

УДК 519.17

О сложности построения 3-раскраски планарных графов с короткими гранями

© Д. В. Сироткин¹

Аннотация. Задача о вершинной 3-раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы проверить, можно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Известно, что эта задача является NP-полной в классе планарных графов и что она становится полиномиально разрешимой для плоских триангуляций — планарных графов, у которых все грани (включая и внешнюю) являются треугольниками. Известно также, что она является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 4, но становится разрешимой за линейное время в классе графов с максимальной степенью вершин не более чем 3. Поэтому интересен вопрос о поиске порога на значения длин граней и максимальной степени вершин планарных графов, при переходе через который для задачи о вершинной 3-раскраске полиномиальная разрешимость меняется на NP-полноту. В данной работе дается ответ на этот вопрос и доказывается NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов, гранями которых являются только треугольники и четырехугольники, с максимальной степенью вершин не более чем 5.

Ключевые слова: вычислительная сложность, задача о вершинной 3-раскраске, планарный граф

1. Введение

В данной работе рассматриваются только *обыкновенные* графы (всюду далее называемые просто графами), т.е. неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Вершинной раскраской* графа G называется произвольное отображение $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$. Вершинная раскраска c графа G называется k -раскраской, если $c : V(G) \rightarrow \overline{1, k}$. Если граф G имеет k -раскраску, то он называется k -раскрашиваемым. *Задача о вершинной k -раскраске* (кратко, задача k -BP) для заданного графа состоит в том, чтобы определить, является ли он k -раскрашиваемым или нет.

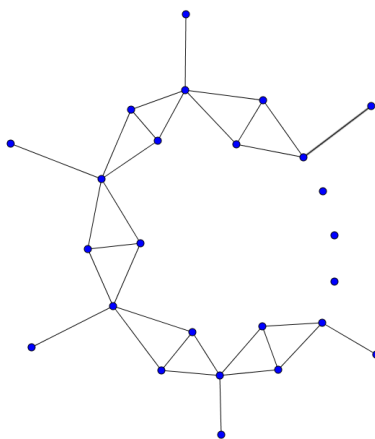
Задача 3-BP является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 4 [1]. По известной теореме Брукса [2] она разрешима за полиномиальное время для графов со степенями всех вершин не более чем 3. Задача 3-BP разрешима за линейное время в классе плоских триангуляций, т.е. планарных графов, у которых все грани (включая и внешнюю) являются треугольниками [3]. Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором сложность задачи 3-BP меняется с полиномиальной разрешимости на NP-полноту и при этом иметь графы с небольшой максимальной степенью вершин. Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе. В данной работе доказывается, что задача 3-BP является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5, чьи грани являются только треугольниками и четырехугольниками.

¹ Сироткин Дмитрий Валерьевич, лаборант, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), без ученой степени, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

2. Некоторые обозначения

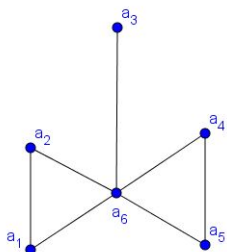
Через $N(x)$ обозначается окрестность вершины x . Для подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $G \setminus V'$ обозначается результат удаления всех элементов подмножества V' из графа G .

Через *diamond* обозначается результат удаления произвольного ребра из полного графа с 4 вершинами. Через H_1^d , где $d \geq 3$, обозначается граф, полученный замыканием в цикл d копий графа *diamond* и добавлением в места склейки d листов (см. рисунок 2.1).



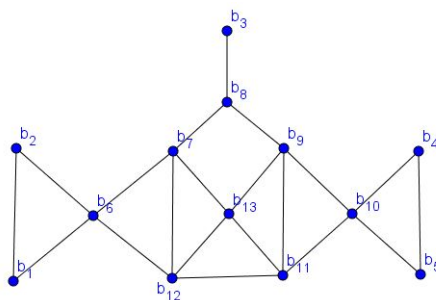
Р и с у н о к 2.1
Граф H_1^d

Графы, обозначаемые через H_2 и H_3 , изображены на рисунках 2.2 и 2.3.



Р и с у н о к 2.2

Граф H_2



Р и с у н о к 2.3
Граф H_3

Через \mathcal{P} обозначается множество планарных графов.

3. Операции шунтирования и замены

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся два локальных преобразования графов, которые мы назовем операциями шунтирования и замены.

Занумеруем листья графа H_1^d в порядке их обхода по часовой стрелке. Операция H_1^d — *шунтирования* применяется к вершине x планарного графа G , окрестность которой образована циклически упорядоченными вершинами y_1, \dots, y_d , где $d \geq 3$. Она состоит в удалении x из G , добавлении графа H_1^d и отождествлении i -ого листа графа H_1^d с вершиной y_i для любого $i \in \overline{1, d}$. Результат G'_x применения данной операции, очевидно, будет планарным графом. Более того, граф G'_x является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G . В этом нетрудно убедиться, заметив, что вершины степени 2 имеют одинаковые цвета в любой 3-раскраске графа *diamond*.

Операция (H_2, H_3) -замены состоит в удалении некоторой порожденной копии графа H_2 из планарного графа G , последующем добавлении графа H_3 и всех ребер вида $b_i v$, где $i \in \overline{1, 5}$ и $v \in N(a_i) \setminus \bigcup_{j=1}^6 \{a_j\}$. Пусть граф G' — результат (H_2, H_3) -замены в графе G . Тогда граф G' является планарным.

Л е м м а 3.1 *Граф G' является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что c — некоторая 3-раскраска графа G . Тогда $\{c(a_1), c(a_2)\} = \{c(a_4), c(a_5)\}$ и $c(a_6) \notin \{c(a_1), c(a_2)\}$. Продолжим имеющуюся 3-раскраску графа $G \setminus \bigcup_{j=1}^6 \{a_j\}$ следующим образом: $c(b_i) = c(a_i)$ для любого $i \in \overline{1, 6}$ и

$$c(b_8) = c(b_{10}) = c(b_{13}) = c(b_6), c(b_7) = c(b_{11}) = c(b_1), c(b_9) = c(b_{12}) = c(b_2).$$

Очевидно, что c — 3-раскраска графа G .

Предположим, что c' — некоторая 3-раскраска графа G' . Тогда

$$\{c'(b_1), c'(b_2)\} = \{c'(b_4), c'(b_5)\}, c'(b_6) = c'(b_8) = c'(b_{10}) = c'(b_{13}), c'(b_6) \notin \{c'(b_1), c'(b_2)\}.$$

Продолжим имеющуюся 3-раскраску графа $G' \setminus \bigcup_{j=1}^{12} \{b_j\}$ следующим образом: $c'(a_i) = c'(b_i)$ для любого $i \in \overline{1, 6}$. Очевидно, что c' — 3-раскраска графа G' .

4. Основной результат работы и его доказательство

Основным результатом данного раздела работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1 *Задача 3-ВР в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая, является NP-полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним полиномиальное сведение задачи 3-ВР в классе \mathcal{P} к той же задаче в рассматриваемом подклассе класса \mathcal{P} . Отсюда и будет следовать справедливость данной теоремы. Описание сведения составляет содержание всей оставшейся части доказательства.

Задача 3-ВР в классе \mathcal{P} полиномиально сводится к той же задаче в классе \mathcal{P} без вершин степени 1 и 2 и шарниров (см., например, работу [4]), т.е. вершин, при удалении которых увеличивается количество компонент связности. Каждая внешняя грань такого графа образована циклом. Рассмотрим произвольный планарный граф G без вершин степени 1 и 2 и шарниров. Выполним операцию H_1^d -шунтирования для каждой вершины графа G , а затем последовательно будем выполнять операцию (H_2, H_3) -замены для каждого вхождения подграфа H_2 в текущий граф. Полученный граф G' будет планарным, причем по лемме 3.1 он является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G .

В графе G' каждая грань длины не менее чем 5 имеет один из следующих двух типов. Грань первого типа — результат «окружения» вершин графа G в результате H_1^d -шунтирования и (H_2, H_3) -замен. Грань второго типа — образ грани графа G при переходе от G к G' .

При (H_2, H_3) -заменах ребра a_1a_6 и a_6a_5 переходят в пять ребер $b_1b_6, b_6b_{12}, b_{12}b_{11}, b_{11}b_{10}, b_{10}b_5$. В каждой грани этого графа ребро a_2a_6 переходит в ребра b_2b_6, b_6b_7, b_7b_8 , а ребро a_6a_4 переходит в ребра $b_8b_9, b_9b_{10}, b_{10}b_4$. Таким образом, длина грани первого типа делится на 5, длина грани второго типа делится на 7.

Для каждого цикла C , образующего грань первого типа в графе G' , зададим функцию $g_1 : V(C) \rightarrow \overline{0, 2}$. Ее значение определяется положением вершины в экземпляре подграфа H_3 , которому она принадлежит, а именно:

$$g_1(b_1) = 2, g_1(b_6) = 0, g_1(b_{12}) = 1, g_1(b_{11}) = 1, g_1(b_{10}) = 1, g_1(b_5) = 2.$$

Для каждого цикла C' , образующего грань второго типа в графе G' , аналогично зададим функцию $g_2 : V(C') \rightarrow \overline{0, 2}$, а именно:

$$g_2(b_3) = 1, g_2(b_8) = 1, g_2(b_9) = 1, g_2(b_{10}) = 0, g_2(b_4) = 2, g_2(b_7) = 1, g_2(b_6) = 1, g_2(b_2) = 1.$$

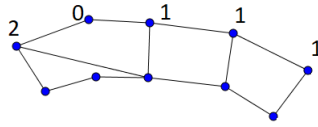
Нетрудно видеть, что никакие две грани первого типа не пересекаются по вершинам. Может пересекаться грань второго типа с гранью первого типа или второго типа. Однако, для любой вершины x выполнено неравенство $g_i(x) + g_j(x) \leq 5 - \deg(x)$, где индексы i и j определяются типом граней, которым принадлежит x . Мы будем проводить ребра, лежащие внутри граней первого или второго типа или во внешней грани, причем для каждой вершины x количество таких ребер не превышает значения суммы таких функций (g_1 и g_1 или g_1 и g_2) на x . Тем самым, максимальная степень вершин в результирующем графе не превосходит 5.

С каждой гранью первого или второго типов графа G' выполним следующее преобразование. К графу добавляется цикл C_n , где $n \geq 5$ — количество ребер в соответствующей грани графа G' , причем данный цикл помещается внутрь данной грани, если она является внутренней, или грань помещается внутрь цикла, если грань является внешней. Всюду далее мы будем рассматривать только случай внутренней грани. Производится нумерация вершин грани и цикла по часовой стрелке.

В случае грани первого типа все вершины грани со значением функции g_1 , равным единице или двойке, соединяются с вершиной цикла с тем же номером. Вершина со значением функции, равным двойке, дополнительно соединяется с вершиной с номером на два больше. Вершина с нулевым значением функции не соединяется с циклом.

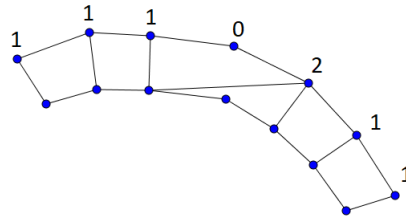
В случае грани второго типа все вершины грани со значением функции g_2 , равным единице или двойке, соединяются с вершиной цикла с тем же номером аналогично первому случаю. Вершина со значением функции, равном двойке, дополнительно соединяется с вершиной с номером на два меньше. Вершина с нулевым значением функции не соединяется с циклом.

На рисунках 4.1 и 4.2 представлены фрагменты граней и циклов с значениями функций g_1 и g_2 и добавленными ребрами.



Р и с у н о к 4.1

Фрагмент результата при преобразовании грани первого типа

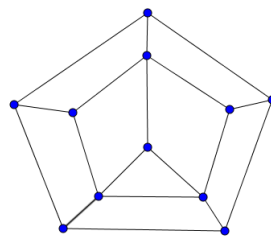


Р и с у н о к 4.2

Фрагмент результата при преобразовании грани второго типа

Обозначим через G'' результат преобразования графа G' , описанного выше. Очевидно, что граф G'' является планарным. Также очевидно, что G' является 3-раскрашиваемым, если таковым является граф G'' . Удалим произвольную вершину степени 2 из цикла C_n . Соседняя с ней вершина в цикле в получившемся графе имеет степень 2. Ее также можно удалить. Поэтому элиминируется весь цикл C_n . Тем самым, граф G'' является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и граф G' . Грань графа G'' , ограниченную циклом C_n , назовем *самой внутренней*. Ее длина не меньше пяти, она смежна только с гранями длины 4 и все вершины, принадлежащие ей, имеют степень не более чем 4.

Разбиение самой внутренней грани длины 5 представлено на рисунке 4.3. Проверку того, что любая 3-раскраска вершин грани продолжается на весь 11-вершинный граф разбиения, легко осуществить непосредственно. Для этого достаточно заметить, что в любой 3-раскраске вершин этой грани две вершины имеют первый цвет, две вершины имеют второй цвет, а одна вершина — третий цвет. После этого рассмотреть положение вершины третьего цвета — смежна ли она с вершиной степени 4 в графе разбиения или нет.



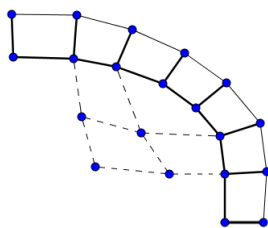
Р и с у н о к 4.3

Разбиение самой внутренней грани длины 5

Покажем, как разбить самую внутреннюю грань с $n > 5$ ребрами на две грани длины $n - 1$ и 5 (если $n = 6$, то граней длины 5 ровно две штуки) и несколько граней длины 4. Каждая вершина новых граней имеет степень не более чем 4. Объявление грани длины

$n - 1$ самой внутренней и выполнение данного разбиения $n - 5$ раз сводит задачу к уже рассмотренному случаю.

Создадим внутри каждой самой внутренней грани цикл C_n . Произведем нумерацию вершин грани и цикла по часовой стрелке. Соединим вершины грани с вершинами цикла C_n с тем же номером. Проведенные на этом шаге ребра выделены жирным на рисунке 4.4. Проведение данных ребер сохраняет 3-раскрашиваемость, т.к. для ее сохранения достаточно присвоить каждой вершине цикла цвет с номером на 1 большим (по модулю 3), чем цвет вершины грани, с которой она соединена. Также проведем в произвольном месте данной грани ребра, выделенные пунктиром на рисунке 4.4. Очевидно, что их добавление не меняет 3-раскрашиваемости графа. Они разбивают грань на грани длины 4 и грани длины 5 и $n - 1$.



Р и с у н о к 4.4

Разбиение самой внутренней грани длины более чем 5

После выполнения всех преобразований, описанных выше, мы получим граф G''' . Он является планарным, все его грани имеют длину 3 и 4, а максимальная степень вершин не превосходит 5. Граф G''' является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G . Количество вершин G''' ограничено сверху полиномом третьей степени от числа вершин графа G . Тем самым, имеет место сведение задачи 3-ВР в классе \mathcal{P} к той же задаче в классе планарных графов, степени всех вершин которых не более чем 5 и все грани имеют длину 3 и 4. Значит, имеет место утверждение данной теоремы.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Dailey, “Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete”, *Discrete Mathematics*, **30**:3 (1980), 289–293.
2. R. Brooks, “On colouring the nodes of a network”, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences*, **37**:2 (1941), 194–197.
3. O. Aichholzer, F. Aurenhammer, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, B. Vogtenhuber, “3-Colorability of pseudo-triangulations”, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, **25**:4 (2015), 283–298.

4. D. Malyshev, “The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs”, *Graphs and Combinatorics*, **33**:4 (2017), 1009–1022.

Поступила 5.04.2018

MSC2010 05C15

On the complexity for constructing a 3-colouring for planar graphs with short facets

© D. S. Sirotkin¹

Abstract. The vertex 3-colourability problem is to determine for a given graph whether one can divide its vertex set into three subsets of pairwise non-adjacent vertices. This problem is NP-complete in the class of planar graphs, but it becomes polynomial-time solvable for planar triangulations, i.e. planar graphs, all facets of which (including external) are triangles. Additionally, the problem is NP-complete for planar graphs whose vertices have degrees at most 4, but it becomes linear-time solvable for graphs whose vertices have maximal degree at most 3. So it is an interesting question to find a threshold for lengths of facets and maximum vertex degree, for which the complexity of the vertex 3-colourability changes from polynomial-time solvability to NP-completeness. In this paper we answer this question and prove NP-completeness of the vertex 3-colourability problem in the class of planar graphs of the maximum vertex degree at most 5, whose facets are triangles and quadrangles only.

Key Words: computational complexity, vertex 3-colourability problem, planar graph

REFERENCES

1. D. Dailey, “Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete”, *Discrete Mathematics*, **30**:3 (1980), 289–293.
2. R. Brooks, “On colouring the nodes of a network”, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences*, **37**:2 (1941), 194–197.
3. O. Aichholzer, F. Aurenhammer, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, B. Vogtenhuber, “3-Colorability of pseudo-triangulations”, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, **25**:4 (2015), 283–298.
4. D. Malyshev, “The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs”, *Graphs and Combinatorics*, **33**:4 (2017), 1009–1022.

Submitted 5.04.2018

¹ **Dmitry V. Sirotkin**, laboratory assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), without academic degree, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com