

УДК 519.7

Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах

© А. О. Казаков¹ А. Д. Козлов²

Аннотация. В статье предложен новый метод конструирования трехмерных потоковых систем, обладающих различными хаотическими аттракторами. С помощью данного метода построен пример трехмерной потоковой системы, обладающей несимметричным аттрактором Лоренца. В отличие от классического аттрактора Лоренца обнаруженный аттрактор не обладает симметрией. Однако как и классический аттрактор, он относится к классу «настоящих» хаотических, а точнее, псевдогиперболических аттракторов, теория которых была разработана Д.Тураевым и Л.П.Шильниковым. Любая траектория псевдогиперболического аттрактора обладает положительным показателем Ляпунова, и это свойство сохраняется для аттракторов близких систем. При этом, в отличие от гиперболических, псевдогиперболические аттракторы допускают гомоклинические касания. Однако бифуркации таких касаний не приводят к появлению устойчивых периодических орбит. В численных экспериментах, при построении, например, диаграмм старшего показателя Ляпунова, в окрестности псевдогиперболического аттрактора не возникает окон устойчивости, отвечающих возникновению регулярных аттракторов. Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца мы применяли метод «седловой карты». С помощью построения диаграмм старшего показателя Ляпунова показано, что в окрестности обнаруженного аттрактора действительно не возникает окон устойчивости. Кроме этого, установлена псевдогиперболическость указанного аттрактора с помощью ЛМР-метода, представленного недавно в работе Гонченко, Казакова и Тураева.

Ключевые слова: странный аттрактор, псевдогиперболическость, гомоклиническая траектория, аттрактор Лоренца, показатели Ляпунова, несимметричный аттрактор, трехмерная система.

1. Введение

Все странные аттракторы многомерных гладких динамических систем условно можно разделить на два класса: *квазиаттракторы* и *«настоящие» хаотические аттракторы*. Концепция квазиаттрактора была разработана В.С. Афраймовичем и Л.П.Шильниковым в работе [1]. Такие аттракторы либо сами содержат устойчивые периодические орбиты очень больших периодов и с малыми областями притяжения, либо такие орбиты возникают при сколь угодно малых возмущениях в результате гомоклинических касаний, неизбежно возникающих в подобных аттракторах.

¹ Казаков Алексей Олегович, ведущий научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); доцент, кафедра теории управления и динамики систем (603950, г. Н.Новгород, пр. Гагарина, 23); кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-0002-6553, kazakovdz@yandex.ru

² Козлов Александр Дмитриевич, младший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО "Национальный исследовательский университет" Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа (603950, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23); ORCID: 0000-0003-1830-4769, kozzzloff@list.ru

Для «настоящих» аттракторов хаотическое поведение траекторий сохраняется при возмущениях системы. До недавнего времени к ним можно было с уверенностью отнести только гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца. Для таких аттракторов инвариантные многообразия седловых периодических движений пересекаются трансверсально. Однако в работе [2] был предложен новый тип настоящих аттракторов – т.н. *дикие псевдогиперболические аттракторы* – и сконструирована геометрическая модель дикого спирального аттрактора. Такие аттракторы, как и гиперболические, остаются хаотическими при малых возмущениях, хотя при этом в них могут возникать гомоклинические касания. Однако бифуркации этих касаний не приводят к возникновению устойчивых периодических орбит (вместо этого здесь возможны только бифуркации, связанные с образованием негрубых периодических траекторий типа седло–седло, которые затем распадаются на два седла соседних индексов).

Позже в работе [3] было показано, что псевдогиперболические аттракторы также могут возникать при малых периодических возмущениях систем с аттрактором Лоренца. Следующим шагом развития теории псевдогиперболических аттракторов является открытие в классе трехмерных отображений Эно дискретных аттракторов Лоренца [4]. После этих работ стало понятно, что такие аттракторы могут возникать в семействах многомерных отображений и потоков и что необходимо изучать бифуркационные механизмы возникновения таких аттракторов, а также разрабатывать методы проверки их псевдогиперболическости.

Первыми работами в данном направлении можно считать статьи [5] – [6], где был предложен ряд новых бифуркационных сценариев, согласно которым в трехмерных отображениях могут возникать псевдогиперболические аттракторы различных типов (дискретные аттракторы Лоренца, дискретные восьмерочные аттракторы и т.д.). Что касается методов проверки псевдогиперболическости, здесь важно отметить работу [7], где был предложен достаточно простой, но эффективный LMP-метод, с помощью которого численно можно установить является ли исследуемый аттрактор псевдогиперболическим.

В настоящей работе приводится новый метод конструирования трехмерных потоковых систем, обладающих различными, в т. ч. псевдогиперболическими, аттракторами. С помощью предложенного метода построен пример трехмерной потоковой системы, обладающей псевдогиперболическим аттрактором нового типа – т.н. несимметричным аттрактором Лоренца [8]. Данный аттрактор во многом похож на хорошо известный классический потоковый аттрактор Лоренца, который содержит седловое состояние равновесия (неустойчивое многообразие которой одномерно, а седловая величина положительна) вместе с его неустойчивым многообразием, обладает симметрией $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ и является псевдогиперболическим. Отличительная характеристика несимметричного аттрактора Лоренца – отсутствие симметрии по какой-либо из координат. Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца в классе трехмерных потоков вида (2.1) мы воспользовались методом «седловой карты» [9], а для проверки его псевдогиперболическости применили LMP-метод [7].

2. Определения и методы

Приведем определение псевдогиперболического аттрактора, а затем опишем методы поиска и алгоритмы проверки псевдогиперболическости.

Определение псевдогиперболическости было дано Д.Тураевым и Л.П.Шильниковым для систем с непрерывным временем в работе [2], а для систем с дискретным временем – в работе [3]. Для удобства приведем это определение для случая систем с непрерывным

временем.

О п р е д е л е н и е 2.1 *Аттрактор n -мерной потоковой системы F называется псевдогиперболическим, если он обладает следующими свойствами.*

- 1) *В каждой точке некоторой поглощающей области D аттрактора существует два линейных, инвариантных относительно дифференциала DF потока, подпространства E^{ss} с $\dim E^{ss} = k$ и E^{cu} с $\dim E^{cu} = n - k$, где $k \geq 1$, для которых DF экспоненциально сжимает любое направление в E^{ss} и экспоненциально растягивает объемы в E^{cu} .*
- 2) *Подпространства E^{ss} и E^{cu} непрерывно зависят от точки в D .*
- 3) *Соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения равномерно ограничены от 1.*
- 4) *Углы между любым касательным вектором к E^{ss} и любым касательным вектором в E^{cu} равномерно отделены от нуля.*
- 5) *Любое возможное сжатие в E^{cu} равномерно слабее любого сжатия в E^{ss} .*

В отличие от гиперболичности, в данном случае не требуется растяжение вдоль каждого направления в E^{cu} . Тем не менее свойство псевдогиперболичности сохраняется под воздействием малых возмущений. Поэтому если система обладает псевдогиперболическим аттрактором, то этот аттрактор является настоящим хаотическим, т. к. растяжения объемов в E^{cu} гарантирует положительность максимального показателя Ляпунова на аттракторе.

З а м е ч а н и е 2.1 *Гиперболические аттракторы формально подходят под определение 2.1, т. к. экспоненциальное растяжение вдоль любого направления в E^{cu} для таких аттракторов автоматически влечет растяжение объемов в подпространстве E^{cu} . Однако теория гиперболического хаоса является самостоятельной, хорошо развитой теорией, в рамках которой получен целый ряд исчерпывающих результатов (см., например, [10], [11]), и поэтому мы не будем рассматривать в данном случае гиперболические аттракторы в контексте псевдогиперболических.*

Аттрактор Лоренца, впервые обнаруженный в работе [12] в трехмерной потоковой системе, является одним из основных и хорошо изученных типов псевдогиперболических аттракторов. Более того, аттракторы такого типа входят в отдельный подкласс в рамках аттракторов псевдогиперболического типа. Инвариантные многообразия седловых периодических орбит в таких аттракторах пересекаются трансверсально. Однако такие аттракторы не являются гиперболическими, т. к. для них нарушается условие 2 непрерывности подпространств E^{ss} и E^{cu} из определения 2.1 Действительно, для типичной траектории на аттракторе разложение на подпространства E^{ss} и E^{cu} таково, что $\dim E^{ss} = 2$, а $\dim E^{cu} = 2$. При этом в состоянии равновесия $O(0, 0, 0)$, принадлежащем аттрактору Лоренца [13], $\dim E^{ss} = 2$, а $\dim E^{cu} = 1$, т. к. данное состояние обладает двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями.

Несмотря на то, что аттрактор Лоренца был обнаружен в 1963 г., первые адекватные математические модели, описывающие свойства аттрактора Лоренца, были построены лишь в конце 1970-х г. Среди большого количества работ, посвященных данной тематике, особенного внимания заслуживают работы Афраймовича-Быкова-Шильникова [13].

А. О. Казаков, А. Д. Козлов. Несимметричный аттрактор Лоренца как пример...

На сегодняшний день подход Афраймовича-Быкова-Шильникова, основанный на том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием т. н. геометрической модели двумерного разрывного сингулярно-гиперболического отображения с определенными эффективно проверяемыми свойствами считается наиболее оправданным и эффективным. В рамках такого подхода исследование псевдогиперболических свойств аттрактора Лоренца сводилось к теоретическим исследованиям сконструированного двумерного отображения, а тот факт, что отображение Пуанкаре в системе Лоренца удовлетворяет требованиям геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова, доказывался численно. Впервые такое доказательство было получено в 1999 г. В. Такером [14] с помощью сложной техники «computer assisted proof», основанной на достоверных компьютерных вычислениях.

Другой тип псевдогиперболических аттракторов (т. н. *дискретные аттракторы Лоренца*), был предсказан в работе [3], где было доказано, что псевдогиперболические аттракторы также могут возникать при малых периодических возмущениях систем с аттрактором Лоренца. При таких возмущениях хаотическому поведению траекторий в соответствующих трехмерных отображениях Пуанкаре отвечают *дискретные аттракторы Лоренца*. В отличие от аттракторов Лоренца трехмерных потоков, такие аттракторы допускают гомоклинические касания, однако эти касания не приводят к рождению устойчивых периодических орбит. Впервые предсказанные дискретные аттракторы Лоренца были обнаружены в классе трехмерных обобщенных отображений Эно в работе [15], а позже – в неголономной модели кельтского камня [16]. Еще одним важным классом псевдогиперболических аттракторов являются дикие спиральные аттракторы Тураева-Шильникова [2], впервые обнаруженные совсем недавно в классе четырехмерных потоковых систем [7]. Как и дискретные аттракторы Лоренца, такие аттракторы допускают гомоклинические касания, в результате которых могут рождаться лишь седловые периодические движения.

В настоящей работе мы приводим пример трехмерной потоковой системы, обладающей псевдогиперболическим несимметричным аттрактором Лоренца. Такой аттрактор, как и известный аттрактор Лоренца, содержит седловое состояние равновесия с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями, а инвариантные многообразия седловых периодических траекторий, лежащих внутри этого аттрактора, пересекаются трансверсально. При этом несимметричный аттрактор Лоренца не обладает лоренцевской симметрией $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$, в результате чего бифуркации петель пары сепаратрис для него, в отличие от лоренцевского случая, возникают «несимметричным образом», т. е. возникновение одной петли сепаратрисы автоматически не влечет за собой возникновение петли второй.

Далее опишем алгоритм поиска несимметричного аттрактора Лоренца и некоторые его свойства.

2.1. Метод седловой карты для поиска несимметричного аттрактора Лоренца

Рассмотрим класс трехмерных потоковых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (2.1)$$

где A, B и C – параметры системы; $g_i, i = 1, 2, 3$ – нелинейные члены, удовлетворяющие соотношениям

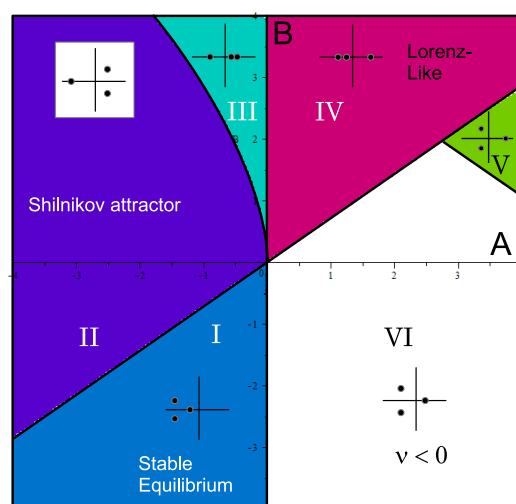
$$g_i(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца был применен метод «седловой карты», впервые предложенный для поиска *гомоклинических аттракторов* в работе [9]. Напомним, что под гомоклиническим понимается такой странный аттрактор, который содержит ровно одно седловое состояние равновесия вместе с его неустойчивым многообразием. При этом тип такого аттрактора определяется собственными числами этого состояния равновесия. К гомоклиническим аттракторам относятся многие известные странные аттракторы, например, аттрактор Лоренца [12]; спиральный аттрактор, возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусному состоянию равновесия с одномерным неустойчивым многообразием (как в цепи Чуа [17]), аттрактор Шильникова [18], возникающий на основе петли к седло-фокусу с одномерным устойчивым многообразием, и некоторые другие известные аттракторы. Идея классификации гомоклинических аттракторов по собственным числам состояния равновесия восходит к работе [19], а в работе [9] эта идея была развита для классификации и поиска гомоклинических аттракторов в классе обобщенных трехмерных отображений Эно [9].

Мы модифицировали этот метод для поиска гомоклинических странных аттракторов в трехмерных потоковых системах вида (2.1). Легко заметить, что приведенная система уравнений при любых значениях параметров A, B, C и для любых g_i , заданных согласно (2.2) и определяющих конкретный вид нелинейных членов, обладает состоянием равновесия $O(0, 0, 0)$, характеристическое уравнение для которого имеет вид

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0 \tag{2.3}$$

и зависит только от параметров A, B и C . Таким образом, тип состояния равновесия определяется только параметрами системы (2.1) и не зависит от нелинейных членов. Суть метода седловой карты для систем вида (2.1) состоит в том, что для фиксированного значения некоторого параметра (например, C) на плоскости оставшихся двух параметров (A, B) выделяются области, соответствующие различным наборам корней характеристического уравнения (2.3), которые определяют вид возможного гомоклинического аттрактора, содержащего состояние равновесия $O(0, 0, 0)$.



Р и с у н о к 2.1

Карта седел при значении параметра $C = -1.4$

На Рис. 2.1 изображена седловая карта для системы (2.1) при $C = -1.4$. В области I состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ является устойчивым, здесь не может возникнуть гомо-

клинический аттрактор, содержащий точку O . В остальных областях состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ становится седловым. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ его собственные значения, а через ν – его седловую величину, определяемую как сумму двух ближайших к мнимой оси собственных значений, одно из которых лежит слева от мнимой оси, а другое – справа, и определим необходимые условия для возникновения гомоклинических аттракторов следующих типов.

1. **Спиральный аттрактор.** Область V. В данном случае $\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\omega, \gamma < 0, \omega \neq 0, \nu = \lambda_1 + \gamma > 0$.
Условия возникновения спирального аттрактора: $\Delta < 0, CB + A > 0, A > 0, 2C^3 - BC + A > 0, C < 0$. Здесь и далее $\Delta = -4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2$ – дискриминант характеристического уравнения.
2. **Аттрактор Шильникова.** Область II. Здесь $\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\omega, \gamma > 0, \omega \neq 0, \nu = \lambda_1 + \gamma < 0$.
Условия существования аттрактора Шильникова: $\Delta < 0, CB + A < 0, A < 0, 2C^3 - BC + A < 0, C < 0$.
3. **Несимметричный аттрактор типа Лоренца.** Область IV. $\lambda_1 > 0, \lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Седловая величина $\nu = \lambda_1 + \lambda_2$ должна быть положительной. Классический аттрактор Лоренца [12] может возникать только в системах, обладающих симметрией $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$. Однако система вида (2.1) не может обладать такой симметрией, поэтому в рассматриваемой области может возникнуть только несимметричный аттрактор Лоренца [8].
Условия существования данного аттрактора: $\Delta > 0, CB + A > 0, A > 0, C < 0$.
4. **Седловой аттрактор Шильникова.** Область III: $\lambda_1 < 0, \lambda_3 > \lambda_2 > 0, \nu = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$. При переходе из области II в область III может, в принципе, наблюдаться такое явление: седло-фокус становится седлом (переход через беляковскую точку), а гомоклинический аттрактор продолжает существовать, но уже не имеет спиральной структуры. Насколько нам известно, такое явление ранее изучено не было.
Условия существования такого аттрактора: $\Delta > 0, CB + A < 0, A < 0, C < 0$.
5. В области VI бифуркации гомоклинических петель приводят к возникновению простых аттракторов – устойчивых предельных циклов. При дальнейшем изменении параметров из этих циклов могут возникнуть странные аттракторы, которые, в свою очередь, могут стать гомоклиническими (см., например, [20]).

Отметим, что приведенные условия являются необходимыми для возникновения гомоклинического аттрактора того или иного вида. Исследование конкретных систем из класса (2.1) позволяет сделать вывод о большом влиянии на динамику вида функций $g_i(x, y, z)$, задающих конкретный вид нелинейности. Поэтому для комплексного исследования системы построенную карту седел нужно совмещать, например, с картой старшего показателя Ляпунова (с помощью которой удобно определять области параметров, соответствующие хаотическим режимам) и с картой расстояния от аттрактора до седловой точки (с помощью которой устанавливается принадлежность седловой точки аттрактору). В тех областях параметров, где хаотический режим с карты максимального показателя Ляпунова накладывается на одну из описанных выше областей карты седел и при этом расстояние от аттрактора до седловой точки стремится к нулю с увеличением времени счета, возникает соответствующий гомоклинический аттрактор.

Среди перечисленных аттракторов только несимметричный аттрактор Лоренца может быть псевдогиперболическим. Гомоклинические касания инвариантных многообразий седловых периодических траекторий, неизбежно возникающие в странных аттракторах любого другого типа [9], обязательно приводят к рождению устойчивых периодических орбит внутри таких аттракторов. Таким образом, любой другой гомоклинический аттрактор обязательно будет квазиаттрактором. При этом гомоклинический аттрактор, находящийся в области IV, также может не быть псевдогиперболическим. Для проверки псевдогиперболичности аттракторов, расположенных в этой области, мы применяли разработанный в работе [7] LMP-метод. Далее кратко изложим суть этого метода.

2.2. LMP-метод для проверки псевдогиперболичности

Для любого странного аттрактора трехмерной потоковой системы выполняются следующие соотношения на набор показателей Ляпунова $\Lambda_1 > \Lambda_2 = 0 > \Lambda_3$:

$$\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0, \quad (2.4)$$

где первое и третье условия означают, что аттрактор является хаотическим, а второе говорит о растяжении фазового объема на аттракторе. Таким образом, в трехмерных потоковых системах псевдогиперболические аттракторы могут быть исключительно такими, для которых сильно сжимающее подпространство E^{ss} является одномерным ($\dim E^{ss} = 1$), а подпространство растяжения объемов E^{cu} – двумерным ($\dim E^{cu} = 2$). Другими словами условие (2.4) можно считать необходимым для возникновения псевдогиперболического аттрактора в трехмерной системе.

Суть LMP-метода заключается в проверке одного из достаточных условий непрерывности подпространства E^{ss} от точки на аттракторе. В рассматриваемом случае подпространство сильного сжатия является одномерным ($\dim E^{ss} = 1$). Для непрерывности этого подпространства необходимо, чтобы угол $d\varphi$ между любыми парами векторов в E^{ss} был малым для любых близких точек x и y , лежащих на аттракторе (теоретически $d\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow y$). Фактически LMP-метод позволяет оценить эти углы для большого набора точек на аттракторе и тем самым проверить условие непрерывности поля E^{ss} от точек на этом аттракторе.

Работа в рамках LMP-метода разделяется на два этапа. Первый – стандартный: производится расчет набора показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (при этом, если в какой-то момент условие (2.4) не выполняется, мы можем остановить алгоритм). В процессе расчета набора показателей Ляпунова мы сохраняем набор точек $\{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, \dots, k$ вдоль траектории аттрактора. Второй этап максимального показателя Ляпунова для системы в обратном времени: вдоль траектории $\{x_n\}$, полученной на первом этапе, в обратном направлении. Отметим, что использование набора точек $\{x_n\}$ является необходимым условием работы алгоритма, т. к. очевидно, что если мы возьмем любую точку на аттракторе, то ее обратные итерации рано или поздно убегут с него, и мы можем потерять любую информацию об аттракторе.

Заметим, что максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций исходной системы совпадает с минимальным показателем Ляпунова Λ_3 , взятым со знаком минус. В свою очередь, минимальный показатель Ляпунова Λ_3 отвечает за сильное сжатие на аттракторе. На втором этапе работы алгоритма, кроме расчета Λ_3 , необходимо найти и запомнить направление векторов $E^{ss}(x_n)$, отвечающих этому сжатию.

По окончании работы алгоритма конструируется LMP-график на координатной плоскости $(dx, d\varphi)$, где dx определяет расстояние между любыми двумя точками x_i и x_j в наборе $\{x_n\}$, а $d\varphi$ – угол между соответствующими этим точкам векторами $E^{ss}(x_i)$ и

$E^{ss}(x_j)$. Если исследуемый аттрактор является псевдогиперболическим, то поле $E^{ss}(x_n)$ непрерывно, а огибающая точек на ЛМР-графике касается вертикальной оси $d\varphi$ только в начале координат. Таким образом, если построенный ЛМР-график обладает данным свойством, то сильно сжимающее подпространство E^{ss} непрерывно зависит от точки, а исследуемый аттрактор с большой вероятностью является псевдогиперболическим. С другой стороны, если огибающая набора точек на построенной ЛМР-диаграмме пересекает ось $d\varphi$ в нескольких точках или же между этой огибающей и осью $d\varphi$ нет видимого промежутка, исследуемый аттрактор определенно является квазиаттрактором.

З а м е ч а н и е 2.2 ЛМР-метод позволяет проверить только непрерывность подпространства E^{ss} , и с целью более строгого доказательства аналогичное свойство должно быть установлено для подпространства растяжения объемов E^{cu} . Однако эта задача является более сложной, и в рамках данной работы мы ее не решаем.

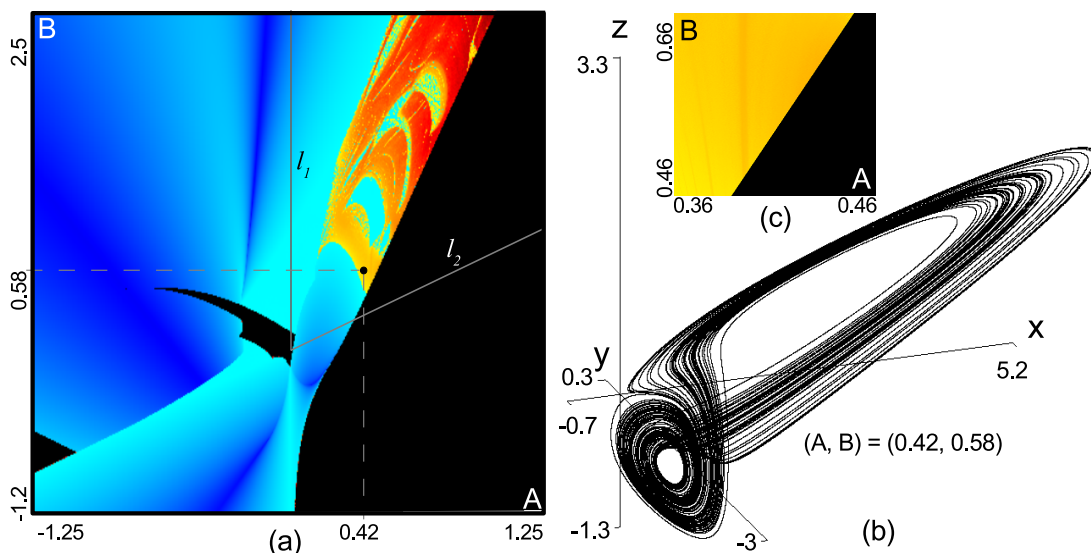
В следующем разделе продемонстрируем работу указанного метода на примере несимметричного аттрактора Лоренца для системы вида (2.1).

3. Несимметричный аттрактор Лоренца

Выбрав соответствующим образом функции g_1, g_2 и g_3 , получим следующую систему вида (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2) \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2) \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2) \end{cases} \quad (3.5)$$

На Рис. 3.1а для приведенной системы уравнений изображена диаграмма максимального показателя Ляпунова на плоскости параметров (A, B) при $C = -1.4$.



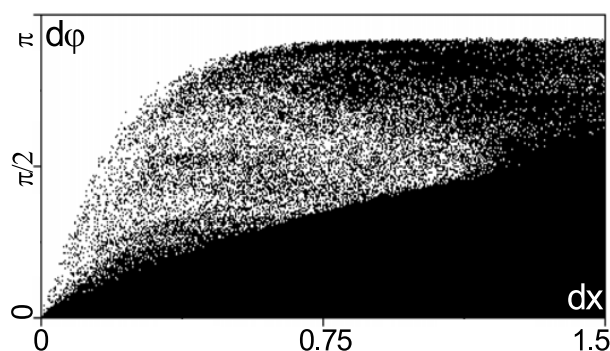
Р и с у н о к 3.1

Несимметричный аттрактор Лоренца и диаграмма показателей Ляпунова (красная область соответствует положительному старшему показателю Ляпунова)

Для удобства на диаграмму наложены бифуркационные кривые l_1 и l_2 , ограничивающие область существования несимметричного аттрактора Лоренца. Таким образом, область, отвечающая положительному максимальному показателю Ляпунова, накладывается на область возможного возникновения несимметричного аттрактора Лоренца. На Рис. 3.1b приведен фазовый портрет аттрактора при значениях параметров $A = 0.42, B = 0.58$.

Изображенный аттрактор действительно похож на аттрактор Лоренца. Кроме того, собственные значения состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ в этом случае принимают значения $\lambda_1 = 0.57, \lambda_2 = -0.32, \lambda_3 = -1.64$, а седловая величина равна $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.25 > 0$, что также соответствует необходимым условиям возникновения аттрактора Лоренца. Более того, расчет зависимости минимального расстояния от траектории на аттракторе до седловой точки $O(0, 0, 0)$ показывает, что обнаруженный аттрактор действительно является гомоклиническим.

Для проверки псевдогиперболичности обнаруженного аттрактора мы воспользовались LMP-методом. Результат работы этого метода для аттрактора, изображенного на Рис. 3.1b, приведен на Рис. 3.2. Из рисунка видно, что огибающая точек LMP-диаграммы касается оси $d\varphi$ только в начале координат, а значит, рассматриваемый аттрактор вероятно является псевдогиперболическим. Более того, по увеличенному фрагменту диаграммы старшего показателя Ляпунова, изображенному на Рис. 3.1c, можно сделать вывод, что в окрестности исследуемого аттрактора не возникает окон устойчивости, что свидетельствует о псевдогиперболичности аттрактором при малых возмущениях.



Р и с у н о к 3.2

Результат работы метода LMP-метода для несимметричного аттрактора Лоренца

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 17-11-01041. Численные эксперименты по проверке псевдогиперболичности, представленные в разделе 3, выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aframovich V. S., Shilnikov L. P., *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, Boston, Pitmen, 1983.
2. Тураев Д. В., Шильников Л. П., “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189**:2 (1998), 137-160.

3. Тураев Д. В., Шильников Л. П., “Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа”, *Докл. РАН*, **418**:1 (2008), 23–27.
4. S. V Gonchenko , I. I Ovsyannikov , C Simo, D Turaev., “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.
5. А. С. Гонченко, С. В. Гонченко , Л. П. Шильников., “К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений”, *Нелинейная Динам.*, **8**:1 (2012), 3–28.
6. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev., “Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”, *Int. J. Bif. and Chaos*, **24**:8 (2014), 25 с.
7. S.V. Gonchenko, A.O.Kazakov, D.Turaev, “Wild spiral attractors in a four-dimensional Lorenz model”, *to appear*.
8. A. L. Shilnikov, Shilnikov L. P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **1**:4 (1991), 773–776.
9. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *Physica D*, **337** (2016), 43–57.
10. V. Z. Grines , Y. V. Zhuzhoma, O. V.Pochinka, “Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one”, *Journal of Mathematical Sciences*, **225** (2017), 195–219.
11. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2013, 488 с.
12. E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**:2 (1963), 130–141.
13. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О возникновении и структуре аттрактора Лоренца”, *ДАН СССР*, **234**:2 (1977), 336–339.
14. W.Tucker, “The Lorenz attractor exists”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences-Series I-Mathematics*, **328**:12 (1999), 1197–1202.
15. S. Gonchenko, I.Ovsyannikov, C.Simo, D.Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. of Bifurcation and chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.
16. S.V. Gonchenko, A.S.Gonchenko, Kazakov A.O.Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**:5 (2013), 521–538.
17. L. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *IEEE transactions on circuits and systems*, **33**:11 (1986), 1072–1118.
18. Л. П. Шильников, *Теория бифуркаций и турбулентность*, Методы качественной теории дифференциальных уравнений : межвуз. сб., ГГУ Горький, 1986.
19. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В.Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2003.

20. D. Turaev, L. P. Shilnikov, “On bifurcations of the homoclinic «figure eight» for a saddle with a negative saddle value”, *Sov. Math. Dokl.*, **34** (1987), 397–401.

Поступила 2.04.2018

MSC2010 34C23, 34D45, 65P20

The asymmetric Lorenz attractor as an example of a new pseudohyperbolic attractor of three-dimensional systems

© A. O. Kazakov¹ A. D. Kozlov²

Abstract. In the paper a new method of constructing of three-dimensional flow systems with different chaotic attractors is presented. Using this method, an example of three-dimensional system possessing an asymmetric Lorenz attractor is obtained. Unlike the classical Lorenz attractor, the observed attractor does not have symmetry. However, the discovered asymmetric attractor, as well as classical one, belongs to a class of «true» chaotic, or, more precise, pseudohyperbolic attractors; the theory of such attractors was developed by D. Turaev and L.P. Shilnikov. Any trajectory of a pseudohyperbolic attractor has a positive Lyapunov exponent and this property holds for attractors of close systems. In this case, in contrast to hyperbolic attractors, pseudohyperbolic ones admit homoclinic tangencies, but bifurcations of such tangencies do not lead to generation of stable periodic orbits. In order to find the non-symmetric Lorenz attractor we applied the method of «saddle chart». Using diagrams of maximal Lyapunov exponent, we show that there are no stability windows in the neighborhood of the observed attractor. In addition, we verify the pseudohyperbolicity for the non-symmetric Lorenz attractor using the LMP-method developed quite recently by Gonchenko, Kazakov and Turaev.

Key Words: strange attractor, pseudohyperbolicity, homoclinic orbit, Lorenz attractor, Lyapunov exponents

REFERENCES

1. V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, Boston, Pitmen, 1983.
2. D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, “An example of a wild strange attractor”, *Sb. Math.*, **189:2** (1998), 291–314.
3. D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, “Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors”, *Doklady Mathematics*, **77:1** (2008), 17–21.
4. S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simo, D. Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **15:11** (2005), 3493–3508.

¹ **Alexey O. Kazakov**, Senior Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaja St., Nizhny Novgorod 603155, Russia); Assistant Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Prospekt Gagarina 603950 Nizhny Novgorod, Russia); PhD, ORCID: 0000-0003-0002-6553, kazakovdz@yandex.ru

² **Alexander D. Kozlov**, Junior Researcher, Laboratory of Topological methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia); PhD Student, (23 Prospekt Gagarina 603950 Nizhny Novgorod, Russia); ORCID: 0000-0003-1830-4769, kozzloff@list.ru

5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, L.P. Shilnikov, “Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps”, *Rus.J. Nonlin. Dyn.*, **8**:1 (2012), 3–28.
6. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov and, Turaev D. Turaev, “Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”, *Int. J. Bif. Chaos*, **24**(8) (2014), 25 p. c.
7. S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev, “Wild spiral attractors in a four-dimensional Lorenz model”, *to appear*.
8. A. L. Shilnikov, L. P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **1**:4 (1991), 773–776.
9. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *Physica D*, **337** (2016), 43–57.
10. V. Z. Grines, Ye. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Rough Diffeomorphisms with Basic Sets of Codimension One”, *Journal of Mathematical Sciences*, **225** (2017), 195–219.
11. S.P. Kuznetsov, *Dynamical Chaos and hyperbolic attractors: from mathematics to physics*, Institute of Computer Studying, M.-Izhevsk, 2013, 488 c.
12. E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the atmospheric sciences*, **20**:2 (1963), 130–141.
13. V.S. Afraimovich , V.V. Bykov, L.P. Shilnikov, “The origin and structure of the Lorenz attractor”, *Sov. Phys. Dokl.*, **234**:2 (1977), 253–255.
14. W. Tucker, “The Lorenz attractor exists”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences-Series I-Mathematics*, **328**:12 (1999), 1197–1202.
15. S. Gonchenko, I. Ovsyannikov, C. Simo, D. Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. of Bifurcation and chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.
16. S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, A.O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**:5 (2013), 521–538.
17. L. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *IEEE transactions on circuits and systems*, **33**:11 (1986), 1072–1118.
18. L.P. Shilnikov, [*The theory of bifurcations and turbulence*], [Methods of qualitative theory of differential equations], GGU Gorkiy, 1986.
19. L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods Of qualitative theory in nonlinear dynamics*, World Sci, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001.
20. D. Turaev, Shilnikov L. P. Shilnikov, “On bifurcations of the homoclinic «figure eight» for a saddle with a negative saddle value”, *Sov. Math. Dokl.*, **34** (1987), 397–401.

Submitted 2.04.2018