DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.39-45

УДК 519.624

Непрерывный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для уравнений монотонного типа

© **И. П. Рязанцева** [1], **О. Ю. Бубнова** [2]

Аннотация. Исследована сходимость непрерывного метода второго порядка с постоянными коэффициентами для нелинейных уравнений. Отдельно рассмотрены случаи монотонного операторного уравнения в гильбертовом пространстве и аккретивного операторного уравнения в рефлексивном банаховом пространстве, строго выпуклом вместе со своим сопряженным. В каждом случае получены достаточные условия сходимости по норме пространства указанного метода. В аккретивном случае достаточные условия сходимости непрерывного метода включают не только требования на оператор уравнения и коэффициенты дифференциального уравнения, определяющего метод, но и на геометрию пространства, в котором решается уравнение. Приведены примеры банаховых пространств с требуемыми свойствами геометрий.

Ключевые слова: гильбертово пространство, банахово пространство, сильно монотонный оператор, условие Липшица, сильно аккретивный оператор, дуальное отображение, непрерывный метод, сходимость.

1. Уравнение с монотонным оператором в гильбертовом пространстве

Пусть H – вещественное гильбертово пространство; (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H; $A : H \to H$ – нелинейный оператор, обладающий свойствами:
а) A – сильно монотонный оператор, т. е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \ \ M > 0; \tag{1.1}$$

б) A удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \ \ L > 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим в H уравнение

$$Ax = f, \quad f \in H. \tag{1.3}$$

В наших предположениях оно имеет единственное решение x в H (см., например, [1]–[2]).

Построим задачу Коши следующего вида:

$$y''(t) + \lambda y'(t) + \mu[Ay(t) - f] = 0, \tag{1.4}$$

[1] **Рязанцева Ирина Прокофьевна**, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru

[2] **Бубнова Оксана Юрьевна**, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, ФГКОУ ВО «Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское шоссе, д. 3, бокс 268), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-4652, bubnovaoyu@mail.ru

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \tag{1.5}$$

где $t \geq t_0 \geq 0$; y_0 и y_0' – элементы из H; λ и μ – некоторые положительные постоянные. В заданных условиях задача (1.4)–(1.5) однозначно разрешима в классе функций $C^2[t_0, +\infty)$ (см. [3]).

Исследуем поведение $y(t)$ при $t \to +\infty$. Прежде всего с учетом (1.3) перепишем (1.4) в следующем виде:

$$y''(t) + \lambda y'(t) + \mu[Ay(t) - Ax] = 0. \tag{1.6}$$

Умножив (1.6) скалярно на $y(t) - x$, получим:

$$(y''(t), y(t) - x) + \lambda(y'(t), y(t) - x) + \mu(Ay(t) - Ax, y(t) - x) = 0. \tag{1.7}$$

Определим функцию $r(t) = \|y(t) - x\|^2/2$, тогда

$$r'(t) = (y'(t), y(t) - x), \quad r''(t) = (y''(t), y(t) - x) + \|y'(t)\|^2.$$

После этого приняв во внимание свойство (1.1) оператора A, из (7) выведем неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2M\mu r(t) \leq \|y'(t)\|^2. \tag{1.8}$$

Умножив (1.6) скалярно на $y'(t)$, получим:

$$(y''(t), y'(t)) + \lambda\|y'(t)\|^2 + \mu(Ay(t) - Ax, y'(t)) = 0. \tag{1.9}$$

Пусть $\rho(t) = \|y'(t)\|^2/2$, тогда $\rho'(t) = (y''(t), y'(t))$. Приняв во внимание свойство (1.2) оператора A, из (1.9) запишем:

$$\rho'(t) + 2\lambda\rho(t) \leq \mu L\|y(t) - x\|\|y'(t)\|. \tag{1.10}$$

Применив в правой части (1.10) числовое неравенство $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, из (1.10) получим неравенство:

$$\rho'(t) + 2\lambda\rho(t) \leq \mu L[r(t) + \rho(t)],$$

или

$$\rho'(t) + (2\lambda - \mu L)\rho(t) \leq \mu L r(t). \tag{1.11}$$

Пусть

$$2\lambda - \mu L = \gamma > 0. \tag{1.12}$$

Используя лемму 1 [4], из (1.11) выведем неравенство:

$$\rho(t) \leq \rho(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} + \mu L\int_{t_0}^{t} r(s)e^{-\gamma(t-s)}ds.$$

Применив к интегралу в последнем неравенстве правило Лопиталя при $t \to \infty$, получим следующую оценку:

$$\rho(t) \leq a_0 e^{-\gamma t} + \frac{\mu L\alpha_1}{\gamma} r(t), \tag{1.13}$$

где $a_0 = \rho(t_0)e^{\gamma t_0}$, $\alpha_1 > 1$.

Учитывая определение функции $\rho(t)$ и оценку (1.13), их (1.8) получим неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2\mu\left(M - \frac{L\alpha_1}{\gamma}\right)r(t) \leq 2a_0 e^{-\gamma t}. \tag{1.14}$$

Характеристическое уравнение для однородного линейного дифференциального уравнения с левой частью, равной левой части (1.14), имеет вид

$$k^2 + \lambda k + 2\mu\left(M - \frac{L\alpha_1}{\gamma}\right) = 0.$$

Корни этого уравнения будут различными и отрицательными, если

$$0 < M - \frac{L\alpha_1}{\gamma} < \frac{\lambda^2}{8\mu}. \quad \alpha_1 > 1. \tag{1.15}$$

Пусть данные корни есть числа $k_1 = -\gamma_1$, $k_2 = -\gamma_2$, $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда согласно лемме 2 из работы [5], из (1.14) вытекает оценка:

$$r(t) \le a_1 e^{-\beta t}, \quad a_1 > 0, \tag{1.16}$$

где $\beta = \min\{\gamma, \gamma_1\}$ при $\gamma \ne \gamma_1$ и $\beta < \gamma$ при $\gamma = \gamma_1$.

Отсюда заключим, что в наших предположениях $r(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.
Сформулируем полученный результат.

Теорема 1.1 *Пусть H – вещественное гильбертово пространство; оператор $A : H \to H$ обладает свойствами (1.1)–(1.2). Тогда задача Коши (1.4)–(1.5) имеет единственное решение класса $C^2[t_0, +\infty)$ при любых постоянных λ и μ и любых элементах y_0, y_0' из H. Пусть коэффициенты уравнения (1.4) положительны и удовлетворяют условиям (1.12), (1.15), тогда $\|y(t) - x\| \to 0$ при $t \to +\infty$, где x – решение уравнения (1.3); $y(t)$ – решение задачи Коши (1.4)–(1.5).*

Замечание 1.1 *Ранее (см., например, [6]) метод второго порядка рассматривался при условии, что $\mu = \mu(t)$ есть бесконечно малая функция при $t \to +\infty$, и в доказательстве сходимости метода для оценки слагаемого $\mu(t)(Ay(t) - Ax, y'(t))$ использовались предполагаемая ограниченность $y(t)$ на $[t_0, +\infty)$ и вытекающая из (1.2) ограниченность оператора A. При этом оценка сверху для $r(t)$ ухудшалась по сравнению с (1.16).*

2. Уравнение с аккретивным оператором в банаховом пространстве

Пусть X – вещественное рефлексивное банахово пространство; X^* – его сопряженное. Не теряя общности, считаем, что X и X^* строго выпуклы. Пусть $J : X \to X^*$ – дуальное отображение (см. [1]–[2]), т. е.

$$\|Jx\| = \|x\|, \quad \langle Jx, x\rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in X,$$

где $\langle u, v\rangle$ при $u \in X^*$; $v \in X$ есть отношение двойственности между пространствами X и X^*.

Пусть оператор $A : X \to X$ обладает следующими свойствами:
a) A является сильно аккретивным, т. е.

$$\langle J(u - v), Au - Av\rangle \ge m\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X, \ \ m > 0; \tag{2.1}$$

б) A удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq l\|u - v\| \quad \forall u, v \in X, \;\; l > 0. \tag{2.2}$$

Предположим, что уравнение (1.3) разрешимо. В силу свойства (2.1) оператора A решение (1.3) является единственным (см., например, [1]–[2]). Непрерывный метод второго порядка для уравнения (1.3) в условиях данного пункта определим также равенствами (1.4)–(1.5). Вместо (1.7) запишем уравнение:

$$\langle J(y(t) - x), y''(t)\rangle + \lambda\langle J(y(t) - x), y'(t)\rangle + \mu\langle J(y(t) - x), Ay(t) - Ax\rangle = 0, \tag{2.3}$$

и для функции $r(t) = \|y(t) - x\|^2/2$ в банаховом пространстве X найдем

$$r'(t) = \langle J(y(t) - x), y'(t)\rangle, \quad r''(t) = \langle J(y(t) - x), y''(t)\rangle + \left\langle \frac{dJ(y(t) - x)}{dt}, y'(t)\right\rangle.$$

С учетом свойства а) оператора A из (2.3) получим неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2m\mu r(t) \leq \left\langle \frac{dJ(y(t) - x)}{dt}, y'(t)\right\rangle = \beta(t). \tag{2.4}$$

Далее вычислим значение линейного функционала $Jy'(t) \in X^*$ на элементах правой и левой частей уравнения (1.4) и придем к равенству:

$$\langle Jy'(t), y''(t)\rangle + \lambda\|y'(t)\|^2 + \mu\langle Jy'(t), Ay(t) - Ax\rangle = 0. \tag{2.5}$$

Пусть $\rho(t) = \|y'(t)\|^2/2$, тогда $\rho'(t) = \langle Jy'(t), y''(t)\rangle$. Используя (2.2), из (2.5) получим следующее неравенство (см. вывод (1.11)):

$$\rho'(t) + (2\lambda - \mu l)\rho(t) \leq \mu l r(t).$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$2\lambda - \mu l = \bar{\gamma} > 0. \tag{2.6}$$

Подобно (1.13) установим оценку

$$\rho(t) \leq b_0 e^{-\bar{\gamma}t} + \frac{\mu l \alpha_2}{\bar{\gamma}} r(t), \quad b_0 = \rho(t_0)e^{\bar{\gamma}t_0}, \;\; \alpha_2 > 1. \tag{2.7}$$

Найдем оценку сверху для $|\beta(t)|$ на $[t_0, +\infty)$. Для этого сделаем дополнительное предположение относительно геометрии банахова пространства X.

Пусть дуальное отображение в X дифференцируемо и обладает свойством

$$\left\|\frac{dJu(t)}{dt}\right\| \leq \sigma \left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|, \quad \sigma > 0 \tag{2.8}$$

для любой дифференцируемой на $[t_0, +\infty)$ функции $u(t)$, значения которой принадлежат X.

Тогда справедливо неравенство:

$$\left\|\frac{dJ(y(t) - x)}{dt}\right\| \leq \sigma \left\|y'(t)\right\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Следовательно,
$$|\beta(t)| \le \sigma\|y'(t)\|^2 = 2\sigma\rho(t).$$

Теперь с помощью оценки (2.7) из (2.4) получим неравенство:
$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2\mu m r(t) \le 2\sigma\left[b_0 e^{-\bar{\gamma}t} + \frac{\mu l \alpha_2}{\bar{\gamma}} r(t)\right],$$
или
$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2\mu\left(m - \frac{\sigma l \alpha_2}{\bar{\gamma}}\right) r(t) \le b_1 e^{-\bar{\gamma}t}, \quad b_1 > 0.$$

Корни характеристического уравнения
$$k^2 + \lambda k + 2\mu\left(m - \frac{\sigma l \alpha_2}{\bar{\gamma}}\right) = 0$$
будут различными и отрицательными, если
$$0 < m - \frac{\sigma l \alpha_2}{\bar{\gamma}} < \frac{\lambda^2}{8\mu}, \quad \alpha_2 > 1. \tag{2.9}$$

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.1, придем к утверждению.

Теорема 2.1 *Пусть X – вещественное рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным; оператор $A : X \to X$ обладает свойствами (2.1)–(2.2); дуальное отображение в X дифференцируемо; уравнение (1.3) разрешимо; неравенство (2.8) справедливо. Предположим, что параметры λ и μ уравнения (1.4) положительны и удовлетворяют неравенствам (2.6), (2.9). Тогда $\|y(t) - x\| \to 0$ при $t \to +\infty$, где $y(t)$ и x – единственные решения задачи Коши (1.4)–(1.5) и уравнения (1.3) соотвественно.*

Отметим, что в [7]–[8] установлена дифференцируемость дуальных отображений и справедливость неравенства (2.8) в пространствах Лебега $L^p[a, b]$ и l^p при $p > 2$, причем $\sigma = 2p - 3$. Укажем, что достаточные условия разрешимости уравнения (1.3) с аккретивным оператором A содержат требования на свойства оператора дуального отображения, которые также представляют собой некоторые условия на геометрию пространств X и X^* (см., например, [1]–[2]).

Замечание 1.1 справедливо и в условиях данного раздела.

Список литературы

1. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972, 416 с.

2. Ya. Alber, Ya. Ryazantseva, *Nonlinear III-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006, 410 p.

3. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 495 с.

4. Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1981, 410 с.

5. И. П. Рязанцева, “Непрерывный метод решения задач условной минимизации”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **39**:5 (1999), 734–742.

6. И. П. Рязанцева, “Методы второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **50**:9 (2014), 1264–1275.

7. И. П. Рязанцева, О. Ю. Бубнова, “Непрерывный метод второго порядка для нелинейных аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Труды Средневолжского математического общества*, **3–4**:1 (2002), 327–334.

8. О. Ю. Бубнова, *Непрерывные и итеративные методы решения нелинейных некорректных задач монотонного типа*, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Нижний Новгород, 2005, 111 с.

Поступила 30.11.2017

MSC2010 65J15

Continuous method of second order with constant coefficients for equations of monotone type

© **I. P. Ryazantseva** [3], **O. Yu. Bubnova**[4]

Abstract. Convergence of the second order continuous method with constant coefficients for nonlinear equations is investigated. The cases of a monotone operator equation in Hilbert space and of an accretive operator equation in reflexive Banach space which is strictly convex together with its conjugate, are considered separately. In each case, sufficient conditions for the convergence with respect to the norm of the space specified by the method are obtained. In the accretive case, sufficient conditions for the continuous method convergence include not only the requirements on the operator equation and on the coefficients of the differential equation defining the method, but also on the geometry of space where the equation is solved. Examples of Banach spaces with the desired geometric properties are shown.

Key Words: Hilbert space, Banach space, strongly monotone operator, Lipschitz condition, strongly accretive operator, duality mapping, continuous method, convergence.

References

1. M. M. Vainberg, *Variacionnyj metod i metod monotonnyh operatorov v teorii nelinejnyh uravnenij [Variational method and the monotone operator method in the theory of nonlinear equations]*, Nauka, Publ., M., 1972 (In Russ.), 416 p.

2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear III-posed problems of monotone type*, Springer Publ., Dordrecht, 2006, 410 p.

[3] Irina P. Ryazantseva, Professor, Department of Mathematics, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev (24 Minin St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru

[4] Oksana Yu. Bubnova, Associate Professor, Department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhny Novgorod Academy of the Ministry of Interior of the Russian Federation (3 Ankudinovskoe shosse, boks 268, Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-4652, bubnovaoyu@mail.ru

3. V. A. Trenogin, *Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 495 p.

4. F. P. Vasilev, *Metody reshenija ekstremal'nyh zadach [Methods for solving of extremal problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russ.), 410 p.

5. I. P. Ryazantseva, "[Continuous methods for constrained minimization problems]", *Comp. Math. and Math. Phys.*, **39**:5 (1999), 702–710.

6. I. P. Ryazantseva, "[Second order methods for accretive inclusiions in a Banach space]", *Differenc. uravneniya*, **50**:9 (2014), 1264-1275 (In Russ.).

7. I. P. Ryazantseva, O. Yu. Bubnova, "[Continuous second order methods for nonlinear accretive inclusiions in a Banach space]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **3–4**:1 (2002), 327–334 (In Russ.).

8. O. Yu. Bubnova, *Nepreryvnye i iterativnye metody reshenija nelinejnyh nekorrektnyh zadach monotonnogo tipa [Continuous and iterative methods for solving nonlinear ill-posed problems of monotone type]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [Ph.D. phys. and math. sci. diss.], Nizhny Novgorod, 2005, 111 p.

Submitted 30.11.2017