DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.78-87

УДК 51.7:532.546

Кинетическое уравнение для моделирования нестационарных неэквидистантных временных рядов

© Л. В. Клочкова [1], Ю. Н. Орлов [2], Р. В. Плешаков [3]

Аннотация. Построено кинетическое уравнение для выборочной функции распределения временного ряда, значения которого порождены нестационарным потоком событий. В случае, когда нестационарность обусловлена случайным переключением с одного случайного процесса на другой, что имеет место для многих практически наблюдаемых временных рядов, осуществляется фильтрация вложения, позволяющая выделить стационарную компоненту. Предложена модель для описания эволюции уровня загрязнения мегаполиса, при котором последовательность промежутков времени между случайными событиями (моментами выбросов загрязняющих веществ в атмосферу) образует нестационарный временной ряд. Описан программный комплекс по расчету статистик, определяющих эволюцию выборочного распределения на определенном временном промежутке. Реализовано преобразование данных статистик от объема выборки к промежутку времени и выведено уравнение эволюции их распределений в терминах эмпирического уравнения Лиувилля.

Ключевые слова: выборочная функция распределения, неэквидистантный временной ряд, уравнение Лиувилля, нестационарный поток событий.

1. Введение

Анализ нестационарных временных рядов, встречающихся на практике, опирается на изучение эволюционных свойств их выборочных функций распределения. Выборка представляет собой последовательность значений временного ряда, номер элемента данной последовательности отождествляется с моментом времени. Основы кинетического подхода к анализу выборочных распределений сформулированы в [1], [2]. В них были выписаны эволюционные уравнения Лиувилля и Фоккера-Планка для выборочной плотности функции распределения наблюдаемого временного ряда с целью поиска подходящей динамической системы, имеющей близкие к данной выборке статистические свойства. В этом случае дискретный аналог такой системы можно было бы рассматривать как модель временного ряда, позволяющей дать его прогноз на некоторый горизонт, определяемый скоростью разбегания близких траекторий.

Задача прогнозирования ряда с определенной точностью на заданный временной горизонт возникает во многих практических приложениях [3]–[8]. В работе [6] кинетические

[1] **Клочкова Людмила Викторовна**, старший научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3973-3909, klud@imamod.ru

[2] **Орлов Юрий Николаевич**, заведующий отделом прикладной теоретической физики, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9114-0436, ov3159f@yandex.ru

[3] **Плешаков Руслан Владимирович**, аспирант, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5368-4416, ruslanplkv@gmail.com

модели предлагалось использовать для прогнозирования загрязненности атмосферы мегаполисов, распространения инфекций или вредных примесей в случайно-неоднородной и нестационарной среде. В работе [9] исследовались некоторые статистики на неэквидистантных временных рядах, например, распределение показателя Херста временного ряда для оценки преимущественного сохранения тенденции или, напротив, смены ее на противоположную.

Ограничение изложенной в [3]–[8] теории состоит в том, что на практике промежутки времени между событиями являются случайными, например, промежутки времени между запросами в системе массового обслуживания, между землетрясениями в сейсмически активном регионе, между аварийными сбросами продуктов химического производства и т. п. Разумеется, для подобных рядов также можно изучать распределения, построенные по некоторому объему данных, а не по промежутку реального времени, но многие вопросы оказываются при этом вне рассмотрения. Так, корреляция между моментом загрязнения атмосферы и уровнем заболеваемости населения имеет временной, а не событийный лаг. Поэтому возникают статистические задачи, принципиально формулируемые в терминах текущего времени, а не порядковых номеров элементов ряда.

Дополнительная сложность состоит в том, что как поток событий, так и сами значения временного ряда имеют нестационарные распределения, вследствие чего возникает задача согласованного моделирования двух нестационарных потоков данных.

Использование кинетических моделей для описания эволюции распределения случайных параметров, характеризующих интенсивность источника вредных примесей, является весьма актуальным. Данный подход позволяет корректно задать статистические свойства источника для последующего решения уравнений химической кинетики, описывающих эволюцию примесей, их состав и концентрацию в химически активном газе в определенных температурных и конвективных условиях внешней среды. В силу того, что источник загрязнения по интенсивности и составу является случайным и нестационарным, кинетические уравнения, применяемые в условиях неопределенности пространственного распределения примесей, приобретают дополнительные стохастические свойства из-за неопределенности функции источника.

Генерация ансамбля траекторий неэквидистантного нестационарного временного ряда является, таким образом, важной с практической точки зрения задачей, решение которой позволит моделировать различные функционалы управления наблюдаемым случайным процессом и проводить их оптимизацию. В данной работе представлена методика, позволяющая применить кинетический подход к анализу временных рядов различного типа.

2. Метод генерации неэквидистантной траектории

Генерация неэквидистантного нестационарного временного ряда основывается на следующих предположениях относительно структуры потока событий [4].

Во-первых, считаем, что существует некоторый промежуток времени, называемый периодом, внутри которого задана нормированная на единицу функция интенсивности потока. Применительно к экологической обстановке мегаполиса такой период связан с естественной суточной и сезонной периодичностью. Это позволяет задать определенный временной промежуток, на котором анализируется случайный процесс.

Во-вторых, абсолютные значения приростов наблюдаемой случайной величины (например, уровня загрязнения) имеют распределение с «толстым хвостом», причем нестационарность потока присуща наиболее вероятному событию, по сравнению с которым менее вероятные события реализуются в виде стационарного потока событий. Это предположение позволяет провести фильтрацию данных с целью изучения статистики относительно редких, но значимых событий. В результате случайный процесс представляется в виде вложения двух процессов – стационарного и нестационарного. Именно длина серии из элементов последовательности наиболее вероятных событий образует нестационарный временной ряд, а длительность серии из прочих событий является стационарным случайным процессом.

Сделанные предположения позволяют построить модель временного ряда, обладающего свойствами, близкими к наблюдаемым на практике.

Этап I. Подготовка данных. На этапе подготовки данных для моделирования траектории неэквидистантного временного ряда собираются статистики:

– функции распределения $F(\theta)$ серий событий по длительности времени θ общего движения траектории значения случайной величины (уровня загрязнения) вверх или вниз;

– вероятности $P^{\pm}$ положительного и отрицательного прироста случайной величины для наиболее вероятного события, $P^{+}+P^{-}=1$;

– параметр нестационарного пуассоновского потока событий $\Lambda(t,\tau)$ на промежутке времени $\Delta_t(\tau)=[t-\tau;t]$ внутри периода T (например, за месяц);

– функция распределения $G(n)$ серий приращений, абсолютная величина которых отличается от наиболее вероятного, в зависимости от числа n событий;

– совместная плотность распределения $f(k,k';K,t)$ длин k и их приращений k' для серий наиболее вероятного абсолютного приращения по выборке длины K событий в момент времени t.

По собранным статистикам определяется вероятность $p_k(t-\tau,t)$ числа k событий на промежутке времени $\Delta_t(\tau)$ по формуле:

$$p_k(t-\tau,t)=\frac{(\Lambda(t,\tau))^k}{k!}\exp(-\Lambda(t,\tau)),\quad \Lambda(t,\tau)=\tau\mu(t-\tau,t). \tag{2.1}$$

Введенная здесь величина $\mu(t-\tau,t)$ называется интенсивностью потока на промежутке $\Delta_t(\tau)$ представляет собой среднее число событий на указанном промежутке:

$$\mu(t-\tau,t)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}kp_k(t-\tau,t). \tag{2.2}$$

Считаем, что события независимы, а поток ординарный. Время агрегирования событий полагаем равным некоторой условной единице $\tau\equiv 1$ (например, 1 сутки).

После этого задается ожидаемое число N событий на временном горизонте T моделирования временного ряда. Оно необходимо для того, чтобы провести нормировку профиля интенсивности $\Lambda(t,\tau)$ на это число событий.

Этап II. Генерация траектории. На следующем этапе из распределения $F(\theta)$ генерируется случайный ряд чисел θ_k в единицах измерения времени, принятом в параметре потока:

$$\sum_k \theta_k = T. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) определяет суммарное количество M макродвижений вверх и вниз (нарастание уровня загрязнения или очищение и релаксация среды) и их длительность, на каждом промежутке θ_k задается вероятность $P_k^{\pm}$ положительного и отрицательного приростов.

Затем генерируются случайные целые числа n_j из распределения (2.1), которые дают числа событий в течение условной временной единицы τ на промежутках $\Delta_\tau(j)$, где

j есть номер текущего времени в терминах τ. Для данной генерации находится число событий:

$$\widetilde{N} = \sum_{j=1}^{T} n_j. \tag{2.4}$$

Это число $\widetilde{N}$ в общем случае отлично от заданного изначально N, но выборочное среднее число событий за период по ансамблю траекторий сходится к числу N при увеличении числа траекторий.

Далее генерируется выборка чисел ± 1 общей длины $\widetilde{N}$ из кусочно-стационарного распределения вероятностей $P_k^{\pm}$ в соответствии со случайным числом макродвижений из (2.3). Эта выборка определяет знак приращения значения случайной величины в отдельном событии.

Из плотности функции распределения $f(k, k'; K, t)$ находятся функции

$$\varphi(k; K, t) = \sum_{k'} f(k, k'; K, t), \quad u(k; K, t)\varphi(k; K, t) = \sum_{k'} k' f(k, k'; K, t), \tag{2.5}$$

которые участвуют в построении уравнения Лиувилля для моделирования эволюции распределения $\varphi(k; K, t)$ из промежутка времени $\Delta_\tau(j)$ в промежуток $\Delta_\tau(j+1)$:

$$\varphi(k; K, j+1) = \varphi(k; K, j) + \varphi(k-1; K, j)u(k-1; K, j) - \varphi(k; K, j)u(k; K, j). \tag{2.6}$$

Таким образом, из решения разностного уравнения (2.6) становятся известны нестационарные распределения длин серий наиболее вероятных приростов. Функции $f(k, k'; K, t)$ вычисляются в скользящем окне длины K, поэтому на их вид влияют и выбранные на предыдущих этапах моделирования параметры потока и промежутки трендов вверх и вниз.

После того как вычисляются функции $\varphi(k; K, j)$, из них как из аналогов генеральных совокупностей строятся выборки длин $k_{1,j}, k_{2,j}, \ldots$ в таком количестве, что их сумма равна прогнозному числу событий из (2.4):

$$\sum_i k_{i,j} = n_j.$$

Длины серий наиболее вероятных приростов прерываются сериями приростов на другие величины. Данные серии, как было отмечено выше, имеют стационарное распределение $S(n)$ по длинам, из которого генерируется случайный набор целых чисел $n_{1,j}, n_{2,j}, \ldots,$ равных длинам серий указанного второго типа. Длины серий $k_{i,j}$ и $n_{i,j}$ чередуются до тех пор, пока их суммарная длина не станет равной n_j или не будет превосходить это число за счет последнего слагаемого. После этого начинается аналогичное построение в следующем промежутке времени $\Delta_\tau(j+1)$.

Знаки приростов во всех этих событиях определяются последовательностью случайных знаков ± 1, которая генерировалась на предыдущих этапах моделирования.

В результате была построена модель неэквидистантной траектории временного ряда на заданном горизонте.

3. Уравнение эволюции выборочной плотности распределения

В начальный момент времени t известна выборочная плотность функции распределения (ВПФР) $F_N(x, n)$, построенная по выборке длины N в момент времени $t(n)$, где

n есть номер ближайшего слева события к моменту t. Эту ВПФР в терминах номера события будем в этой главе обозначать $F_N(x,n)$, а ВПФР, построенную по тому количеству событий, которое произошло за промежуток времени $[t-T;t]$, если это количество событий отлично от нуля, обозначим $f_T(x,t)$.

Предположим, что параметр потока $\Lambda(t,\tau)$ из (2.1)–(2.2) известен. Тогда можно перейти к построению прогноза ВПФР $\widehat{F}_{N(k)}(x,n+k)$. В терминах номера события уравнение эволюции ВПФР имеет вид [1], [4]:

$$\frac{\partial F_N(x,n)}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial x}u(x,n)F_N(x,n)=0, \quad u(x,n)=\int \dot{x}F_N^{(2)}(x,\dot{x},n)d\dot{x}, \tag{3.1}$$

где эмпирическая скорость $u(x,n)$ определяется через совместную ВПФР $F_N^{(2)}(x,\dot{x},n)$ значений ряда и его приращений в терминах номера события.

Чтобы построить аналогичное уравнение для ВПФР в терминах времени, надо переписать его через единицы агрегирования, т. е. в нашем случае для шага по времени τ, который для удобства считаем единичным.

Поскольку производная по времени выражается через производную по числу событий согласно формуле

$$\frac{\partial F_N(x,n)}{\partial t}=\frac{\partial F_N(x,n)}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial t} \tag{3.2}$$

и последнюю следует понимать в агрегированном смысле, т. е. $dn/dt=n(t+1)-n(t)$, то

$$\frac{dn}{dt}=\Lambda(t,\tau). \tag{3.3}$$

Из (3.1)–(3.2) следует, что уравнение Лиувилля можно переписать в виде эволюции по агрегированному моменту времени:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=-\Lambda(t,\tau)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)f(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}\nu(x,t)f(x,t),\\ \nu(x,t)=\Lambda(t,\tau)u(x,t).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Прогнозная модель для ВПФР $f(x,t)$ следует из (3.4) заменой $u(x,t)$ и $\Lambda(t,\tau)$ на их прогнозные значения:

$$\widehat{f}(x,t+1)=f(x,t)-\frac{\partial}{\partial x}\widehat{\Lambda}(t,\tau)\widehat{u}(x,t)f(x,t). \tag{3.5}$$

Таким образом, было построено эволюционное уравнение для ВПФР неэквидистантного нестационарного временного ряда в терминах времени. Для прогноза самого ряда можно, например, принять прогнозное значение равным среднему по прогнозному распределению:

$$\widehat{x}(t(n+k))=\int \widehat{F}_{N(k)}(x,n+k)dx. \tag{3.6}$$

4. Аппроксимация с помощью нелинейных динамических систем

После того как проведена фильтрация вложения, позволяющая извлечь из потока событий стационарную серию, длина которой прерывается вторым процессом с нестационарным распределением, можно построить хаотическую динамическую систему, динамически-инвариантная мера которой представляет собой то самое эмпирически найденное стационарное распределение серий по длинам. Такую динамическую систему, которая порождает стационарное эмпирическое распределение, можно построить следующим образом.

Пусть имеется некоторая одномерная хаотическая динамическая система, принимающая значения на $[0;1]$, с заданным законом отображения $y_{n+1}=g(y_n)$. Пусть функция g имеет несколько промежутков монотонности. Для простоты предположим, что таких промежутков два. Возьмем, например, кусочно-линейное отображение:

$$y_{n+1}=\begin{cases} 2y_n, & 0\le y_n<1/2; \\ \\ 2-2y, & 1/2\le y_n\le 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Если требуется построить динамическую систему с законом распределения с эмпирической плотностью $f(x)$, то нужное отображение определяется функцией, обратной к интегральной функции распределения $F(x)$. Например, для распределений с насыщением характерны зависимости вида $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$, для которых получаем $F(x)=1-e^{-\alpha x}$.

Обратная функция имеет вид $h(y)=-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-y)$. Тогда на каждом из промежутков монотонности функции g (4.1) искомое отображение задается формулой:

$$x_{n+1}=h\left(g(h^{-1}(x_n))\right). \tag{4.2}$$

Соответствующее отображение имеет вид:

$$x_{n+1}=\begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}\ln\left(2e^{-\alpha x_n}-1\right), & 0\le x_n\dfrac{1}{\alpha}\ln 2; \\ \\ -\dfrac{1}{\alpha}\ln\left(1-2e^{-\alpha x_n}\right), & \dfrac{1}{\alpha}\ln 2\le x_n<+\infty. \end{cases} \tag{4.3}$$

Следует заметить, что длины промежутков между сериями выражаются натуральными числами, поэтому элементы ряда таких длин определяются из (4.3) формулой $l_n=[x_n]+1$. По построению, найденная динамическая система не единственная. Вместо (4.1) можно взять другую затравочную систему, например, логистическую.

Важно понимать, что модель (4.1)–(4.3) не предсказывает промежутки между сериями равных длительностей, а всего лишь дает одну из возможных траекторий таких промежутков в соответствии с их вероятностным распределением. Описанная конструкция аналогична методу построения случайной траектории, реализующей значения случайной величины с заданным законом распределения.

Таким образом, уравнение (4.3) определяет динамическую систему, для которой эмпирическое распределение длительностей серий является инвариантной мерой, т. е. не зависит от времени. Для оставшейся от проведенной фильтрации нестационарной выборочной функции распределения следует использовать модельное кинетическое уравнение. Как правило, на практике нестационарность достаточно хорошо моделируется уравнением диффузии со сносом. Так, для одномерной плотности вероятности $f(x,t)$ регулярного диффузионного процесса применяется уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,t)f(x,t)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\lambda(x,t)f(x,t)\right), \tag{4.4}$$

где $u(x,t)$ – скорость сноса вероятности; $\lambda(x,t)$ – неотрицательный коэффициент диффузии. Величина сноса оценивается из сопоставления двух выборочных распределений, построенных для встык-выборок, длина которых равна горизонту прогноза, а коэффициент диффузии определяется непосредственно по элементам ряда в предшествующий момент времени. Именно $\lambda = \dfrac{d\sigma^2}{dt} - 2\mathrm{cov}_{x,\nu}$, где σ^2 – выборочная дисперсия ряда, а $\mathrm{cov}_{x,\nu}$ – выборочная ковариация элементов ряда и его первых разностей. Производная по времени понимается в данном случае как разность дисперсий в два последовательных момента времени.

Скорость $u(i,t)$ изменения выборочной плотности функции распределения в i-ой ячейке в момент t определяется по формуле:

$$u(i+1,t)f(i+1,t) = -\sum_{k=1}^{i}\left(f(k,t+1) - f(k,t)\right), \tag{4.5}$$

т. е. выражается через изменение выборочной интегральной функции распределения за один шаг по времени. Динамическая система, порождающая временной ряд значений $x(t)$, приближенно находится из (4.5). Обозначая правую часть уравнения (4.5), деленную на $f(i+1,t)$, через $w(i,t)$, получаем:

$$u(i,t) = w(i-1,t). \tag{4.6}$$

Данная динамическая система, в отличие от (4.3), является неавтономной, и скорость $u(i,t)$ трактуется как изменение значения самого временного ряда, т. е. $u(i,t) = x(t+1) - x(t)$. Эта модель действует на ограниченном промежутке времени -– именно на том, в котором оценена скорость (4.6).

5. Заключение

Описанная методика позволяет моделировать как нестационарную систему пикового числа событий, когда поток событий и само значение случайной величины являются нестационарными процессами, так и подобные ей нестационарные многомерные потоки случайных событий. Кроме задач экологического характера, объектами моделирования могут быть и собственно системы массового обслуживания, когда поток телефонных вызовов или запросов на посещение сайта и скачивание определенной информации имеет нестационарные характеристики. Для таких систем построенная методика позволяет провести оптимизацию функционала управления: совокупности мероприятий по предотвращению аварий или ликвидация их последствий, профилактики заболеваний, алгоритма работы торговой системы на бирже, блокирования определенных запросов на сайт системы массового обслуживания и т. п. Дальнейшее развитие теории в этом направлении представляется актуальной задачей.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00361.

Список литературы

1. Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин, “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, **20**:9 (2008), 23–33.

2. Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин, *Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков*, URSS, М., 2011, 384 с.

3. Ю. Н. Орлов, С. Л. Федоров, *Моделирование и статистический анализ функционалов, заданных на выборках из нестационарного временного ряда*, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, № 43, Москва, 2014, 26 с.

4. Ю. Н. Орлов, *Кинетические методы исследования нестационарных временных рядов*, МФТИ, М., 2014, 432 с.

5. Ю. Н. Орлов, С. Л. Федоров, *Методы численного моделирования процессов нестационарного случайного блуждания*, МФТИ, М., 2016, 108 с.

6. Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов, В. Ф. Тишкин, “Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:1 (2012), 8–15.

7. Д. А. Зенюк, Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов, “Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 125–133.

8. Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов, С. Л. Федоров, “Моделирование ансамбля нестационарных траекторий с помощью уравнения Фоккера-Планка”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:1 (2016), 126–134.

9. Д. С. Кириллов, О. В. Короб, Н. А. Митин, Ю. Н. Орлов, Р. В. Плешаков, *Распределения показателя Херста нестационарного маркированного временного ряда*, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша №11, Москва, 2013, 16 с.

Поступила 25.12.2017

MSC2010 37M10

Kinetic equation for simulation of non-stationary non-equidistant time-series

© **L. V. Klochkova** [4], **Yu. N. Orlov** [5], **R. V. Pleshakov** [6]

Abstract. We obtain kinetic equation for the sample distribution function of the time series with values generated by non-stationary flow of events. In many practically observed time series unsteadiness is due to random switching from one random process to another. In these cases the attachments are filtered; it allows to select a stationary component of series. A model is proposed to describe the evolution of pollution levels in the city. In this model a sequence of time intervals between random events, which are the moments of pollutants' emission into the atmosphere, forms a non-stationary time series. Software package for calculating statistics that determine the evolution of the sampling distribution at a certain time interval is described. The conversion of these statistics from sample size to the time interval is implemented. The equation of their distributions' evolution in terms of empirical Liouville equation is obtained.

Key Words: sample distribution function, non-equidistant time series, Liouville equation, non-stationary flow of events.

References

1. Yu. N. Orlov, K. P. Osminin, "[Construction of the sample distribution function for non-stationary time-series forecasting]", *Matematicheskoye modelirovaniye*, **20**:9 (2008), 23–33 (In Russ.).

2. Yu. N. Orlov, K. P. Osminin, *Nestatsionarnyye vremennyye ryady: metody prognozirovaniya s primerami analiza finansovykh i syr'evykh rynkov [Non-stationary time-series: forecasting methods with examples of financial and goods markets analysis]*, Editorial URSS, Moscow, 2011 (In Russ.), 384 c.

3. Yu. N. Orlov, S. L. Fedorov, *Modelirovaniye i statisticheskiy analiz funktsionalov, zadannykh na vyborkakh iz nestatsionarnogo vremennogo ryada [Functional modeling and its statistical analysis over the samples of the non-stationary time-series]*, Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics, №43, **43**, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2014 (In Russ.), 26 c.

4. Yu. N. Orlov, *Kineticheskiye metody issledovaniya nestatsionarnykh vremennykh ryadov [Kinetic method of the investigation of non-stationary time-series]*, MIRT, Moscow, 2014 (In Russ.), 276 c.

5. Yu. N. Orlov, S. L. Fedorov, *Metody chislennogo modelirovaniya protsessov nestatsionarnogo sluchainogo bluzhdaniya [Numerical simulation methods for non-stationary random processes]*, MIPT, Moscow, 2016 (In Russ.), 112 c.

[4] **Ludmila V. Klochkova**, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3973-3909, klud2015@mail.ru

[5] **Yuriy N. Orlov**, Professor, Head of the Department, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9114-0436, ov3159f@yandex.ru

[6] **Ruslan V. Pleshakov**, Postgraduate Student, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5368-4416, ruslanplkv@gmail.com

6. L. V. Klochkova, Yu. N. Orlov, V. F. Tishkin, “[Mathematical modeling of the correlation between air and epidemiology situation in megapolis]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, **14**:1 (2012), 8–15 (In Russ.).

7. D. A. Zenyuk, L. V. Klochkova, Yu. N. Orlov, “[Modeling of non-stationary random processes with help kineticheskii equations with fractional derivatives]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, **18**:2 (2016), 125–133 (In Russ.).

8. L. V. Klochkova, Yu. N. Orlov, S. L. Fedorov, “[Modeling of a non-stationary ensemble of trajectories using the Fokker-Planck equation]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, **18**:1 (2016), 126–134 (In Russ.).

9. D. S. Kirillov, O. V. Korob, N. A. Mitin, Yu. N. Orlov, R. V. Pleshakov, *Raspredeleniya pokazatelya Khersta nestatsionarnogo markirovannogo vremennogo ryada [Hurst exponent distributions for non-stationary marked time-series]*, Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics, №11, **11**, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2013 (In Russ.), 16 c.

Submitted 25.12.2017