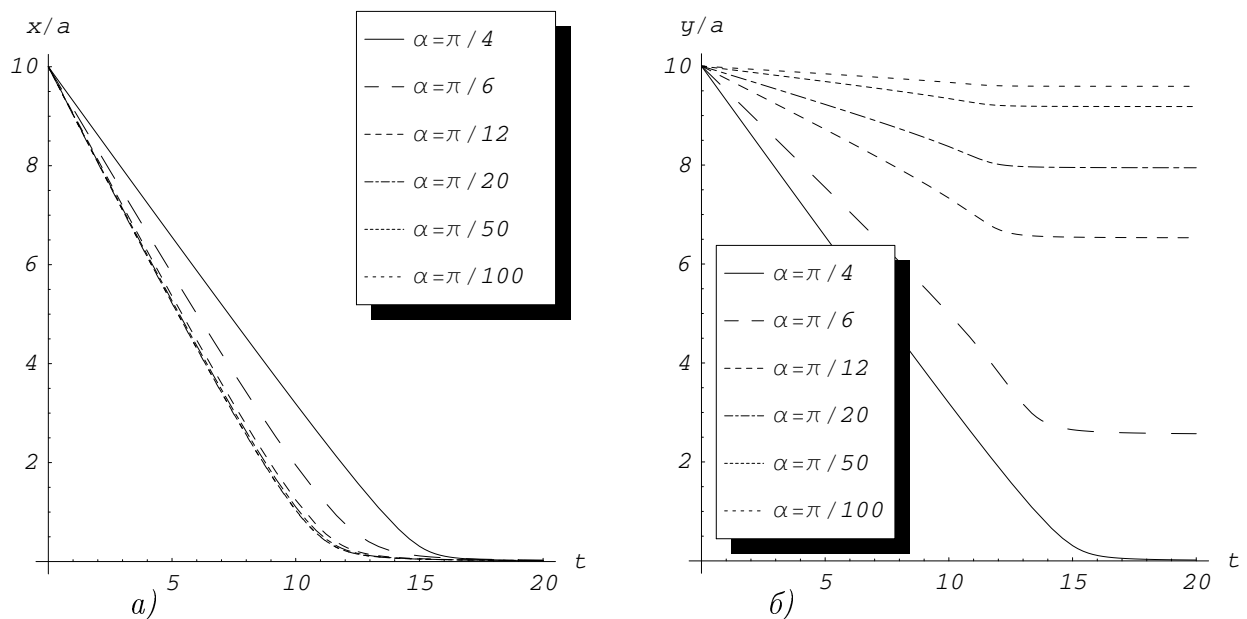
Здесь $\vec{y}\vec{1}$, \vec{y} , $\vec{z}\vec{1}$, \vec{z} - радиус-векторы, соединяющие центры фиктивных частиц B , C , D с произвольной точкой в жидкости. Так же, как и в работе [11] неизвестные тензорные коэффициенты находятся из граничных условий на поверхности стенок ((2.2)) и частицы A (2.3). Отличие от задачи с одной стенкой заключается в том, что граничные условия на двух плоских поверхностях и частицы выполняются приближенно с заданной точностью. Тензорные коэффициенты находились методом разложения по малому параметру $\varepsilon = a/h$ с точностью до $o(\varepsilon^3)$. В качестве параметра задавалось отношение $\lambda = m/h$.

3. Результаты моделирования

Для расчета динамики осаждения решались уравнения квазистационарного движения частицы под действием гидродинамической силы \vec{F} и момента \vec{T} , определяемыми из решения (2.5), (2.6), и силы тяжести $\rho_p \vec{g}$ и выталкивающей силы в жидкости $-\rho_l \vec{g}$. Система уравнений в этом случае имеет вид:

$$\vec{F} + (\rho_p - \rho_l)\vec{g} = 0, \quad \vec{T} = 0$$

Результаты численного моделирования динамики частицы A для случая перпендикулярно расположенных плоских стенок представлены на (Рис.3.1) и (Рис. 3.2). Здесь в качестве характерного параметра использовалась скорость осаждения V_0 частицы A в отсутствии стенок.

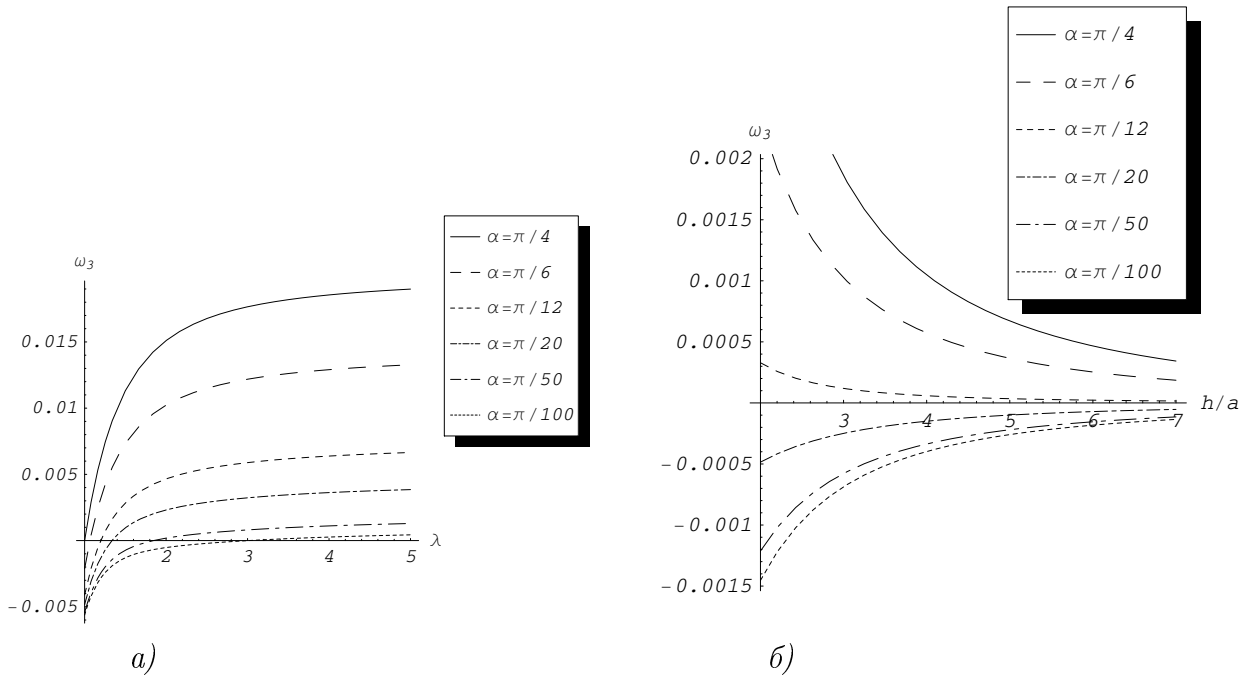


Р и с у н о к 3.1

Зависимость безразмерных координат частицы A от безразмерного времени при различных углах наклона поверхности α к горизонту

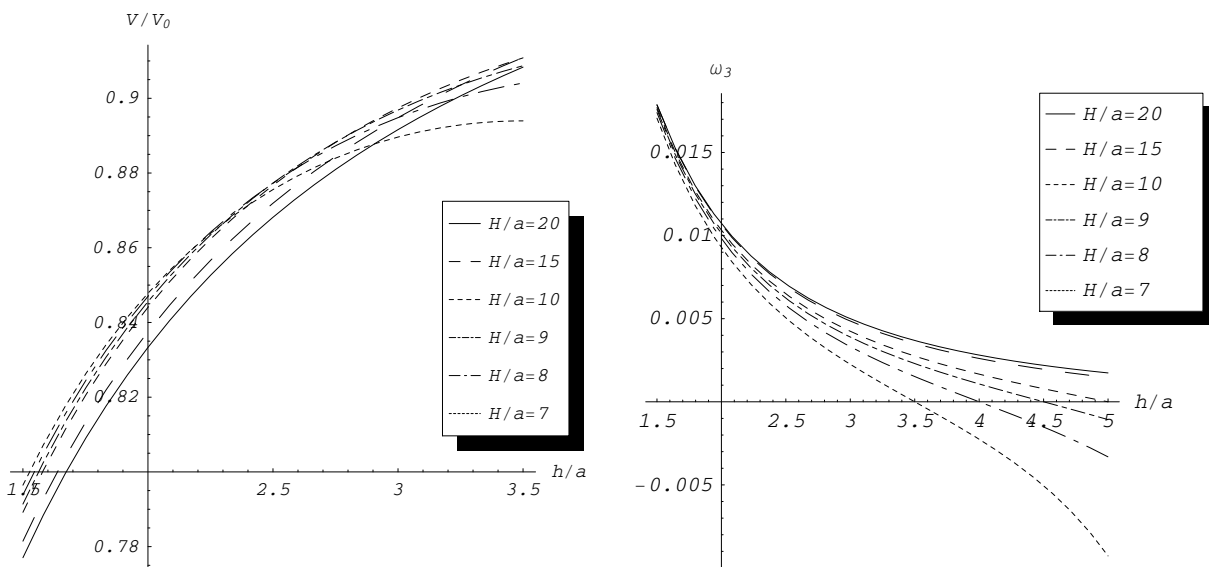
Как видно из графиков, осаждение частицы при угле наклона 45° и при одинаковом начальном расстоянии до плоскостей $\lambda = 1$ происходит без вращения. При других углах наклона и начальном положении частицы относительно плоскостей угловая скорость может изменять свой знак, то есть частица меняет направление своего вращения.

Аналогичные вычисления были проделаны для случая осаждения при параллельном расположении плоскостей. Результаты моделирования представлены на (Рис. 3.3).



Р и с у н о к 3.2

Зависимость безразмерной угловой скорости частицы A от безразмерных параметров λ (при $h/a = 1.5$) и расстояния до стенки h/a (при $\lambda = 1.25$) при различных углах наклона поверхности α к горизонту



Р и с у н о к 3.3

Линейная и угловая скорости при осаждении частицы в случае параллельных плоскостей.

Угловая скорость частицы зависит от начального расположения относительно стенок и при переходе через середину канала меняет знак. Скорость осаждения при наличии стенок меньше характерной скорости V_0 и зависит как от начального положения частицы, так и от ширины канала.

Предложенный выше подход позволяет рассчитывать динамику частиц при различных ориентациях плоскостей относительно друг друга.

4. Заключение

Рассмотрена модельная задача об осаждении частицы в вязкой жидкости при наличии двух плоских стенок. На основе разработанного ранее метода предложено приближенное решение задачи. Метод основан на замене плоской стенки фиктивной частицей, расположенной симметрично реальной относительно плоскости стенки. При этом граничные условия на стенках и частице удовлетворяются приближенно с заданной точностью. Найденное распределение скорости и давления позволяет определить гидродинамическую силу и момент силы, действующие на частицу со стороны жидкости, и рассчитывать динамику частицы. Проведен численный расчет динамики осаждения частицы при различных ориентациях силы тяжести относительно плоских стенок. Результаты численного моделирования показывают, что предложенный метод позволяет корректно рассчитывать динамику частицы. Метод может быть использован для расчета динамики большого числа частиц при произвольной ориентации стенок относительно друг друга и при произвольном числе таких стенок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Seemann, M. Brinkmann, T. Pfohl, S. Herminghaus, “Droplet based microfluidics”, *Reports on progress in physics*, **75** (2012), 016601.
2. M. T. Guo, A. Rotem, J. A. Heyman, D. A. Weitz, “Droplet microfluidics for high-throughput biological assays”, *Lab on a Chip.*, **12** (2012), 2146-2155.
3. A. Gunther, K. F. Jensen, “Multiphase microfluidics: from flow characteristics to chemical and materials synthesis”, *Lab on a Chip.*, **6**:12 (2006), 1487-1503.
4. Sh. Gupta, K. Ramesh, S. Ahmed, V. Kakkar, “Lab-on-Chip Technology: A Review on Design Trends and Future Scope in Biomedical Applications”, *International Journal of Bio-Science and Bio-Technology*, **8**:5 (2016), 311-322.
5. H. Brenner, “The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface”, *Chem. Eng. Sci.*, **16** (1961), 242-251.
6. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice - Hall, Englewood Giffs, 1965, 553 p.
7. M. E. O’Neill, K. Stewartson, “On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall”, *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 705-724.
8. M. D. A. Cooley, M. E. O’Neill, “On the slow motion generated in a viscous fluid by the approaching of a sphere to a plane wall or a stationary sphere”, *Mathematika*, **16** (1969), 37-49.
9. M. E. Staben, A. Z. Zinchenko, R. H. Davis, “Dynamic simulation of spheroid motion between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow”, *J. Fluid Mech.*, **553** (2006), 187-226.
10. A. Z. Zinchenko, J. F. Ashley, R. H. Davis, “A moving-frame boundary-integral method for particle transport in microchannels of complex shape”, *Physics of Fluids*, **24** (2012), 043302.

11. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of Particle Dynamics in a Viscous Fluid near a Plane Wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:50 (2010), 1588–1604.
12. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Effect of the Hydrodynamic Interaction of a Large Number of Particles on Their Sedimentation Rate in a Viscous Fluid”, *Fluid Dynamics*, **39**:1 (2004), 136–147.

Поступила 27.06.2018

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

Dynamics of sedimentation of particle in a viscous fluid in the presence of two flat walls

© S. I. Martynov¹, T. V. Pronkina², N. V. Dvoryaninova³, T. V. Karyagina⁴

Abstract. The model problem of sedimentation of a solid spherical particle in a viscous fluid bordering two solid planar surfaces is considered. To find the solution of the hydrodynamic equations in the approximation of small Reynolds numbers with boundary conditions on a particle and on two planes, a procedure developed for numerical simulation of the dynamics of a large number of particles in a viscous fluid with one plane wall is used. The procedure involves usage of fictive particles located symmetrically to real ones with respect to the plane. To solve the problem of the real particle’s sedimentation in the presence of two planes, a system of fictive particles is introduced. An approximate solution was found using four fictive particles. Basing on this solution, numerical results are obtained on dynamics of particle deposition for the cases of planes oriented parallel and perpendicular to each other. In particular, the values of linear and angular velocities of a particle are found, depending on the distance to each plane and on the direction of gravity. In the limiting case, when one of the planes is infinitely far from the particle, we obtain known results on the dynamics of particle sedimentation along and perpendicular to one plane.

Key Words: numerical modeling, viscous fluid, particle, hydrodynamic interaction, sedimentation, flat walls.

REFERENCES

1. R. Seemann, M. Brinkmann, T. Pfohl, S. Herminghaus, “Droplet based microfluidics”, *Reports on progress in physics*, **75** (2012), 016601 (In Eng.).

¹ **Sergey I. Martynov**, Professor of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

² **Tatyana V. Pronkina**, Assistant Professor of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4331-3675>, pronkinatv@mail.ru

³ **Natalya V. Dvoryaninova**, Leading programmer of the computer laboratory of the faculty of mathematics and information technology, Mordovia State University named after N. P. Ogarev (68 Bolshevistskaya st., Saransk, 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6280-6454>, dvorjaninovanv@mail.ru

⁴ **Tatyana V. Karyagina**, Assistant Professor of the Institute of Information Technology, Russian State Social University (4/1 Wilhelm Peak st., Moscow, 129226, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1778-2980>, zolinatv@mail.ru

2. M. T. Guo, A. Rotem, J. A. Heyman, D. A. Weitz, “Droplet microfluidics for high-throughput biological assays”, *Lab on a Chip*, **12** (2012), 2146-2155 (In Eng.).
3. A. Gunther, K. F. Jensen, “Multiphase microfluidics: from flow characteristics to chemical and materials synthesis”, *Lab on a Chip*, **6**:12 (2006), 1487-1503 (In Eng.).
4. Sh. Gupta, K. Ramesh, S. Ahmed, V. Kakkar, “Lab-on-Chip Technology: A Review on Design Trends and Future Scope in Biomedical Applications”, *International Journal of Bio-Science and Bio-Technology*, **8**:5 (2016), 311-322 (In Eng.).
5. H. Brenner, “The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface”, *Chem. Eng. Sci.*, **16** (1961), 242-251 (In Eng.).
6. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice - Hall, Englewood Giffs, 1965 (In Eng.), 553 p.
7. M. E. O’Neill, K. Stewartson, “On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall”, *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 705-724 (In Eng.).
8. M. D. A. Cooley, M. E. O’Neill, “On the slow motion generated in a viscous fluid by the approaching of a sphere to a plane wall or a stationary sphere”, *Mathematika*, **16** (1969), 37-49 (In Eng.).
9. M. E. Staben, A. Z. Zinchenko, R. H. Davis, “Dynamic simulation of spheroid motion between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow”, *J. Fluid Mech.*, **553** (2006), 187-226 (In Eng.).
10. A. Z. Zinchenko, J. F. Ashley, R. H. Davis, “A moving-frame boundary-integral method for particle transport in microchannels of complex shape”, *Physics of Fluids*, **24** (2012), 043302 (In Eng.).
11. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of Particle Dynamics in a Viscous Fluid near a Plane Wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:50 (2010), 1588–1604 (In Eng.).
12. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Effect of the Hydrodynamic Interaction of a Large Number of Particles on Their Sedimentation Rate in a Viscous Fluid”, *Fluid Dynamics*, **39**:1 (2004), 136–147 (In Eng.).

Submitted 27.06.2018