DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.23-29

УДК 517.938

Многомерные соленоидальные инвариантные множества седлового типа

© Е. В. Жужома [1], Н. В. Исаенкова [2], В. С. Медведев [3]

Аннотация. В статье мы строим пример гладкого диффеоморфизма замкнутого многообразия, который имеет одномерное (в топологическом смысле) соленоидальное базисное множество с устойчивым инвариантным многообразием произвольной ненулевой (наперед заданной) размерности и устойчивым инвариантным многообразием произвольной размерности, большей или равной двум. Базисное множество имеет седловой тип (не является ни аттрактором, ни репеллером). Кроме этого, построенный диффеоморфизм имеет положительную топологическую энтропию и в некоторой окрестности одномерного соленоидального базисного множества является консервативным (другими словами, якобиан диффеоморфизма в этой окрестности равен единице). Конструкция, представленная в данной статье, позволяет построить диффеоморфизм с указанными свойствами на многообразии, диффеоморфном прямому произведению окружности на сферу коразмерности один.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, базисное множество, соленоид, сепаратор, топологическая энтропия.

1. Введение

Соленоиды изучаются в различных разделах математики, например, в топологии, теории групп, теории динамических систем и многих других. Соленоид как инвариантное множество некоторой динамической системы впервые был упомянут в книге [1], где использовался для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящего из почти периодических траекторий.

Соленоид в топологию был введен в [2], где рассматривался как пример однородного множества (локальная структура одинакова во всех точках), для которого не была применима стандартная теория гомологий и когомологий. Независимо было введено понятие соленоида как компактной абелевой топологической группы [3]. Приведем наиболее распространненое определение соленоида: пересечение последовательности вложенных друг в друга полноториев, таких, что для оси любого предыдущего полнотория ось последующего монотонно прокручивается вокруг нее несколько раз, не образуя крюков [4]. С топологической точки зрения соленоид является неразложимым континуумом, который нельзя вложить в поверхность [5]–[6].

[1] **Жужома Евгений Викторович**, профессор кафедры фундаментальной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8682-7591, zhuzhoma@mail.ru

[2] **Исаенкова Наталья Викторовна**, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, ФГКОУ ВО «Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское ш., д. 3, бокс 268), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4880-3526, nisaenkova@mail.ru

[3] **Медведев Вячеслав Сергеевич**, научный сотрудник лаборатории ТАПРАДЕСС, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6369-0000, vmedvedev@hse.ru

С. Смейл ввел соленоиды в гиперболическую теорию динамических систем. Им были построены примеры структурно устойчивых и Ω-устойчивых диффеоморфизмов с притягивающими инвариантными множествами (растягивающимися аттракторами); основные факты, определения теории динамических систем см. в [7]–[11]. Схематично пример Смейла [12] можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, а затем сжатие в направлении, перпендикулярном оси. После этого полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория с сохранением дисковой структуры. Такие отображения часто встречаются при изучении бифуркаций седло-узловых циклов [10], [13]. Из работы [14], а также [15]–[16] следует, что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до некоторого диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме Смейла, замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами (одно – аттрактор, а второе – репеллер).

В статье мы строим пример диффеоморфизма, который имеет одномерное соленоидальное базисное множество с неустойчивым и устойчивым инвариантными многообразиями произвольной ненулевой (наперед заданной) размерности. Базисное множество имеет седловой тип, т. е. не является ни аттрактором, ни репеллером. Кроме этого построенный диффеоморфизм имеет положительную топологическую энтропию и в некоторой окрестности базисного множества является консервативным. Основная теорема представляет собой обобщением основных результатов работ [17]–[18].

Теорема 1.1 *Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-1$ существует A-диффеоморфизм $F : M^n \to M^n$ некоторого замкнутого многообразия M^n такого, что неблуждающее множество $NW(F)$ диффеоморфизма F содержит одномерное базисное множество Λ, являющееся топологическим соленоидом, с размерностями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий $\dim W^s(x) = k$, $\dim W^u(x) = n-k+1$ соответственно для всех точек $x \in \Lambda$. Более того, F имеет положительную топологическую энтропию, и в некоторой окрестности множества Λ якобиан диффеоморфизма F равен единице.*

2. Основная конструкция

В этом параграфе мы приводим построение диффеоморфизма F и показываем, что он обладает требуемыми свойствами. Для общности, в построении присутствует параметр λ. Поэтому ниже F будет обозначаться через F_λ.

Для числа $a > 0$ будем обозначать через

$$I_a^m = [-a;a]^m = \underbrace{[-a;a] \times \cdots \times [-a;a]}_{m \text{ множителей}}$$

m-мерный куб евклидового пространства $\mathbb{R}^m$, наделенного координатами $(x_1, \ldots, x_m)$. Зафиксируем натуральные числа $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 3$, и действительное число $\lambda > 1$. Рассмотрим диффеоморфизм

$$\psi_\lambda : I_1^n = I_1^k \times I_1^{n-k} \to \mathbb{R}^n \quad \text{вида} \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}} x_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}} x_k, \sqrt[n-k]{\lambda} \cdot x_{k+1}, \sqrt[n-k]{\lambda} \cdot x_n \right).$$

Ясно, что $\psi_\lambda(I_1^n) = I^k_{\frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}}} \times I^{n-k}_{\sqrt[n-k]{\lambda}}$, и якобиан отображения ψ_λ равен $J(\psi_\lambda) = \frac{1}{2}$.

Для определения диффеоморфизма F_λ нам понадобится модификация отображения, известного как подкова Смейла [12]. Напомним, что классическая подкова Смейла представляет собой диффеоморфизм некоторого достаточно большого круга плоскости $\mathbb{R}^2$ в себя, который содержит квадрат $K = D_0^2$. Диффеоморфизм $w : D_0^2 = D^2 \to \mathbb{R}^2$ квадрата есть композиция сжатия вдоль оси Ox, растяжения вдоль оси Oy, сгибания полученного прямоугольника и сдвига так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy. Иногда подкова определяется как диффеоморфизм квадрата, который затем продолжается на плоскость. Известно, что w можно продолжить до отображения всей плоскости $\mathbb{R}^2$ так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности D^2 [8].

Обозначим через $C : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ отображение, которое является центральной симметрией на множителе $\mathbb{R}^k$ и тождественным отображением на множителе $\mathbb{R}^{n-k}$. Следуя конструкции Смейла, обозначим через $w_\lambda : I_1^n \to \mathbb{R}^n$ композицию отображения ψ_λ, сгиба многомерного параллелепипеда $I^k_{\frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}}} \times I^{n-k}_{\sqrt[n-k]{\lambda}}$ и некоторого сдвига вида $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_k + \alpha_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ так, чтобы $w_\lambda(I_1^n)$ и $C \circ w_\lambda(I_1^n)$ образовали две непересекающиеся конфигурации: P и $C(P)$ – подковы Смейла соответственно. Чтобы выполнялось последнее условие, достаточно подобрать сдвиг $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_k + \alpha_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ так, чтобы $w_\lambda(I_1^n)$ и $C \circ w_\lambda(I_1^n)$ не пересекались (очевидно, это можно сделать). Аналогично двумерному случаю можно показать, что диффеоморфизм w_λ продолжается до некоторого диффеоморфизма (его также обозначим w_λ) n-мерного шара

$$D^n \supset \left(I_1^n \cup (I^k_{\frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}}} \times I^{n-k}_{\sqrt[n-k]{\lambda}}) \right) \bigcup w_\lambda(I_1^n) \bigcup (C \circ w_\lambda(I_1^n)) = D_0^n,$$

тождественного на границе ∂D^n шара D^n.

Обозначим через $I(\mathbb{R}^n)$ группу изотопных тождественному диффеоморфизмов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, которые консервативны на множестве D_0. В силу изотопности тождественному можно считать (использовав, если необходимо, больший шар D^n), что диффеоморфизмы группы $I(\mathbb{R}^n)$ равны тождественному отображению вне D^n. Возьмем в группе $I(\mathbb{R}^n)$ простой гладкий путь $S_t \in Iso(\mathbb{R}^n)$, $0 \le t \le 1$, такой, что $S_0 = id$ представляет собой тождественное отображение и $S_1 = C$. Другими словами, S_t является гладкой изотопией в группе $I(\mathbb{R}^n)$ от тождественного отображения к отображению $S_1 = C$. Поскольку $w_\lambda(I_1^n) \cap C \circ w_\lambda(I_1^n) = \emptyset$, то получаем равенство

$$w_\lambda(I_1^n) \cap S_1 \circ w_\lambda(I_1^n) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Фактор-пространство $[0;1]/(0 \sim 1) = S^1$ является окружностью, на которой фактор-отображение $[0;1] \to [0;1]/(0 \sim 1) = S^1$ индуцирует циклическую координату $t \mod 1$. Учитывая равенство $C(D^n) = D^n$, рассмотрим фактор-пространство

$$K = \bigcup_{0 \le t \le 1} (t; S_t(D^n)) \,/\, (S_0(D^n) = S_1(D^n)),$$

в котором $(0; S_0(D^n))$ отождествляется с $(1; S_1(D^n))$. Поскольку каждый диффеоморфизм S_t изотопен тождественному, K гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times D^n$. Более того, из равенства $S_t(D^n) = D^n$ следует включение $K \subset S^1 \times D^n$. В множестве K выделим подмножество

$$K_0 = \bigcup_{0 \le t \le 1} (t; S_t(I_1^n)) \,/\, (S_0(I_1^n) = S_1(I_1^n)) \subset K,$$

гомеоморфное $S^1 \times I_1^n$.

Для $t \in S^1$ положим $D_t^n = \{t\} \times S_t(D^n) \subset K \subset S^1 \times D^n$, $I_t^n = \{t\} \times S_t(I_1^n) \subset S^1 \times D^n$. Отображение $E_2 : S^1 \to S^1$ вида $t \to 2t\ mod, 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два. Определим отображение $F_\lambda : S^1 \times D^n \to S^1 \times D^n$. Для любых $t \in [0;1)$ и $z \in D_t^n = \{t\} \times S_t(D^n)$ положим

$$F_\lambda(t;z) = \left(E_2(t); S_{E_2(t)} \circ w_\lambda \circ S_t^{-1}(z)\right), \qquad t \in [0;1), \quad z \in D_t^n.$$

Заметим, что выполняется следующее включение: $F_\lambda(t, I_t^n) \subset D^n_{2t\, mod\, 1} = D^n_{E_2(t)}$. Ограничение отображения F_λ на $S^1 \times I_1^n \subset S^1 \times D^n$ будем обозначать также через F_λ.

Покажем, что отображение $F_\lambda : S^1 \times I_1^n \to F_\lambda(S^1 \times I_1^n) \subset S^1 \times D^n$ является диффеоморфизмом на свой образ. Предположим противное: $F_\lambda(t_1; z_1) = F_\lambda(t_2; z_2)$ для некоторых t_1, $t_2 \in S^1$, и $z_1 \in S_{t_1}(I_1^n)$, $z_2 \in S_{t_2}(I_1^n)$. Тогда $F_\lambda(t_1, S_{t_1}(I_1^n)) \cap F_\lambda(t_2, S_{t_2}(I_1^n)) \neq \emptyset$. Из определения F_λ вытекает равенство $E_2(t_2) = E_2(t_1)$, т. е., $2t_1\ mod\ 1 = 2t_2\ mod\ 1$. Поскольку отображение w_λ является диффеоморфизмом на свой образ, то можно считать $0 \le t_1 \neq t_2 \le 1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$, $0 \le t_1 \le \frac{1}{2}$. Далее для простоты записей будем считать $t_1 = t$. Тогда $F_\lambda(t, S_t(I_1^n)) = \left(E_2(t), S_{E_2(t)} \circ w_\lambda \circ S_t^{-1}(I_1^n)\right)$. Поэтому, в силу предположения,

$$S_{E_2(t)} \circ w_\lambda \circ S_t^{-1}(S_t(I_1^n)) \bigcap S_{E_2(t+\frac{1}{2})} \circ w_\lambda \circ S^{-1}_{t+\frac{1}{2}}(S_{t+\frac{1}{2}}(I_1^n)) \neq \emptyset$$

и $S_{E_2(t)} \circ w_\lambda(I_1^n) \bigcap S_{E_2(t+\frac{1}{2})} \circ w_\lambda(I_1^n) \neq \emptyset$, $S_{E_2(t+\frac{1}{2})} S_{E_2(t)} \circ S_1$, получаем $w_\lambda(I_1^n) \cap S_1 \circ w_\lambda(I_1^n) \neq \emptyset$, что противоречит (2.1). Это доказывает, что отображение $F_\lambda : S^1 \times I_1^n \to F_\lambda(S^1 \times I_1^n) \subset S^1 \times$ $\times D^n$ является диффеоморфизмом на свой образ.

В силу построения n-мерный диск $\{0\} \times D^n = D_0^n$ инвариантен относительно F_λ, и ограничение F_λ на $\{0\} \times I_1^n$ представляет собой модификацию классической подковы Смейла. Обозначим через Ω_0 нетривиальное (нигде не плотное) нульмерное базисное множество ограничения $F_\lambda|_{\{0\} \times I_1^n} : \{0\} \times I_1^n \to D_0^n$. Тогда F_λ имеет одномерное соленоидальное базисное множество Λ, гомеоморфное $S^1 \times \Omega_0$. Поскольку $E_2 : S^1 \to S^1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два, то якобиан отображения $F_\lambda|_{\{0\} \times I_1^n}$ равен $2 \cdot J(w_\lambda) = 1$. Следовательно, F_λ консервативен в некоторой окрестности множества Λ.

Очевидно, что $F_\lambda : S^1 \times D^n \to S^1 \times D^n$ аналогичен ограничению диффеоморфизма Смейла-Виеториса на базовое многообразие [19]. Поэтому если отождествить границы копий многообразия $S^1 \times D^n$ с помощью естественного диффеоморфизма $\partial(S^1 \times D^n) = S^1 \times S^{n-1} \to S^1 \times S^{n-1}$, то получится многообразие $M^{n+1} = S^1 \times S^n$, а F_λ будет продолжаться на M^{n+1} до некоторого А-диффеоморфизма (обозначим также через F_λ), который имеет одномерное соленоидальное базисное множество Λ. В силу конструкции $\dim W^s(x) = k$, $\dim W^u(x) = n - k + 1$ соответственно для всех точек $x \in \Lambda$.

Осталось показать, что F_λ имеет положительную топологическую энтропию. Действительно, хорошо известно, что отображение $F_\lambda|_{\{0\} \times I_1^n}$ с подковой Смейла имеет положительную топологическую энтропию [8]–[9], [12]. Отсюда и [20] вытекает требуемый результат. Это завершает доказательство теоремы.

Благодарности. Работа проведена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01041).

Список литературы

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.–Л., 1947, 448 с.

2. L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen”, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454–472.

3. F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology and Appl.*, **152** (2005), 219–225.

4. J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.

5. R. H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 209–230.

6. R.H. Bing, “Embedding circle-like continua in the plane”, *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.

7. Д. В. Аносов, “Исходные понятия”, *Динамические системы - 1*, **1** (1985), 156–178.

8. Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Гиперболические множества”, *Динамические системы - 9*, **1** (1991), 12–99.

9. C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Qaton, 1999, 506 c.

10. Ю. С. Ильяшенко, Ли Вейгу, *Нелокальные Бифуркации*, МЦНМО-ЧеРо, М., 1999, 415 с.

11. S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, “Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces”, *Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.*, **153** (1996), 344–367.

12. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

13. Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599.

14. H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

15. B. Jiang, Y. Ni, S. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.

16. J. Ma, Y. Bin, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154**:11 (2007), 3021–3031.

17. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, “О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо»)”, *Успехи физ. наук*, **106**:3 (1972), 431–457.

18. Е. В. Жужома, В. С. Медведев, А. Е. Шишенкова, “Об одной модели быстрого кинематического динамо”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 23–26.

19. Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47–68.

20. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 23–41.

Поступила 25.11.2017

MSC2010 37D20, 37G70

Many-dimensional solenoid invariant saddle-type sets

© E. V. Zhuzhoma [4], N. V. Isaenkova [5], V. S. Medvedev [6]

Abstract. In the paper we construct some example of smooth diffeomorphism of closed manifold. This diffeomorphism has one-dimensional (in topological sense) basic set with stable invariant manifold of arbitrary nonzero dimension and the unstable invariant manifold of arbitrary dimension not less than two. The basic set has a saddle type, i.e. is neither attractor nor repeller. In addition, it follows from the construction that the diffeomorphism has a positive entropy and is conservative (i.e. its jacobian equals one) in some neighborhood of the one-dimensional solenoidal basic set. The construction represented in this paper allows to construct a diffeomorphism with the properties stated above on the manifold that is diffeomorphic to the prime product of the circle and the sphere of codimension one.
Key Words: discrete dynamical system, basic set, solenoid, separator, topological entropy.

References

1. V. V. Nemytskiy, V. V. Stepanov, *Kachestvennaja teorija differencial’nyh uravnenij [Qualitative Theory Of Differential Equations]*, OGIZ, M.–L., 1947 (In Russ.), 448 p.

2. L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen”, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454–472.

3. F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology and Appl.*, **152** (2005), 219–225.

4. J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.

[4] **Evgeny V. Zhuzhoma**, Professor of Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher school of Economics» (25/12 B. Pecherskaya st., Nizhny Novgorod 603005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8682-7591, zhuzhoma@mail.ru

[5] **Nataliya V. Isaenkova**, Professor of Department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhny Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation (3 Ankudinovskoye Sh., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4880-3526, nisaenkova@mail.ru

[6] **Vyacheslav S. Medvedev**, Researcher TAPRADESS laboratory, National Research University «Higher school of Economics» (25/12 B. Pecherskaya, Nizhny Novgorod 603005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6369-0000, vmedvedev@hse.ru

5. R. H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 209–230.

6. R.H. Bing, “Embedding circle-like continua in the plane”, *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.

7. D. V. Anosov, “The original concepts”, *Dynamic systems–1*, **1** (1985), 156–178 (In Russ.).

8. D. V. Anosov, V. V. Solodov, “Hyperbolic sets”, *Dynamic systems–9*, **1** (1991), 12–99 (In Russ.).

9. C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Qaton, 1999, 506 c.

10. Yu. Ilyashenko, Li Veigu, *Nelokal’nye Bifurkacii [Nonlocal bifurcations]*, MTSNMO-CheRo Publ., Moscow, 1999 (In Russ.), 415 p.

11. S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, “Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces”, *Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.*, **153** (1996), 344–367.

12. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

13. D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, “About disasters a blue sky”, *Doklady RAN*, **342**:5 (1995), 596–599 (In Russ.).

14. H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

15. B. Jiang, Y. Ni, S. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.

16. J. Ma, Y. Bin, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154**:11 (2007), 3021–3031.

17. S. I. Weinstein, Ya. B. Zeldovich, “On the origin of magnetic fields in astrophysics (Dynamo Turbulent mechanisms”)”, *Phys. Usp.*, **106**:3 (1972), 431–457 (In Russ.).

18. E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, A. E. Shishenkova., “A model for fast cinematic Dynamo”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **15**:2 (2013), 23-26 (In Russ.).

19. E. V. Zhuzhoma, N. V. Isaenkova, “Zero-dimensional solenoidal base sets”, *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 351-–372 (In Russ.).

20. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 23–41.

Submitted 25.11.2017