DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.46-54

УДК 519.17

О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего максимальные независимые множества в полных деревьях

© **Д. С. Талецкий**[1]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается нелинейное рекуррентное уравнение второго порядка, возникающее при анализе количества независимых множеств в полных q-арных деревьях. Ранее было доказано, что при $q = 2$ решение данного уравнения имеет предел, а при любом достаточно большом q оно распадается на три сходящиеся подпоследовательности, индексы которых соответствуют классам вычетов по модулю три. Ранее проведенный вычислительный эксперимент позволил предположить, что этот эффект имеет место при любом $q \geq 11$. В настоящей работе доказывается расходимость решения при любом $q \geq 3$. Необходимым условием одновременной сходимости всех трех подпоследовательностей решения, индексы которых соответствуют классам вычетов по модулю три, является существование специального решения некоторой системы нелинейных уравнений. Проведенный в настоящей работе численный поиск решений системы показал, что при $3 \leq q \leq 9$ соответствующего решения системы не существует. Численно-аналитическим образом в данной работе показывается нераспадаемость на три подпоследовательности и для $q = 10$.

Ключевые слова: рекуррентное уравнение, теорема расходимости, вычислительный эксперимент.

1. Введение

Исследованию асимптотики количества независимых множеств в графах из параметрически заданных классов (в зависимости от параметров класса) посвящено множество работ ([1]–[8]). Так, А. Д. Коршунов и А. А. Сапоженко исследовали асимптотику количества независимых множеств в n-мерном кубе [1]. Н. Калкин и Г. Вилф описали слабую асимптотику количества независимых множеств в плоской прямоугольной решетке [5]. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай рассматривали случай полных q-арных деревьев. Количество независимых множеств в полном q-арном дереве высоты n обозначим через $\mathrm{i}(q,n)$. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай доказали в [2] существование таких констант $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$ ($\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2}$), что для любого $q \in \overline{2,4}$ при $n \longrightarrow \infty$ выполнена асимптотика $\mathrm{i}(q,n) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$ и для любого $q \geq 5$ при $k \longrightarrow \infty$ справедливы асимптотики:

$$\mathrm{i}(q,2k) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}, \mathrm{i}(q,2k+1) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}.$$

В работе [4] рассматривалась величина $\mathrm{mi}(q,n)$ — количество максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях высоты n. Согласно данному исследованию, для некоторых констант α_2 и β_2 при $n \longrightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $\mathrm{mi}(q,n) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$. В работе [4] было также доказано, что для любого достаточно большого q, некоторых трех попарно различных констант $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ и константы b_q при

[1] **Талецкий Дмитрий Сергеевич**, лаборант кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0966-3903, dmitalmail@gmail.com

$k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства:

$$\mathrm{mi}(q,3k) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \mathrm{mi}(q,3k+1) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \mathrm{mi}(q,3k+2) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}.$$

Проведенный в [4] вычислительный эксперимент позволил предположить, что второй результат справедлив для любого $q \geq 11$. Оба результата получены анализом свойств решения определенного рекуррентного уравнения с некоторыми начальными условиями, связывающего величины $\mathrm{mi}(q,n), \mathrm{mi}(q,n-1)$ и $\mathrm{mi}(q,n-2)$. Если принять $a(q,n) \triangleq \dfrac{\mathrm{mi}(q,n)}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q}$, то данное уравнение приобретает вид:

$$\begin{array}{c} a(q,n) = \frac{1}{(a(q,n-1))^q} + 1 - (1 - \frac{1}{a(q,n-1)\cdot(a(q,n-2))^q})^q, \\ a(q,1) = 2, \\ a(q,2) = 1. \end{array} \tag{1.1}$$

В [4] было доказано, что последовательность $\{a(2,n)\}$ имеет предел и что каждая из последовательностей $\{a(q,3k)\}, \{a(q,3k+1)\}, \{a(q,3k+2)\}$ также имеет свой предел при любом достаточно большом q. Из этого утверждения следуют результаты, упомянутые в предыдущем абзаце. Однако в работе [4] не исследовалось поведение последовательности $\{a(q,n)\}$ при малых q. В настоящей работе мы показываем, что при любом $q \geq 3$ последовательность $\{a(q,n)\}$ не имеет предела, а следовательно не существует констант α_q'' и b_q'' таких, что $\mathrm{mi}(q,n) \sim \alpha_q'' \cdot (\beta_q'')^{q^n}$. Это первый основной результат настоящей работы. Необходимым условием одновременной сходимости всех трех подпоследовательностей $\{a(q,3k)\}, \{a(q,3k+1)\}, \{a(q,3k+2)\}$ является существование специального решения некоторой системы нелинейных уравнений. Проведенный в настоящей работе численный поиск решений данной системы показал, что при $3 \leq q \leq 9$ соответствующего решения не существует. Поэтому для таких значений q не существует трех попарно различных констант $\alpha_q^{(I)}, \alpha_q^{(II)}, \alpha_q^{(III)}$ и константы b_q''' таких, что при $k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства:

$$\mathrm{mi}(q,3k) \sim \alpha_q^{(I)} \cdot (\beta_q''')^{q^{3k}}, \mathrm{mi}(q,3k+1) \sim \alpha_q^{(II)} \cdot (\beta_q''')^{q^{3k+1}}, \mathrm{mi}(q,3k+2) \sim \alpha_q^{(III)} \cdot (\beta_q''')^{q^{3k+2}}.$$

Дополнительные численно-аналитические рассуждения показали, что данное утверждение справедливо также для $q = 10$. Полученные результаты составляют второй основной результат настоящей работы.

2. О расходимости последовательности $a(q,n)$ при $q \geq 3$

В данном разделе докажем, что при любом $q \geq 3$ последовательность $\{a(q,n)\}$ не имеет предела. Введем обозначение: $f(t_1,t_2) \triangleq \frac{1}{t_1^q} + 1 - (1 - \frac{1}{t_1 t_2^q})^q$. Отметим, что в списках аргументов функций мы не будем явно указывать аргумент q. Тогда соотношение 1.1 имеет вид: $a(q,n) = f(a(q,n-1), a(q,n-2))$. Согласно работе [4] доказано, что $1 \leq a(q,n) \leq 2$ для любых $q \geq 2$ и n, поэтому далее будем рассматривать функцию $f(t_1,t_2)$ только на множестве $\{(t_1,t_2):\ (t_1,t_2) \in [1,2]^2, f(t_1,t_2) \geq 1\}$.

Частные производные функции $f(t_1,t_2)$ имеют вид:

$$\begin{array}{c} f'_{t_1}(t_1,t_2) = -\frac{q}{t_1^{q+1}} - q \cdot (1 - \frac{1}{t_1 t_2^q})^{q-1} \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2^q}, \\ f'_{t_2}(t_1,t_2) = -q \cdot (1 - \frac{1}{t_1 t_2^q})^{q-1} \cdot \frac{q}{t_1 t_2^{q+1}}. \end{array} \tag{2.1}$$

Поскольку частные производные функции $f(t_1,t_2)$ отрицательны при положительных t_1 и t_2, то функция $f(t_1,t_2)$ убывает в первом квадранте. Вместе с тем $f(1,1) = 2$ и

$f(2,2) < 2$ для любого $q \geq 2$. Поэтому уравнение $f(t,t) = t$ имеет единственное решение на множестве [1,2], которое мы обозначим через L_q. Очевидно, что $1 < L_q < 2$. Не существует такого n, что выполнено равенство $a(q,n+1) = a(q,n) = L_q$. Действительно, иначе $L_q = f(L_q, a(q,n-1))$, откуда по формулам 2.1 следовало бы, что $a(q,n-1) = L_q$ и поэтому $a(q,1) = a(q,2)$. Данное равенство не возможно.

Предположим, что при некотором $q \geq 3$ последовательность $\{a(q,n)\}$ имеет предел. Тогда он должен быть решением уравнения $f(t,t) = t$, т.е. совпадать с L_q.

Введем обозначения:

$$A_q \triangleq f'_{t_1}(L_q, L_q) = -\tfrac{q}{L_q^{q+1}} - q \cdot (1 - \tfrac{1}{L_q^{q+1}})^{q-1} \cdot \tfrac{1}{L_q^{q+2}},$$
$$B_q \triangleq f'_{t_2}(L_q, L_q) = -q^2 \cdot (1 - \tfrac{1}{L_q^{q+1}})^{q-1} \cdot \tfrac{1}{L_q^{q+2}},$$
$$T_q \triangleq 1 - \tfrac{1}{L_q^{q+1}}.$$

Тогда равенство $f(L_q, L_q) = L_q$ перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} T_q^q + L_q \cdot T_q = 1 \\ T_q = 1 - \dfrac{1}{L_q^{q+1}}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Лемма 2.1 *При любом $q \geq 3$ справедливы неравенства $B_q < -1$ и $B_q < A_q + 1$.*

Доказательство. Компьютерные вычисления показывают, что верны равенства:

$$\begin{aligned} L_3 = 1.265..., L_4 &= 1.238..., L_5 = 1.216..., \\ A_3 = -1.515..., A_4 &= -1.689..., A_5 = -1.836..., \\ B_3 = -1.032..., B_4 &= -1.255..., B_5 = -1.447... \end{aligned}$$

Очевидно, что утверждение леммы верно при $3 \leq q \leq 5$. Предположим, что $q \geq 6$. Пусть $\lambda = 1.432...$ — решение уравнения $\lambda \cdot \mathrm{e}^\lambda = 6$. Очевидно, что $|B_q| = q^2 \cdot \dfrac{T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}}$. Предположим, что $T_q \geq 1 - \dfrac{\lambda}{q}$. Из второго равенства системы 2.2, неравенства Бернулли $T_q^q > 1 - \dfrac{q}{L_q^{q+1}}$ и неравенства $(1 - 1/x)^x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, верного для любого $x > 1$, следует, что справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^\lambda} + 1 - \frac{\lambda}{q} < \max\left(\left(1 - \frac{\lambda}{q}\right)^q + 1 - \frac{\lambda}{q}, 1 - \frac{q}{L_q^{q+1}} + L_q \cdot T_q\right) \leq T_q^q + L_q \cdot T_q = 1,$$

откуда $q < \lambda \cdot \mathrm{e}^\lambda = 6$. Поэтому $T_q < 1 - \dfrac{\lambda}{q}$. Тогда $\dfrac{1}{L_q^{q+1}} > \dfrac{\lambda}{q}$ и $|B_q| > \lambda \cdot q \cdot \dfrac{T_q^{q-1}}{L_q}$. Покажем, что $\lambda \cdot q \cdot \dfrac{T_q^{q-1}}{L_q} > 1$. Предположим противное: $T_q^q \leq \dfrac{L_q \cdot T_q}{\lambda \cdot q}$. Отсюда и первого равенства системы (2.2) следует, что $L_q \cdot T_q \cdot (1 + \dfrac{1}{\lambda \cdot q}) \geq 1$, т. е.

$$L_q \cdot T_q \geq \frac{\lambda \cdot q}{1 + \lambda \cdot q} = 1 - \frac{1}{\lambda \cdot q + 1} > 1 - \frac{1}{\lambda \cdot q}.$$

Тогда из последнего неравенства и первого равенства системы (2.2) следует, что выполнены неравенства:

$$T_q^q < \frac{1}{\lambda \cdot q}, L_q^q \cdot T_q^q > \left(1 - \frac{1}{\lambda \cdot q}\right)^q > \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

Поскольку $\frac{1}{L_q^{q+1}} > \frac{\lambda}{q}$, то $\frac{q}{\lambda} > L_q^{q+1} > L_q^q$. Тогда $\frac{1}{\lambda^2} > L_q^q \cdot T_q^q > \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}}$, т. е. $\lambda^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}} < 1$. Но $\lambda^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}} = 1.020\ldots$. Получаем противоречие с предположением. Поэтому неравенство $B_q < -1$ выполнено для любого $q \geq 3$.

Очевидно, что $A_q = -\frac{q}{L_q^{q+1}} + \frac{B_q}{q}$ и поэтому неравенство $B_q < 1 + A_q$ равносильно неравенству:

$$\frac{q \cdot (q-1) \cdot T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}} > \frac{q}{L_q^{q+1}} - 1. \tag{2.3}$$

Предположим, что неравенство (2.3) не выполняется. Тогда выполнены неравенства:

$$\frac{q \cdot (q-1) \cdot T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}} \leq \frac{q}{L_q^{q+1}}, T_q^q \leq \frac{L_q \cdot T_q}{q-1}.$$

Отсюда и второго равенства системы (2.2) следует, что выполнено неравенство $L_q \cdot T_q \geq (1 - \frac{1}{q})$. Но тогда выполнены неравенства:

$$L_q^{q-1} \cdot T_q^{q-1} \geq (1 - \frac{1}{q})^{q-1} \geq (1 - \frac{1}{q-1})^{q-1} > \frac{1}{\mathrm{e}},$$

т. е. $T_q^{q-1} > \dfrac{1}{\mathrm{e} \cdot L_q^{q-1}}$. Из последнего неравенства следует выполнение неравенств:

$$\frac{q \cdot (q-1) \cdot T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}} > \frac{q \cdot (q-1)}{\mathrm{e} \cdot L_q^{2q+1}} > \frac{q \cdot (q-1)}{\mathrm{e} \cdot L_q^{2q+2}}.$$

Проверим, что выполнено неравенство $\dfrac{q \cdot (q-1)}{\mathrm{e} \cdot L_q^{2q+2}} > \dfrac{q}{L_q^{q+1}} - 1$. Рассмотрим функцию $g(t) \triangleq \dfrac{q \cdot (q-1)}{\mathrm{e}} \cdot t^2 - q \cdot t + 1$. Функция $g(t)$ является квадратным трехчленом с положительным старшим коэффициентом. Уравнение $g(t) = 0$ не имеет вещественных корней, поскольку соответствующий дискриминант равен $q^2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} \cdot q \cdot (q-1)$, который является отрицательным при любом $q \geq 4$. Тогда $g(t) > 0$ для любого t. Заметим, что

$$g\left(\frac{1}{L_q^{q+1}}\right) = \frac{q \cdot (q-1)}{\mathrm{e} \cdot L_q^{2q+2}} - \frac{q}{L_q^{q+1}} + 1 > 0.$$

Поэтому предположение было неверным и выполняется неравенство 2.3, т. е. неравенство $B_q < 1 + A_q$.

Доказательство закончено.

Лемма 2.2 *Пусть* $z_{q,1}, z_{q,2}$ *— корни уравнения* $z^2 = A_q \cdot z + B_q$, *возможно, комплексные. Тогда выполнено неравенство* $\min(|z_{q,1}|, |z_{q,2}|) > 1$.

Доказательство. Уравнение $z^2 - A_q \cdot z - B_q = 0$ имеет коэффициенты $A_q < 0$ и $B_q < -1$, согласно предыдущей лемме. Дискриминант D_q этого уравнения равен $A_q^2 + 4 \cdot B_q$. Если $D_q \geq 0$, то $A_q^2 \geq -4 \cdot B_q > 4$, т. е. $A_q < -2$. Тогда

$$z_{q,1} = \frac{A_q - \sqrt{D_q}}{2}, z_{q,2} = \frac{A_q + \sqrt{D_q}}{2}, z_{q,1} \leq z_{q,2}.$$

Поскольку $B_q < A_q + 1$, согласно предыдущей лемме, то выполнено неравенство $z_{q,2} < -1$. Если $D_q < 0$, то справедливы равенства:

$$|D_q| = -A_q^2 - 4 \cdot B_q, z_{q,1} = \frac{A_q - \sqrt{|D_q|} \cdot \mathrm{i}}{2}, z_{q,2} = \frac{A_q + \sqrt{|D_q|} \cdot \mathrm{i}}{2}.$$

Тогда $|z_{q,1}| = |z_{q,2}| = -B_q > 1$.
Доказательство закончено.

Теорема 2.1 *Для любого $q \geq 3$ последовательность $\{a(q,n)\}$ не имеет предела.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\epsilon_q(n) \triangleq a(q,n) - L_q$. Тогда $\epsilon_q(n) \longrightarrow 0$, когда $n \longrightarrow \infty$, причем последовательность $\{\epsilon_q(n)\}$ не содержит двух подряд идущих нулей. Из формулы Тейлора следует, что

$$\epsilon_q(n) = A_q \cdot \epsilon_q(n-1) + B_q \cdot \epsilon_q(n-2) + O(\epsilon_q^2(n-1) + \epsilon_q^2(n-2)).$$

Уравнение $b_q(n) = A_q \cdot b_q(n-1) + B_q \cdot b_q(n-2)$ с нетривиальными начальными условиями $(b_q(1), b_q(2)) \neq (0,0)$ имеет характеристическое уравнение $z^2 = A_q \cdot z + B_q$. Значит, для некоторых констант $C_{q,1}, C_{q,2}$ справедливо равенство $b_q(n) = C_{q,1} \cdot (z_{q,1})^n + C_{q,2} \cdot (z_{q,2})^n$. Поскольку $(b_q(1), b_q(2)) \neq (0,0)$, то $C_{q,1}^2 + C_{q,2}^2 \neq 0$. Поэтому $b_q(n) \nrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. При больших n значение $b_q(n)$ будет близко к $\epsilon_q(n)$. Значит, $\epsilon_q(n) \nrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Получаем противоречие с предположением.
Доказательство закончено.

3. Численно-аналитическое обоснование отсутствия при малых q периодических точек периода 3

В данном разделе мы рассматриваем значения $q \in \overline{3,10}$ и численно-аналитически показываем, что подпоследовательности $\{a(q,3k)\}, \{a(q,3k+1)\}, \{a(q,3k+2)\}$ не могут быть одновременно сходящимися. Предположим противное, т. е. что одновременно выполнены предельные переходы:

$$a(q,3k+1) \longrightarrow z_q^*, a(q,3k+2) \longrightarrow x_q^*, a(q,3k+3) \longrightarrow y_q^*.$$

Очевидно, что $(x_q^*, y_q^*, z_q^*) \neq [1,2]^3 \setminus \{(L_q, L_q, L_q)\}$ — решение следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x = f(z,y), \\ y = f(x,z), \\ z = f(y,x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Мы будем работать со следующей системой уравнений, которая является следствием системы (3.4), и численно искать все ее решения на множестве $[0,2]^2$:

$$\begin{cases} x = f(f(y,x),y), \\ y = f(x,f(y,x)). \end{cases} \tag{3.5}$$

Систему (3.5) будем численно решать следующим образом. На квадрате $[0,2]^2$ введем сетку 1000×1000 и будем искать точки данной сетки, принадлежащие множеству $[0,2]^2 \setminus [L_q-\frac{1}{10}, L_q+\frac{1}{10}]^2$, в которых невязка системы 3.5 близка к минимальной. На квадрате $[L_q-\frac{1}{10}, L_q+\frac{1}{10}]^2$ опять наложим сетку 1000×1000 и будем искать точки данной сетки, в которых невязка системы (3.5) близка к минимальной. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что решения системы 3.4 имеют следующий вид:

Таблица 1: Решения системы 3.4.

q	Решения системы 3.4
3	$(1.265..., 1.265..., 1.265...) = (L_3, L_3, L_3)$
4	$(1.238..., 1.238..., 1.238...) = (L_4, L_4, L_4)$
5	$(1.216..., 1.216..., 1.216...) = (L_5, L_5, L_5)$
6	$(1.198..., 1.198..., 1.198...) = (L_6, L_6, L_6)$
7	$(1.183..., 1.183..., 1.183...) = (L_7, L_7, L_7)$
8	$(1.171..., 1.171..., 1.171...) = (L_8, L_8, L_8)$
9	$(1.160..., 1.160..., 1.160...) = (L_9, L_9, L_9)$
10	$(1.151..., 1.151..., 1.151...) = (L_{10}, L_{10}, L_{10})$ $(1.001..., 1.034..., 1.715...), (1.715..., 1.001..., 1.034...), (1.034..., 1.715..., 1.001...)$

Из проведенного эксперимента видно, что при любом $q \in \overline{3,9}$ точки (x_q^*, y_q^*, z_q^*) не существует. Значит, при всех таких q подпоследовательности $\{a(q,3k)\}$, $\{a(q,3k+1)\}$, $\{a(q,3k+2)\}$ не могут быть одновременно сходящимися.

Определим параметры:

$$\zeta_{q,k} \triangleq a(q,3k+1) - z_q^*, \theta_{q,k} \triangleq a(q,3k+3) - y_q^*.$$

В работе [4] была показана справедливость следующего равенства:

$$\begin{pmatrix}\zeta_{q,k+1}\\ \theta_{q,k}\end{pmatrix} = \mathbf{M}_q \cdot \begin{pmatrix}\zeta_{q,k}\\ \theta_{q,k-1}\end{pmatrix} + O(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2),$$

где $\mathbf{M}_q \triangleq \begin{pmatrix} M_q^{(1,1)} & M_q^{(1,2)} \\ M_q^{(2,1)} & M_q^{(2,2)} \end{pmatrix}$ и коэффициенты $M_q^{(1,1)}, M_q^{(1,2)}, M_q^{(2,1)}, M_q^{(2,2)}$ определяются следующим образом:

$$M_q^{(1,1)} \triangleq f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)\cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)\cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)\cdot f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) + f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*)\cdot f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)$$
$$M_q^{(1,2)} \triangleq f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)\cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)\cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)\cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)$$
$$M_q^{(2,1)} \triangleq f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)\cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*)$$
$$M_q^{(2,2)} \triangleq f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)\cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)$$

Далее примем $q = 10$ и вычислим обе частные производные функции $f(t_1, t_2)$ в трех точках. В точке $(x_{10}^*, y_{10}^*, z_{10}^*) = (1.001..., 1.034..., 1.715...)$ они равны:

$$f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) = -9.934..., f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) = -0.045..., f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) = -6.922...,$$
$$f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) = -0.254..., f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) = -0.312..., f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) = 0.000...;$$

в точке $(x_{10}^*, y_{10}^*, z_{10}^*) = (1.715..., 1.001..., 1.034...)$ они равны:

$$f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) = -6.922..., f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) = -9.934..., f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) = -0.045...,$$
$$f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) = 0.000..., f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) = -0.254..., f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) = -0.312...;$$

в точке $(x^*_{10}, y^*_{10}, z^*_{10}) = (1.034..., 1.715..., 1.001...)$ они равны:

$$f'_{t_1}(x^*_q, z^*_q) = -0.045..., f'_{t_1}(z^*_q, y^*_q) = -6.922..., f'_{t_1}(y^*_q, x^*_q) = -9.934...,$$
$$f'_{t_2}(x^*_q, z^*_q) = -0.312..., f'_{t_2}(z^*_q, y^*_q) = 0.000..., f'_{t_2}(y^*_q, x^*_q) = -0.254...;$$

В первом случае $\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} -1.336... & -21.454 \\ 0.193... & 3.099... \end{pmatrix}$, во втором $\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} -0.005... & 0.0001... \\ 68.763... & 1.758... \end{pmatrix}$, а в третьем $\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} 1.763... & 0.000... \\ -0.312... & 0.000... \end{pmatrix}$. В первом случае собственные значения матрицы $\mathbf{M}_{10}$ равны 1.762... и 0.0002..., во втором — 1.761... и -0.008..., а в третьем — 1.763... и 0.000...

При больших значениях k пара $(\zeta_{10,k+1}, \theta_{10,k})$ будет близка к паре (x_{k+1}, y_k) — решению системы $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{10} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$ с некоторыми начальными условиями. Общим решением данной системы будет $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = C_1 \cdot \lambda_1^k \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \lambda_2^k \cdot \mathbf{v}_2$, где $\lambda_1 > 1, \lambda_2$ — собственные числа матрицы $\mathbf{M}_{10}$, а $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — ее собственные векторы. Если для некоторых начальных условий $C_1 = 0$, то норма вектора $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$ будет экспоненциально быстро сходиться к нулю, а следовательно норма вектора $\begin{pmatrix} \zeta_{10,k+1} \\ \theta_{10,k} \end{pmatrix}$ также должна экспоненциально быстро сходиться к нулю. Проведенный в работе [4] вычислительный эксперимент показал, что это не так. Поэтому $C_1 \neq 0$. Значит, норма вектора $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$ не будет стремиться к нулю, и поэтому либо $a(10, 3k+1) \nrightarrow z^*_{10}$, либо $a(10, 3k+2) \nrightarrow x^*_{10}$, либо $a(10, 3k+3) \nrightarrow y^*_{10}$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда в рамках научного проекта № 17-11-01336.

Список литературы

1. А. Д. Коршунов, А. А. Сапоженко, "О числе двоичных кодов с расстоянием 2", *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 111–130.

2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, "Fibonacci numbers of graphs: II", *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.

3. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, "Fibonacci numbers of graphs: III", *Proceedings of the First International Conference on Fibonacci Numbers and Applications*, 1986, 105–120.

4. Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, "О количестве максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях", *Дискретная математика*, **28**:4 (2016), 139–149.

5. N. J. Calkin, H. S. Wilf, "The number of independent sets in a grid graph", *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.

6. S. Oh, S. Lee, "Enumerating independent vertex sets in grid graphs", *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.

7. R. Euler, “The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences”, *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.

8. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, “Counting maximal distance-independent sets in grid graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Поступила 4.12.2017

MSC2010 05C30

On properties of solution of a reccurent equation appearing in enumeration of maximal independent sets in complete trees

© **D. S. Taletskii**[2]

Abstract. The article considers a second-order nonlinear recurrent equation arising in analysis of the independent sets' quantity in complete q-ary trees. We proved earlier that for $q = 2$ its solution has a limit and for any sufficiently large q the solution splits into three converging subsequences with indices corresponding to the residue classes modulo 3. Computational experiment allowed to assume that this effect holds for any $q \geq 11$. The present paper proves divergence of the solution for any $q \geq 3$. The necessary condition for simultaneous convergence of all subsequences of the solution, with indices corresponding to the residue classes modulo 3, is the existence of a special solution of some nonlinear equations' system. Numerical search for solutions of the system, conducted in the present paper, showed that there is no corresponding solution of the system for any $3 \leq q \leq 9$. We numerically and analytically show that the non-disintegrability into three subsequences takes place also for $q = 10$.

Key Words: recurrent equation, divergence theorem, computational experiment.

References

1. A. D. Korshunov, A. A. Sapozhenko, "[On the number of binary codes with distance two]", *Problemy kibernetiki*, **40** (1983), 111–130 (In Russ.).

2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, "Fibonacci numbers of graphs: II", *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.

3. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, "Fibonacci numbers of graphs: III", *Proceedings of the First International Conference on Fibonacci Numbers and Applications*, 1986, 105–120.

4. D. S. Taletskii, D. S. Malyshev, "[On the number of maximal independent sets in complete q-ary trees]", *Diskretnya Matematika*, **28**:4 (2016), 139–149 (In Russ.).

5. N. J. Calkin, H. S. Wilf, "The number of independent sets in a grid graph", *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.

6. S. Oh, S. Lee, "Enumerating independent vertex sets in grid graphs", *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.

7. R. Euler, "The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences", *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.

8. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, "Counting maximal distance-independent sets in grid graphs", *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Submitted 4.12.2017

[2] **Dmitry S. Taletskii**, Laboratory Assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0966-3903, dmitalmail@gmail.com