Математическое моделирование и информатика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.225-234

УДК 517.9

Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаздыванием

© **Д. А. Куликов**[1]

Аннотация. Рассматривается математическая модель макроэкономики, предложенная в свое время лауреатом нобелевской премии Р. Солоу. Классический ее вариант имеет единственный глобальный аттрактор – положительное состояние равновесия. В работе предложена модификация данной модели, учитывающая эффект запаздывания. Это приводит к необходимости изучения динамики дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Для соответствующего уравнения в работе изучен вопрос об устойчивости и локальных бифуркациях. В частности, показана возможность докритических бифуркаций циклов. Для соответствующих периодических решений получены асимптотические формулы. При анализе локальных бифуркаций использованы такие методы теории динамических систем как метод инвариантных (интегральных) многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, а также асимптотические методы анализа.

Ключевые слова: модель Солоу, уравнения с запаздывающим аргументом, устойчивость, бифуркации, циклы, асимптотические формулы.

1. Введение

В основополагающих по данной тематике работах [1–2] была предложена одна из известных математических моделей макроэкономики. В настоящее время она известна как модель Солоу. Согласно модели, динамика фондовооруженности труда определяется уравнением вида (см. также [3–4])

$$p' = -\alpha p + \beta p^k,\ p = p(\tau) > 0, \tag{1.1}$$

где $\alpha, \beta \in R, p(\tau)$ – стоимость фондов в момент времени τ. После замен

$$\tau = \gamma_0 t,\ p = \gamma_1 x,\ \gamma_0\alpha = 1, \beta\gamma_0\gamma_1^{k-1} = 1, \gamma_0, \gamma_1, \beta > 0\ \big(\gamma_0 = \frac{1}{\alpha}, \gamma_1 = \big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{1/(k-1)}\big)$$

уравнение (1.1) приобретает уже следующий вид

$$\dot{x} = -x + x^k. \tag{1.2}$$

Первые слагаемые в правых частях уравнений (1.1), (1.2) отвечают за амортизацию фондов, а вторые – пропорциональны инвестициям. Далее будем рассматривать уравнение (1.1) для нормированной стоимости фондов $x(t) > 0$, т. е. уравнение (1.2).

[1] **Куликов Дмитрий Анатольевич**, доцент кафедры дифференциальных уравнений, ФГБОУ ВО "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова" (150003, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6307-0941, kulikov_d_a@mail.ru

Дифференциальное уравнение (ДУ) (1.2) имеет единственное положительное состояние равновесия $x(t) = 1$, если $k \neq 1$. При $k \in (0, 1)$ данное состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво, т. е. все решения ДУ (1.2) с положительными начальными условиями стремятся к данному положению равновесия. Подчеркнем, что в приложениях к макроэкономике принято рассматривать вариант, когда $k \in (0, 1)$. Такого варианта выбора этого параметра и будем придерживаться в данной работе. Добавим, что при всех $k : k \in (0, 1)$ или даже $k \in (1, \infty)$, ДУ (1.2) не может иметь периодических решений, т. е. данная математическая модель, особенно при $k \in (0, 1)$, не вполне адекватно описывает реальные экономические процессы, для которых, конечно, свойственна периоды подъемов и спадов. Характерность колебательной динамики для рыночной экономики отмечалась еще в работах экономистов XIX в. Д. Рикардо, А. Смита, К. Маркса и многих других. Следовательно, ДУ (1.2) нуждается в модификациях. Наиболее естественный способ основан на учете фактора запаздывания, характерного для экономических процессов (см., например, [5–8]) в условиях рыночной экономики.

В данной работе показано, что учет запаздывания в математической модели Солоу приводит к содержательному изменению динамики решений и, в частности, позволяет выявить диапазон основных параметров задачи, при которых существуют периодические решения. В работе было рассмотрено ДУ с отклоняющимся аргументом (с запаздыванием)

$$\dot{x} = -y + x^k,\ k \in (0, 1), \tag{1.3}$$

где $x = x(t) > 0, y = y(t) = x(t - h), h > 0$, т. е. запаздывание введено в слагаемое, характеризующее амортизацию основных фондов. Такой вариант введения запаздывания вполне естественен, т. к. скорость убывания стоимости основных фондов скорее зависит от их стоимости в предшествующий период.

Если дополнить ДУ (1.3) начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \tag{1.4}$$

где заданная функция $\varphi(t) \in C[-h, 0]$, то задача Коши (1.3),(1.4) порождает по крайней мере локальный полупоток – динамическую систему. Поэтому для анализа поведения решений уравнения (1.3) можно и целесообразно использовать методы качественной теории ДУ с бесконечномерным фазовым пространством.

Подчеркнем, что уравнение (1.3) имеет состояние равновесия $x(t) = 1$. В следующем разделе изучим вопрос о его устойчивости. Перепишем уравнение (1.3) в следующем виде:

$$\dot{u} = -v + ku + \frac{k(k-1)}{2}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}u^3 + o(u^3), \tag{1.5}$$

который получается из ДУ (1.3) после замены $x = 1 + u, y = 1 + v, u = u(t), v = v(t) = u(t - h)$ и использования формулы Тейлора.

Далее в работе будет рассмотрено уравнение (1.5) и прежде всего окрестность нулевого состояния равновесия $(u = 0, v = 0)$.

Добавим, что запаздывание можно ввести и иным образом. Например, рассмотреть следующее уравнение

$$\dot{x} = -x + y^k,\ k \in (0, 1), \tag{1.6}$$

где $x = x(t), y(t) = x(t - h)$. Как и уравнения (1.2) и (1.3),оно имеет состояние равновесия $x(t) = 1$. Можно показать, что состояние равновесия $x(t) = 0$ уравнения (1.6) остается устойчивым вне зависимости от выбора величины отклонения $h > 0$ (см. раздел 2), а поэтому такой учет запаздывания не влияет существенным образом на экономическую динамику а, следовательно, изучение такой математической модели с экономической прикладной точки зрения нецелесообразно.

2. Линеаризованное уравнение

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия ДУ (1.5). Для этого необходимо рассмотреть линеаризованный вариант ДУ (1.5):

$$\dot{u} = -v + ku. \tag{2.1}$$

Известно [9–10],что вопрос об устойчивости решений линейного ДУ (2.1) может быть сведен к анализу следующего характеристического уравнения:

$$\lambda = -\exp(-\lambda h) + k. \tag{2.2}$$

При $h = 0$ оно имеет корень $\lambda = k - 1 < 0$. Найдем $\min h = H$, при котором у уравнения (2.2) появятся корни с $Re\lambda = 0$. При этом случай $\lambda = 0$ не реализуем ни при одном h. Следовательно, критический случай в задаче об устойчивости может реализоваться следующим образом: при соответствующем значении h спектру устойчивости (множеству) корней характеристического уравнения (2.2)) принадлежит пара чисто мнимых корней $\pm i\sigma$, где $\sigma > 0$. Соответствующие пары (h, σ) определяются как решения системы

$$0 = k - \cos\sigma h,\ \sigma = \sin\sigma h.$$

Пусть $\sigma h = \omega\,(h \neq 0)$. Тогда $\omega_m = arccosk + 2\pi m,\ h_m = \dfrac{\omega_m}{\sin\omega_m}$ или $\omega_p = -arccosk + 2\pi p,\ h_p = \dfrac{\omega_p}{\sin\omega_p}$, где $m, p \in Z$ – множеству целых чисел. Элементарный анализ двух последних равенств показывает, что наименьшее $H = h > 0$ определяется равенством

$$H = \frac{arccosk}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-k^2}},\ a = arccosk.$$

При этом соответствующее $\sigma = \sqrt{1-k^2} > 0$. Естественно, что при $h = H$ существует сопряженный корень $-i\sigma$.

Покажем, что при увеличении h, т. е. при $h > H$ корни $\pm i\sigma$ характеристического уравнения переходят в правую полуплоскость. Для этого положим $h = H(1+\varepsilon)$, где ε достаточно малый параметр. При таких $h = h(\varepsilon)$ получим характеристическое уравнение

$$\lambda(\varepsilon) = k - \exp(-\lambda(\varepsilon)(1+\varepsilon)H).$$

Откуда следует, что

$$\lambda'_0 = \frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \frac{i\sigma H(k - i\sigma)}{(1-Hk) + iH\sigma}$$

и, следовательно, $Re\lambda'_0 = \dfrac{H\sigma^2}{(1-Hk)^2 + H^2\sigma^2} > 0$, т. е. при увеличении $h\,(h > H)$ корни $\pm i\sigma$ переходят в правую полуплоскость: $Re\lambda > 0$. Подчеркнем, что при малых ε остальные корни характеристического уравнения лежат в полуплоскости $Re\lambda \leq -\gamma_0 < 0$, где величина γ_0 не зависит от ε. Данное утверждение вытекает из результатов, изложенных в работах [10–11].

При рассмотрении второй версии модели с запаздыванием, т. е. уравнения (1.6), анализ устойчивости состояния равновесия приводит к аналогичному характеристическому уравнению:

$$\lambda = -1 + k\exp(-\lambda h),\ k \in (0, 1).$$

При $h = 0$ оно имеет один корень $\lambda = -1 = k < 0$. Нетрудно проверить, что последний вариант характеристического уравнения не может иметь корней, принадлежащих мнимой оси. Действительно, пусть $\lambda = 0$. Тогда получили бы равенство $0 = -1 + k$. Наконец, предположение о наличии чисто мнимых корней приводит нас к системе

$$\begin{cases} \cos\sigma h = \dfrac{1}{k}, \\ k\sin\sigma h = -\sigma, \ (\dfrac{1}{k} > 1), \end{cases}$$

не имеющей решения, т. к. $\dfrac{1}{k} > 1$ по условию.

3. Периодические решения нелинейного уравнения

В ДУ (1.5) положим

$$t = \frac{H\Theta}{h(\varepsilon)}, \ h(\varepsilon) = H(1 + \gamma\varepsilon), \gamma \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1,$$

Где Θ – новое, нормированное время. В результате такой замены времени перепишем ДУ (1.5) в виде

$$u' = (1 + \gamma\varepsilon)[-v + ku + \frac{k(k-1)}{2}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}u^3 + o(u^3)], \tag{3.1}$$

где $u = u(\Theta)$, $v = u(\Theta - H)$, а штрихом обозначена производная по переменной Θ, т. е. новому нормированному времени.

Уравнение (3.1) имеет в окрестности нулевого состояния равновесия двумерное гладкое инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ [12–13]. При этом все решения уравнения (3.1) с течением времени приближаются к нему со скоростью экспоненты, если их начальные условия малы в смысле нормы фазового пространства решений. Напомним, что в нашем случае это $C[-H, 0]$ ($C[-H, 0]$ пространство непрерывных на $[-H, 0]$ функций $g(\Theta)$ с нормой $||g|| = \max\limits_{\Theta\in[-H,0]} |g(\Theta)|$), а динамика решений ДУ (1.5) восстанавливается после анализа системы двух обыкновенных ДУ нормальной формы (НФ). В рассматриваемом здесь случае НФ может быть записана в комплексной форме и имеет следующую структуру [6,7]

$$z' = (\alpha + i\beta)z + (d + ic)z|z|^2 + o(\varepsilon), \tag{3.2}$$

где $\alpha, \beta, d, c \in R$. Данные коэффициенты зависят от параметров уравнения (3.1), т. е. k и h. могут быть выписаны в явном виде, что будет сделано ниже после реализации алгоритма построения определяющего уравнения (НФ).Для такой цели в настоящее время принято использовать адаптацию алгоритма Крылова-Боголюбова для бесконечномерных динамических систем [6-8]. В НФ (3.2) $z = z(s)$ – комплексная функция $s = \varepsilon\Theta, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Если считать, что априори $d \neq 0$, т. е. отлична от нуля первая ляпуновская величина, то решение уравнения (3.1) с начальными условиями из малой окрестности нулевого решения можно и целесообразно искать в следующем виде:

$$u(\Theta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(\Theta, z) + \varepsilon u_2(\Theta, z) + \varepsilon^{3/2}u_3(\Theta, z) + O(\varepsilon^2), \tag{3.3}$$

где $u_1(\Theta, z) = z(s)\exp(i\sigma t) + \overline{z}(s)\exp(-i\sigma t)$; $z(s)$ одно из решений НФ (см. п. 2). Достаточно гладкие функции $u_2(\Theta, z), u_3(\Theta, z)$ по переменной Θ имеют период $2\pi/\sigma$ и, кроме того,

$$M_{\pm}(u_m) = \frac{\sigma}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\sigma} u_m(\Theta, z) \exp(\pm i\sigma\Theta) d\Theta = 0$$

при $m = 2, 3$ и любых рассматриваемых $z(s)$. Отметим, что $v(\Theta, \varepsilon) = u(\Theta - H, \varepsilon)$, а через $O(\varepsilon^2)$ обозначена функция $\psi(z, \overline{z}, \varepsilon)$, для которой справедлива оценка

$$|\psi(z, \overline{z}, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^2[|z| + |\overline{z}|], M > 0.$$

Подставим сумму (3.3) в ДУ (3.1) и приравняем коэффициенты при степенях $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$. В результате получим два линейных неоднородных ДУ с запаздыванием. Определим $u_2(\Theta, z)$ из следующего уравнения:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \Theta} + v_2 - k u_2 = \Phi_2(\Theta, z), \tag{3.4}$$

где $\Phi_2(\Theta, z) = \dfrac{k(k-1)}{2} u_1^2, v_2 = u_2(\Theta - H, z)$.

При формировании уравнения для $u_3(\Theta, z)$ следует учесть, что $\dfrac{d}{d\Theta}\psi(\Theta, s) = \dfrac{\partial \psi}{\partial \Theta} + \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\varepsilon$. Поэтому получим

$$\frac{\partial u_3}{\partial \Theta} + v_3 - k u_3 = \Phi_3(\Theta, z), \tag{3.5}$$

где

$$\Phi_3(\Theta, z) = k(k-1)u_1u_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} u_1^3 + \gamma[-v_1 + ku_1] + z' H \exp(-i\sigma H)\exp(i\sigma\Theta) +$$
$$+ \overline{z}' H \exp(i\sigma H)\exp(-i\sigma\Theta) - z'\exp(i\sigma\Theta) - \overline{z}'\exp(-i\sigma\Theta),\ z = z(s),\ z' = \frac{dz}{ds}.$$

З а м е ч а н и е 3.1 *Линейное неоднородное дифференциальное уравнение*

$$\frac{du}{d\Theta} + u(t - H) - ku = \Phi(\Theta),$$

где $\Phi(\Theta)$ – периодическая функция переменного Θ с периодом $2\pi/\sigma$ имеет периодическое решение с тем же периодом, если

$$M_{\pm}(\Phi(\Theta)) = \frac{\sigma}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi(\Theta) \exp(\pm i\sigma\Theta) d\Theta = 0.$$

Равенства $M_{\pm}(\Theta) = 0$ выделяют одно такое решение.

Отметим, что в нашем случае

$$\Phi_2(\Theta, z) = \frac{k(k-1)}{2}[z^2\exp(2i\Theta) + 2|z|^2 + \overline{z}^2\exp(-2i\Theta)].$$

Поэтому уравнение (2.4) разрешимо в классе $2\pi/\sigma$ периодических функций по переменной Θ, и соответствующее решение может быть записано в следующей форме:

$$u_2(\Theta, z) = \eta_2 z^2 \exp(2i\sigma\Theta) + \eta_0|z|^2 + \overline{\eta}_2\overline{z}^2\exp(-2i\sigma\Theta),$$

где после подстановки в ДУ (3.4) стандартным образом можно найти, что

$$\eta_0 = -k,\ \eta_2 = \eta_{21} + i\eta_{22},\ \eta_{21} = \frac{k(2k+1)}{2(5+4k)},\ \eta_{22} = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{5+4k}.$$

Перейдем к анализу ДУ (3.5). Из условий его разрешимости в классе $2\pi/\sigma$ периодических по переменной Θ функций получим, что для коэффициентов НФ (3.2) выполнены равенства

$$\alpha = \gamma\frac{(1-k^2)^{3/2}a}{Q},\ \beta = \frac{1-k^2}{Q}\gamma(\sqrt{1-k^2}-ak),\ d = \frac{k(1-k^2)^{3/2}}{(5+4k)Q}[(k+5)\sqrt{1-k^2}-6ak],$$
$$c = -\frac{k(1-k^2)^2}{(5+4k)Q(1+k)}[k\sqrt{1-k^2}+a(6k+5)],\ Q = (\sqrt{1-k^2}-ak)^2 + a^2(1-k^2) > 0.$$

В нашем случае $a > 0$. Сразу отметим, что знак α совпадает со знаком γ, а знак ляпуновской величины d определяется знаком множителя $\varphi(k) = (k+5)\sqrt{1-k^2} - 6ak$, т. к. остальные множители в формуле для d заведомо положительны. Нетрудно убедиться, что $\varphi(k) > 0$ при всех $k \in (0,1)$. Очевидно, что $\varphi(k) = \varphi(a) = (5+\cos a)\sin a - 6a\cos a$, где $a = arccosk\,(a \in (0, \pi/2))$. Знак $\varphi(a)$ совпадает со знаком функции

$$\psi(a) = \frac{\varphi(a)}{\cos a} = 5\operatorname{tg} a + \sin a - 6a.$$

При этом $\psi(0) = 0$, а $\psi'(a) = \dfrac{5}{\cos^2 a} + \cos a - 6 > 0$ при всех $a \in (0, \pi/2)$. Так

$$\psi'(a) \geq \frac{1}{\cos^2 a}(5 + \cos^4 a - 6\cos^2 a) = \frac{1}{\cos^2 a}(5\sin^2 a - \sin^2 a\cos^2 a) > 0$$

при $a \in (0, \pi/2)$.

Перейдем к анализу НФ (3.2). Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 3.1 *ДУ (2.2) имеет автомодельное решение* $z(s) = \rho\exp(i\omega s)$, *если* $\alpha d < 0$. *Данное решение устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво), если* $d < 0$, *и неустойчиво при* $d > 0$. *При этом* $\rho = \sqrt{-\alpha/d}$, *а* $\omega = \beta - c\alpha/d$.

В нашем случае $d > 0$. Поэтому периодическое решение существует, если $\gamma < 0$, т. е. при докритических значениях $h\,(h < H)$. Анализ НФ и результаты работ [6–9;14] позволяют сформулировать основную теорему о существовании периодического решения у уравнения (3.1) (и, конечно, ДУ (1.5)) при соответствующем выборе параметров в данном уравнении).

Т е о р е м а 3.1 *Пусть* $k \in (0, 1-\delta), \delta > 0$. *Существует такое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *уравнение (3.1) имеет неустойчивый предельный цикл при* $h = (1-\varepsilon)H$. *Для соответствующих периодических решений справедлива асимптотическая формула*

$$u(\Theta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho[\exp(i(\sigma+\varepsilon\omega)\Theta + i\varphi_0) + \exp(-i(\sigma+\varepsilon\omega)\Theta - i\varphi_0)] +$$
$$+\varepsilon\rho^2[\eta\exp(2i(\sigma+\varepsilon\omega)\Theta + 2i\varphi_0) - k + \overline{\eta}\exp(-2i(\sigma+\varepsilon\omega)\Theta - 2i\varphi_0)] + o(\varepsilon).$$

где $\varphi_0 \in R$, *постоянные* ρ, η *были указаны ранее.*

Уместно отметить, что существование неустойчивого цикла гарантируется при $k \in \in (0, 1-\delta)$. При $k \to 1-0$ амплитуда $\rho = \rho(k) \to \infty$. Следовательно, случай $k \to 1-0$

требует дополнительного изучения, тем более при таких k для $\sigma = \sigma(k)$ также имеет место предельное равенство $\lim\limits_{k\to 1-0} \sigma(k) = 0$.

Наконец, уравнение (1.2) имеет следующие периодические решения

$$x(t,\varepsilon) = 1 + u((1-\varepsilon)t,\varepsilon).$$

Отметим, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u((1-\varepsilon)t,\varepsilon) = 0$. Следовательно, при $\varepsilon \to 0$ функция $x(t,\varepsilon)$ близка к 1. Добавим, что в нашем случае все эти решения неустойчивы в смысле определения А. М. Ляпунова в форме фазового пространства решений соответствующих уравнений с запаздыванием.

4. Заключение

В работе показано, что учет фактора запаздывания приводит к потере устойчивости состояния равновесия как в модели спрос-предложение, так и в основной модели Солоу При значениях бифуркационного параметра h, близких к критическому значению $h = H$, для данного варианта модели Солоу характерно жесткое возбуждение колебаний или, в иной терминологии, докритические бифуркации. Рассмотренный вариант модели Солоу с таким способом учета фактора запаздывания отличается от модели спрос-предложение, где учет фактора запаздывания приводит к устойчивому циклу, т. е. к послекритическим бифуркациям. Можно добавить, что в работах [5,15] рассматривались иные модификации модели Солоу, в том числе с учетом фактора запаздывания. В этих работах рассматривалась модель Солоу в виде системы ДУ, в которой учитывался фактор взаимодействия с окружающей средой с учетом влияния изменения численности работающих. В этих и других работах M. Ferrara, L. Guerini и др. запаздывание вводилось в функцию численности работающих и добавлялось второе уравнение (обобщенное логистическое, учитывающее запаздывание). Такой учет запаздывания характерен для задач математической экологии (см. [9;14]) и приводит к возникновению колебаний в динамической системе.

В данной статье предложен другой вариант: основное уравнение Солоу оставлено без изменений, и в функцию, отвечающую за амортизацию основных фондов, введено запаздывание. Подчеркнем, что классический вариант модели Солоу также не позволяет моделировать циклы, хотя модель Солоу была предложена именно для рыночной экономики, в рамках которой на величину инвестиций влияют в основном рыночные факторы: цена на оборудование, на иные фонды и др.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

Список литературы

1. R. M. Solow, “A contribution to the theory of economic growth”, *The Quarterly Journal of Economics*, **70**:1 (1956), 65–94.

2. T. W. Swan, “Economic growth and capital accumulation”, *Economic Record*, **32:2** (1956), 334–361.

3. W. B. Zhang, *Synergetic economics: time and change in nonlinear economics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 246 p.

4. T. Puu, *Nonlinear economic dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 287 p.
5. M. Ferrara, L. Guerini, R. Mavilla, "Modified neoclassical growth models with delay: a critical survey and perspectives", *Applied Mathematical Sciences*, **7**:86 (2013), 4249-4239.
6. А. Н. Куликов, А. Д. Куликов, "Эффект запаздывания и экономические циклы", *Таврический вестник информатики и математики*, 2015, № 2 (27), 87-100.
7. А. Н. Куликов, А. Д. Куликов, "Математическая модель рынка и эффект запаздывания", *Математика в Ярославском университете*, Сборник обзорных статей к 40-летию математического факультета, **1**, 2016, 132-151.
8. D. A. Kulikov, "About a mathematical model of market", *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*, **788:1** (2017), 6.
9. J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 365 p.
10. R. Bellman, L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, London, 1963, 480 p.
11. V. L. Kharitonov, "On the determination of maximum admissible delay in a stabilization problem", *Differ. Uravn.*, **18**:4 (1982), 723–724.
12. А. Н. Куликов, "О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1976, 67–85.
13. J.G̃uckenheimer,P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 462 p.
14. Ю. С. Колесов, "Математические модели экологии", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1979, 3-40.
15. B. Carlo, L. Guerrini, "Existence of limit cycles in the Solow model with delayed-logistic population growth", *The Scientific World Journal*, **2014** (2014), 8.

Поступила 9.04.2018

MSC2010 34K18,91B55

Stability and local bifurcations of the Solow model with delay

© **D. A. Kulikov** [1]

Abstract. A mathematical model of macroeconomics, proposed by the Nobel Prize winner Solow, is considered. Its classical version has a single global attractor - a positive equilibrium state. In this paper a modification of this model with the delay effect is proposed. This leads to the need to study the dynamics of a differential equation with a deviating argument. For the corresponding equation in the paper, the question of stability and local bifurcations is studied. In particular, the possibility of subcritical bifurcations of cycles is shown. Asymptotic formulas are obtained for the corresponding periodic solutions. In the analysis of local bifurcations, such methods of the theory of dynamical systems as the method of invariant (integral) manifolds, the apparatus of the theory of normal forms of Poincare-Dulac, and asymptotic methods of analysis are used.
Key Words: model of Solou, delay differential equation, stability, bifurcation, cycle, asymptotic formula.

References

1. R. M. Solow, "A contribution to the theory of economic growth", *The Quarterly Journal of Economics*, **70**:1 (1956), 65–94.
2. T. W. Swan, "Economic growth and capital accumulation", *Economic Record*, **32:2** (1956), 334–361.
3. W. B. Zhang, *Synergetic economics: time and change in nonlinear economics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 246 p.
4. T. Puu, *Nonlinear economic dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 287 p.
5. M. Ferrara, L. Guerini, R. Mavilla, "Modified neoclassical growth models with delay: a critical survey and perspectives", *Applied Mathematical Sciences*, **7**:86 (2013), 4249-4239.
6. A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, "[The effect of delay and the economic cycles]", *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, **2(27)** (2015), 87-100 (In Russ).
7. A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, "[The mathematical model of the market and the effect of delay]", *Mathematica v Yaroslavskom univ. Sbornik obsor. statey k 40-let. matem. faculteta*, **1** (2016), 132–151 (In Russ).
8. D. A. Kulikov, "About a mathematical model of market", *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*, **788:1** (2017), 6.
9. J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 365 p.
10. R. Bellman, L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, London, 1963, 480 p.

[1] **Dmitriy A. Kulikov**, Associate Professor, Department of Mathematics, Differential Equations, Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6307-0941, kulikov_d_a@mail.ru

11. V. L. Kharitonov, “On the determination of maximum admissible delay in a stabilization problem”, *Differensialnye Uravneniya*, **18**:4 (1982), 723–724.

12. A. N. Kulikov, “[On smooth invariant manifolds of semigroups of nonlinear operators in a Banach space]”, *Issled. po Ustoichiv. i teorii kolebaniy. YarGU*, 1976, 67–85 (In Russ).

13. J. P. Guckenheimer, J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 462 p.

14. Yu. S. Kolesov, “[Mathematical models in ecology]”, *Issledovaniya po ustoichivost i teorii kolebaniy*, 1979, 3-40 (In Russ).

15. B. Carlo, L. Guerrini, “Existence of limit cycles in the Solow model with delayed-logistic population growth”, *The Scientific World Journal*, **2014** (2014), 8.

Submitted 9.04.2018