

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.45-54

УДК 532.529:541.182

Модель динамики самодвижущейся цепочки частиц в вязкой жидкости© С. И. Мартынов¹, Л. Ю. Ткач²

Аннотация. Рассматривается модель цепочки, состоящей из сферических частиц, шарнирно соединенных между собой стержнями, перемещающейся в вязкой жидкости за счет формирования вокруг себя такого вихревого течения вязкой жидкости, которое создает гидродинамическую силу,двигающую цепочку в заданном направлении. Вихревое течение жидкости образуется вращением частиц цепочки в результате действия моментов внутренних сил, сумма которых равна нулю. Для расчета динамики цепочки совместно решается система уравнений течения вязкой жидкости в приближении малых чисел Рейнольдса с граничными условиями и динамики частиц. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц в цепочке. Считается, что стержни с жидкостью не взаимодействуют, а их роль сводится к удержанию соединенным стержнем частиц на одном и том же расстоянии. Проведено компьютерное моделирование динамики трех цепочек, которые отличаются размерами частиц. Рассчитаны усилия в стержнях и скорость перемещения для каждой модельной цепочки. Найдено, что одна из рассмотренных моделей перемещается быстрее. На основе предложенного подхода можно создавать модели самодвижущихся цепочек частиц разной длины.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, самодвижущиеся цепочки частиц, гидродинамическое взаимодействие, внутренние силы взаимодействия.

1. Введение

Моделирование динамики миниатюрных самодвижущихся устройств, основанное на применении в их работе принципов движения живых организмов в природе, активно развивается в последние годы. Это связано с конструированием новых типов гидродинамических движителей и гидродинамических насосов, микроаппаратов для обследования сосудов и органов человека и т.п., основанным на использовании природных аналогов. При этом и сама проблема моделирования динамики плавания различных живых организмов также является актуальной задачей как для применения в различных прикладных разработках, так и для создания новых теоретических моделей, позволяющих создавать различные миниатюрные устройства.

Имеющиеся обзоры по результатам моделирования плавания макро- и микроорганизмов [1]-[3] содержат, главным образом, модели движения тела на основе его деформаций,

¹ Мартынов Сергей Иванович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет" (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

² Ткач Леонилла Юрьевна, старший преподаватель кафедры строительных и транспортных комплексов, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет" (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, leonilla7777@mail.ru

имитирующих реальные движения природного организма, которые в результате дают перемещение тела в заданном направлении. Однако проблема такого моделирования заключается в различии свойств материалов модели и живых организмов. Это сводит задачу моделирования на основе аналоговых деформаций к трудноразрешимой проблеме. Авторами предложен подход, основанный на анализе течений в окружающей жидкости, которое создает плавающий организм, и моделировании подобного течения более простыми способами, чем деформации, имитирующие реальный плавающий организм. На основе этого подхода, авторами были предложены [4, 5] две модели самодвижущихся агрегатов частиц, в которых движение тела происходит за счет вращения частиц, создающих вихревое течение в окружающей жидкости, подобное тому, что у живых организмов (рис. 1) при их плавании. Такого рода вихревые течения формируются при плавании различных организмов в результате движения каких-либо их частей, что следует из анализа материалов, приведенных в работе [1, 6].

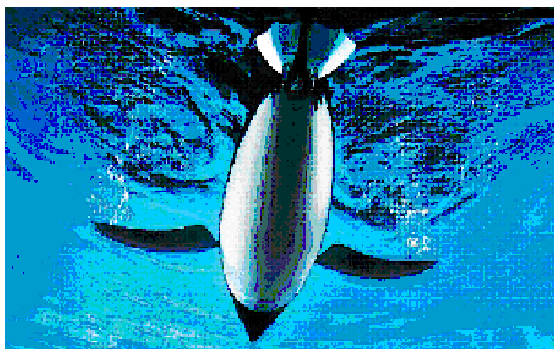


Рис. 1: Вихревые течения, возникающие вокруг плывущего в жидкости пингвина

Одна модель самодвижущегося агрегата с двумя и более вращающимися частицами и механизм их вращения внешним магнитным полем рассмотрена в [5]. Модель самодвижущейся цепочки частиц, как пример моделирования динамики взаимодействующих частиц предложенным методом, приведена в [4]. При этом вопрос оптимизации вращений частиц и их размеров, приводящих к более быстрому перемещению цепочки в заданном направлении, остался нерассмотренным.

В настоящей работе анализируются модели трех цепочек с различными размерами частиц с целью оптимизации их вращений для получения наибольшей скорости перемещения.

2. Постановка задачи

Рассматривается модель агрегата, состоящего из 3 твердых сферических частиц, помещенных в несжимаемую жидкость плотности ρ и вязкости η . Частицы могут быть разного радиуса, разной плотности, находиться вблизи или вдали от плоской стенки, вдоль которой может задаваться течение с заданным профилем скорости. Предполагается, что частицы связаны между собой тонкими нерастяжимыми стержнями, взаимодействием которых с жидкостью можно пренебречь, позволяющими частицам совершать поступательное и вращательное движение или движение без вращения. Фактически роль этих стержней сводится к сохранению неизменным расстояния между соединенных этим стержнем частицами. Приведенное число частиц является наименьшим, позволяющим рассматривать их как цепочку и моделировать ее динамику в результате вращений частиц за счет

внутренних моментов.

Считаем, что к частицам приложены моменты сил, сумма которых равна нулю, как и следует из общих свойств моментов внутренних сил системы. Под действием моментов внутренних сил частицы вращаются с угловыми скоростями, что создает вихревое течение в окружающей жидкости, заставляющее цепочку частиц изгибаться. Меняя направление приложенных моментов и их величину, можно изменять вихревое течение жидкости вокруг цепочки частиц и тем самым добиваться таких ее деформаций в виде изгибаний, что в итоге получаем перемещение всей цепочки в направлении первоначальной ее ориентации. Другими словами, полученные деформации цепочки должны быть похожими на те, что у змеи при ее движении в воде.

Для расчета течения жидкости вокруг рассматриваемой структуры записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции стержневых связей. Система уравнений для скорости \mathbf{u} и давления p в жидкости в случае малых чисел Рейнольдса имеет вид

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Условия для скорости на поверхности частицы с номером k :

$$u_i = V_i^k + \Gamma_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a. \quad (2.3)$$

Здесь V_i^k – компоненты абсолютной линейной скорости, Γ_{ij}^k – тензор угловой скорости, \mathbf{X}^k – радиус-вектор положения произвольной точки жидкости относительно центра частицы с номером k .

Условия затухания возмущений скорости и давления далеко от частиц:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

где p_0 – невозмущенное давление в жидкости.

Динамика цепочки моделируется как динамика системы частиц со связями. В безынерционном приближении записываются уравнения поступательного и вращательного движения каждой частицы с учетом действующих на нее сил реакции стержней, сил гидродинамического взаимодействия, а также их моментов:

$$\mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^h = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_k^i + \mathbf{T}_k^e + \mathbf{T}_k^h = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Здесь \mathbf{F}_k^h – силы, \mathbf{T}_k^h – моменты сил со стороны жидкости, \mathbf{F}_k^i , \mathbf{T}_k^i – внутренние, \mathbf{F}_k^e , \mathbf{T}_k^e – внешние силы и моменты сил, действующие на частицу с номером k .

Процедура решения задачи аналогична процедуре из работы [4]. Из решения системы уравнений динамики жидкости (2.1)-(2.4) находится распределение скорости и давления в жидкости вокруг цепочки, а затем силы \mathbf{F}_k^h и моменты сил \mathbf{T}_k^h , действующие со стороны жидкости на частицы в цепочке. Поступательная и угловая скорость частиц цепочки определяются из уравнений (2.5). В том числе, условие равенства нулю составляющей относительной скорости двух частиц вдоль соединяющего их стержня позволяет найти усилие в нем. Так как число частиц в цепочке, вообще говоря, может быть большим и выражения для сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости, имеют сложные выражения, то нахождение аналитического решения рассматриваемой системы уравнений представляет собой сложную задачу. Поэтому система уравнений решалась численно.

Для этого использовался специальный программный комплекс, разработанный для персонального компьютера, который в качестве исходных данных получает только желаемую точность вычислений, координаты и радиусы частиц, вязкость и скорость жидкости, а так же приложенные к частицам внешние силы и моменты. При этом применялся метод подобия, аналогичный работе [4]. Это связано с тем, что для реальных систем размеры частиц достаточно малы, что затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов. При компьютерном моделировании динамики цепочек задаются размеры частиц \hat{a} , вязкость несущей жидкости $\hat{\eta}$, величина и направление внешней силы $\vec{\hat{F}}_k$, действующей на каждую частицу, а так же скорость внешнего модельного потока. Поскольку плотность жидкости явным образом не входит в уравнения (2.1), то она считается одинаковой для модельной и реальной жидкостей.

Связь между реальными и модельными параметрами задается соотношениями [4]

$$V = \frac{F\hat{a}\hat{\eta}\hat{V}}{\hat{F}\eta a}, \quad (2.6)$$

$$\hat{\eta}^2 = \eta^2 \frac{\hat{F}}{F}. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) выражение (2.6) записывается в виде

$$V = \frac{\hat{a}\eta\hat{V}}{\hat{\eta}a}. \quad (2.8)$$

Другими словами, зная реальные значения параметров, при моделировании можно задавать значения двух параметров, а значение третьего находится из условия подобия. Можно рассмотреть и обратную задачу. Задавая значения всех трех модельных параметров, можно найти один из трех реальных параметров, зная значения двух из них.

Для моделирования динамики цепочки в программе используется такой параметр, как промежуток времени. Поэтому необходимо найти связь между такими параметрами в реальном процессе движения $t = a/V$ и при моделировании $\hat{t} = \hat{a}/\hat{V}$. Используя соотношения (2.8), получим связь между этими параметрами:

$$t = \frac{a^2\hat{\eta}\hat{t}}{\hat{a}^2\eta}. \quad (2.9)$$

Такой параметр задачи, как сила реакция стержней S для реальной цепочки определяется масштабированием модельного значения сил реакций \hat{S} по формуле

$$S = \hat{S} \frac{F}{\hat{F}}. \quad (2.10)$$

Угловая скорость частиц Ω определяется из условия подобия модельного и реального течения. Получаем соотношение:

$$\Omega = \frac{\hat{\Omega}\hat{a}^2\eta}{a^2\hat{\eta}}.$$

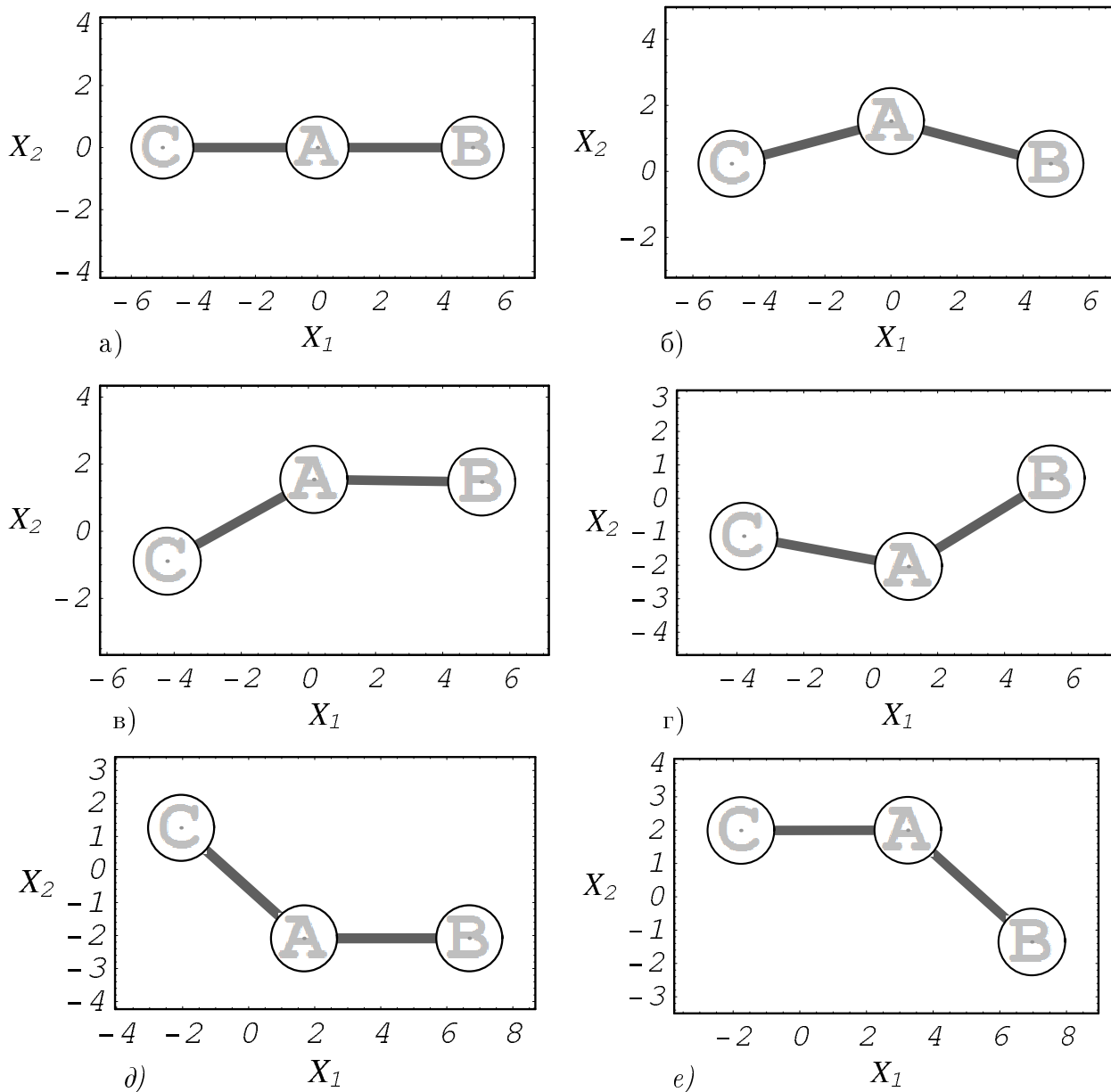
В случае, когда изучается динамика цепочки частиц в потоке в отсутствии внешних сил, то соотношение между модельной и реальной скоростью находится из подобия течений и имеет вид

$$u = \frac{\hat{u}\hat{a}\eta}{a\hat{\eta}}$$

Здесь u – скорость частицы в агрегате. Реакция стержней в этом случае находится также из соотношения (2.10) в котором под силой F понимается гидродинамическая сила, действующая на частицу в агрегате с учетом ее взаимодействия с другими частицами в агрегате. Модельное значение \hat{F} находится из решения системы (2.1) так же, как и значение \hat{S} .

3. Результаты моделирования

Рассмотрим варианты цепочки из трех сферических частиц A , B и C , соединенных между собой стержнями. Система частиц помещена в вязкую жидкость. К частицам приложены моменты T_A , T_B и T_C , под действием которых частицы вращаются и создают вихревое течение в окружающей жидкости. Течение жидкости создает силы, действующие на частицы со стороны жидкости и приводящие к деформации цепочки в виде ее изгиба. Через определенные промежутки времени величина и направление моментов изменяются так, чтобы изгиб цепочки был подобен деформациям тела плывущей в воде змеи.

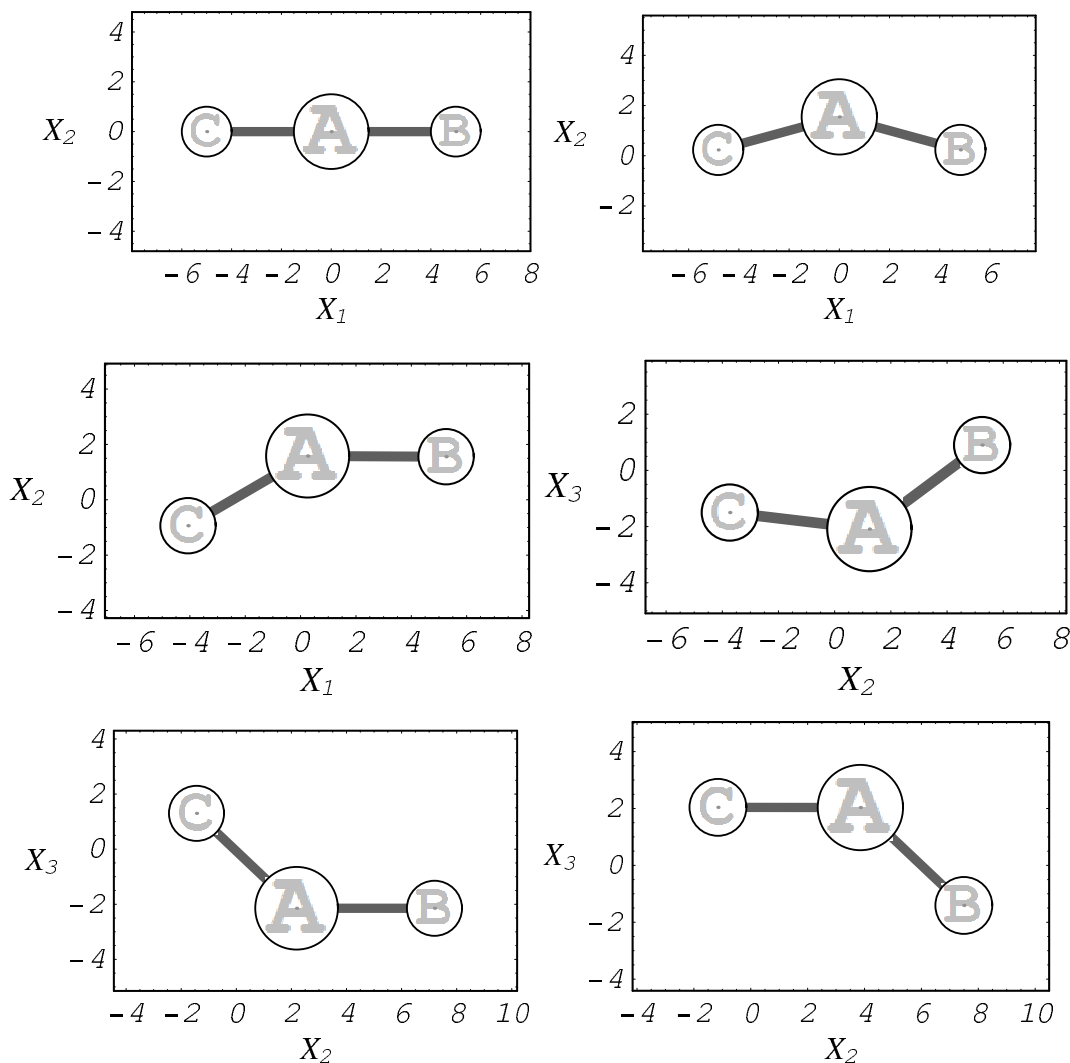


Р и с у н о к 3.1

Динамика первой модели цепочки с частицами одного размера

На рис. 3.1а - 3.1б приведены результаты численного моделирования динамики первой цепочки за промежутки времени $\hat{t} = 20$ при следующих значениях параметров: значения радиусов всех частиц $\hat{a} = 1$; моменты внутренних сил $\hat{T}_B = -5$, $\hat{T}_A = 0$, $\hat{T}_C = 5$; модельная вязкость жидкости считалась равной $\hat{\eta} = 1$. В последней конфигурации направление и значения внутренних моментов, действующих на частицы, меняется $\hat{T}_B = -5$, $\hat{T}_A = 10$, $\hat{T}_C = -5$ и вновь рассчитывается динамика цепочки. За промежуток времени $\hat{t} = 18,5$ цепочка принимает конфигурацию рис. 2в. В последней конфигурации цепочки направление и величина моментов вновь меняются на $\hat{T}_B = 5$, $\hat{T}_A = 0$, $\hat{T}_C = -5$ и за промежуток времени $\hat{t} = 49$ она перемещается в положение рис. 2г. В этом положении вновь меняется направление и величина внутренних моментов, $\hat{T}_B = 5$, $\hat{T}_A = -10$, $\hat{T}_C = 5$, и за промежуток времени $\hat{t} = 47$ цепочка перемещается и принимает конфигурацию рис. 2д. И вновь процедура изменения направления и значений моментов внутренних сил повторяется для последней конфигурации и возвращаемся к первоначальной ситуации: $\hat{T}_B = -5$, $\hat{T}_A = 0$, $\hat{T}_C = 5$. За промежуток времени $\hat{t} = 60$ цепочка принимает положение рис. 2е. Далее цикл вычислений повторяется.

Аналогичные вычисления были проделаны для еще двух цепочек. На рис. 3.2 представлены результаты моделирования для цепочки у которой радиус частицы A увеличен до $\hat{a} = 1,5$, остальные частицы имеют единичный радиус.

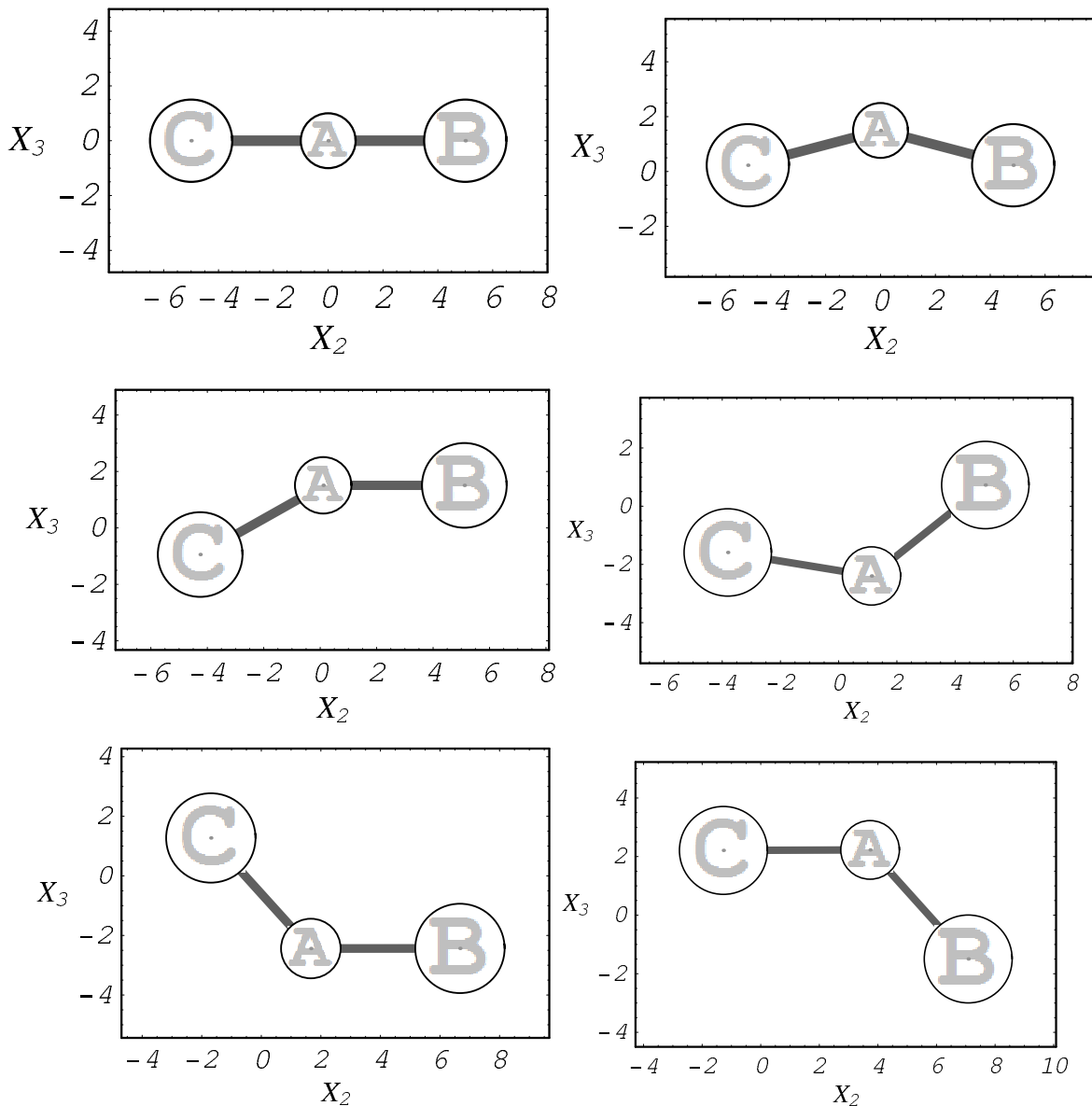


Р и с у н о к 3.2

Динамика второй модели цепочки с большой центральной частицей

Промежутки времени, через которые моменты внутренних сил меняли значения и направления, выбирались таким образом, чтобы в результате их действия цепочка принимала конфигурацию, подобную первой цепочке. Поэтому имеем следующие значения: на первом промежутке $\hat{t} = 20$, на втором – $\hat{t} = 20$, на третьем – $\hat{t} = 50$, на четвертом – $\hat{t} = 52,5$, на пятом – $\hat{t} = 60$.

Результаты моделирования динамики цепочки у которой радиус частиц B и C увеличен до $\hat{a} = 1,5$, а частица A имеет единичный радиус, представлены на рис. 3.3. Аналогично предыдущему случаю выбирались промежутки времени, через которые моменты внутренних сил меняли значения и направления: на первом промежутке $\hat{t} = 20$, на втором – $\hat{t} = 19$, на третьем – $\hat{t} = 57,8$, на четвертом – $\hat{t} = 49,3$, на пятом – $\hat{t} = 75,6$.



Р и с у н о к 3.3

Динамика третьей модели цепочки с крайними частицами большого размера

Численные результаты моделирования движения цепочек представлены в таб. 1. Как видно из таблицы, быстрее перемещается вторая цепочка, а первая цепочка – самая медленная из трех. Объяснение такой динамики цепочек лежит в гидродинамике течения, образуемого вокруг каждой цепочки вращением их частиц и создаваемой этим течением гидродинамической силы, перемещающей цепочку.

Таблица 1: Результаты моделирования динамики цепочки частиц

Параметры моделирования	Первая цепочка	Вторая цепочка	Третья цепочка
Время движения \hat{t}	194, 5	202, 5	221, 7
Перемещение центральной частицы X_1	3, 24	3, 85	3, 724
Скорость центральной частицы \hat{V}_1	0, 016658	0, 01901	0, 016797

Также проведенные расчеты позволяют определить усилия в стержнях в результате деформации цепочки частиц в потоке вязкой жидкости.

Предложенный выше подход позволяет конструировать цепочки частиц различной длины, самодвижущиеся в вязкой жидкости.

4. Заключение

Рассмотрены модели цепочек частиц, плавающих за счет моментов внутренних сил, которые формируют вихревую структуру течения в окружающей жидкости. Такое течение создает гидродинамическую силу, действующую на цепочку и приводящая к его перемещению. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, из которых состоит цепочка. Для компьютерного моделирования перемещений такого рода агрегатов в вязкой жидкости использован специальный программный комплекс, разработанный ранее. Проведен численный расчет динамики 3 модельных структур, образованных, из 3 частиц разного размера. Результаты численного моделирования показывают, что одна из моделей плавающих цепочек частиц перемещается с большей скоростью, чем две другие. Найдены усилия реакций стержневых связей, наложенных на частицы цепочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. J. Lighthill, *Mathematical Biofluidynamics*, SIAM, Philadelphia, 1975, 281 с.
2. P. R. Bandyopadhyay, D. N. Beal, A. Menozzi, “Biorobotic insights into how animals swim”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 206–214.
3. D. Lopez, E. Lauga, “Dynamics of swimming bacteria at complex interfaces”, *Phys. of fluids.*, **26** (2014), 071902.
4. С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач, “Динамика цепочечных агрегатов частиц в потоке вязкой жидкости”, *Журнал вычислительной математики и математической физики.*, **56:5** (2016), 133–148.
5. С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач, “Об одной модели динамики самодвижущихся агрегатов частиц в вязкой жидкости”, *Нелинейная динамика.*, **12:4** (2016), 605–618.

6. D. Lentink, F. T. Muijres, F. J. Donker-Duyvis, J. L. Leeuwen, “Vortex-wake interactions of a flapping foil that models animal swimming and flight”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 267–273.

Поступила 19.10.2017

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

Model of dynamics of a self-moving chain of particles in a viscous fluid

© S. I. Martynov³, L. U. Tkach⁴

Abstract. We consider a model of a chain consisting of spherical particles interconnected by rods. This chain moves in a viscous fluid by forming around itself such a vortex flow that creates a hydrodynamic force that propels the chain in a given direction. The vortex flow of a fluid is formed by the rotation of chain particles under the action of moments of internal forces; their sum is zero. To calculate the dynamics of the chain, the system of equations is solved that includes equations of creeping flow, boundary conditions and equations of particle dynamics. The hydrodynamic interaction of all particles is taken into account. It is assumed that the rods don't interact with the fluid, and their role is to keep the connected particles at the same distance. Computer simulation of the dynamics of three chains is carried out. These chains differ in the particle size. The forces in the rods and the movement speed for each chain are calculated. It is found that one of the models considered moves faster. Basing on the proposed approach, it is possible to create models of self-propelled chains of different length.

Key Words: numerical modeling, viscous fluid, self-propelled chains of particles, hydrodynamic interaction, internal forces of interaction.

REFERENCES

1. M. J. Lighthill, *Mathematical Biofluidynamics*, SIAM, Philadelphia, 1975 (In Eng.), 281 p.
2. P. R. Bandyopadhyay, D. N. Beal, A. Menozzi, “Biorobotic insights into how animals swim”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 206–214 (In Eng.).
3. D. Lopez, E. Lauga, “Dynamics of swimming bacteria at complex interfaces”, *Phys. of fluids.*, **26** (2014), 071902 (In Eng.).
4. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Dynamics of Chain Particle Aggregates in Viscous Flow”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:5 (2016), 826–840 (In Eng.).
5. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “On one model of the dynamics of self-propelled aggregates of particles in a viscous fluid”, *Nonlinear Dynamics.*, **12**:4 (2016), 605—618 (In Russ.).
6. D. Lentink, F. T. Muijres, F. J. Donker-Duyvis, J. L. Leeuwen, “Vortex-wake interactions of a flapping foil that models animal swimming and flight”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 267–273 (In Eng.).

Submitted 19.10.2017

³ Professor of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

⁴ Senior Lecturer of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, Leonilla7777@mail.ru