DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.64-72

УДК 517.95

Об одной априорной оценке для эллиптического оператора второго порядка, вырождающегося вдоль оси координат, перпендикулярной к границе полуплоскости

© **Г. А. Смолкин**[1]

Аннотация. Вопросы разрешимости, свойств решений дифференциальных уравнений с частными производными и соответствующих краевых задач часто сводятся к априорным оценкам в пространствах С.Л. Соболева и их обобщений, исследованиям которых посвящены многочисленные работы ряда авторов. К ним относится и данная работа. В ней дается метод сведения оценок Соболевских норм, определенных в евклидовом полупространстве, к оценкам норм, определенных на всем евклидовом пространстве. В работе получено неравенство, левая часть которого является нормой производной второго порядка функции по нормали к границе полуплоскости, а правая – линейной комбинацией норм образа, порождаемого действующим на эту функцию вырождающимся эллиптическим оператором, и следа функции на границе полуплоскости. В доказательстве неравенства использованы два продолжения функции из полуплоскости на всю плоскость. С помощью первого продолжения, подробно изученного Л.Н. Слободецким, имеющего производные до третьего порядка включительно, неравенство сводится к оценкам смешанных производных и производной четвертого порядка по касательному направлению к границе полуплоскости, которые получаются на основе второго продолжения – дважды дифференцируемой функции. Полученные результаты можно распространить на более широкий класс операторов, они могут быть применены при изучении краевых задач для вырождающихся эллиптических и квазиэллиптических операторов.

Ключевые слова: преобразование Фурье, пространства С.Л. Соболева, априорные оценки, вырождающийся эллиптический оператор, продолжение функции.

В статье приняты следующие общепринятые обозначения [1]-[4]:

$$x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ \xi=(\xi_1,\xi_2) - \text{точки плоскости } R^2;\ x\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2,$$

$$\lambda(t)=(1+|t|^2)^{1/2},\ \ \partial_k^j=\frac{\partial^j}{\partial x_k^j},\ i^2=-1,\ D_k^j=i^{-j}\frac{\partial^j}{\partial x_k^j},\ \ k=1,2;\ j=1,2,\ldots;$$

$$\widetilde{w}(\xi)=\int e^{-ix\xi}w(x)dx,\ \widetilde{w}(\xi_1,x_2)=\int e^{-ix_1\xi_1}w(x)dx_1,$$

$$\widetilde{w}(x_1,\xi_2)=\int e^{-ix_2\xi_2}w(x)dx_2$$

– преобразования Фурье функции $w(x)$ по переменным x, x_1, x_2 соответственно. При этом

$$w(x)=(2\pi)^{-2}\int e^{ix\xi}\widetilde{w}(\xi)d\xi,\ \text{если}\ \int|\widetilde{w}(\xi)|d\xi<\infty;$$

Скалярное произведение $(w(x),W(x))$, функции $A(x,D)w$, $A(x,D_1)w$,

[1] **Смолкин Георгий Александрович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/https://orcid.org/0000-0001-5964-9814, smolkinga@yandex.ru

$A(x, D_2)w$, нормы $\|w(x)\|$, $\|w(x)\|_{x_2>0}$ определяются равенствами

$$(w(x), W(x)) = \int w(x)\overline{W}(x)dx = \int\int w(x_1, x_2)\overline{W}(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

$$A(x, D)w = (2\pi)^{-2}\int e^{ix\xi}A(x, \xi)\widetilde{w}(\xi)d\xi,$$

$$A(x, D_1)w = (2\pi)^{-1}\int e^{ix_1\xi_1}A(x, \xi_1)\widetilde{w}(\xi_1, x_2)d\xi,$$

$$A(x, D_2)w = (2\pi)^{-1}\int e^{ix_2\xi_2}A(x, \xi_2)\widetilde{w}(x_1, \xi_2)d\xi,$$

$$\|w(x)\|^2 = (w(x), w(x)),\ \|w(x)\|^2_{x_2>0} = \int_{x_2>0}|w(x)|^2dx$$

соответственно.

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой C, быть может с индексами (в случае необходимости).

Часто будем использовать неравенства [1, 2]

$$\|w(x)\|^2 \le C_1(\widetilde{w}(x_1, \xi_2), \widetilde{w}(x_1, \xi_2)) \le C_2(\widetilde{w}(\xi_1, x_2), \widetilde{w}(\xi_1, x_2)) \le$$
$$C_3(\widetilde{w}(\xi), \widetilde{w}(\xi)) \le C_4\|w(x)\|^2,$$
$$\|\lambda^s(D_2)z(t)\|^2 \le C_5(\int|z(t)|^2dt + \int\int\frac{|z(t)-z(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}dtd\tau) \le$$
$$C_6\|\lambda^s(D_2)z(t)\|^2, \tag{1.1}$$

которые справедливы при некоторых положительных и независимых от $w(x) \in C_0^\infty(R^2)$, $z(t) \in C_0^\infty(R)$, константах C_j, $j = 1, ..., 6$. $0 < s < 1$.

Нам потребуются равносильные оценки [3, 4]

$$\|\lambda^{1/2}(D_2)w(x)\|^2 \le C((D_1w(x), D_1w(x)) +$$
$$(x_1D_2w(x), x_1D_2w(x)) + \|w(x)\|^2), \tag{1.2}$$
$$\|\lambda^{1/2}(\xi_2)\widetilde{w}(x_1, \xi_2)\|^2 \le C((D_1\widetilde{w}(x_1, \xi_2), D_1\widetilde{w}(x_1, \xi_2)) +$$
$$(x_1\xi_2\widetilde{w}(x_1, \xi_2), x_1\xi_2\widetilde{w}(x_1, \xi_2)) + \|w(x)\|^2), \tag{1.3}$$

которые справедливы для любой дифференцируемой функции $w(x)$ с компактным носителем.

Приступим к изложению результатов работы.

Всюду ниже $u(x) \in C_0^\infty(K)$, K – компакт из R^2.

$$P(x, D) = D_1^2 + x_1^2D_2^2,\ f(x) = P(x, D)u,$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x),\ \text{если}\ x_2 \ge 0 \\ f(x_1, -x_2),\ \text{если}\ x_2 < 0, \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} u(x),\ \text{если}\ x_2 \ge 0 \\ u(x_1, -x_2),\ \text{если}\ x_2 < 0, \end{cases}$$

$h(t) \in C_0^\infty(R)$, $0 \le h(t) \le 1$; $h(t) = 1$, если $|t| \le 1$; $h(t) = 0$, если $|t| \ge 2$. Пусть

$$v_1 = v_1(x) = \begin{cases} u(x),\ \text{если}\ x_2 \ge 0 \\ 2h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1, 0) - u(x_1, -x_2),\ \text{если}\ x_2 < 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

Л е м м а 1.1. *Для любых постоянных* $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|h(x_1\varepsilon\mu(D_2))D_2^2 v_1(x)\| \leq$$
$$C_1(\varepsilon)C_2(\gamma)(\|(\lambda^{2+\gamma}(D_1)+\lambda^{\gamma}(D_1)\lambda(D_2))f(x)\|_{x_2>0}+$$
$$\|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1,0)\|+|D_1^2 P(x,D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1,0)\|+\|v_1(x)\|)+$$
$$C(\varepsilon\|\lambda^{3/2}(D_2)D_1 v_1(x)\|+\varepsilon^2\|\lambda^2(D_2)v_1(x)\|), \tag{1.5}$$

при этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_1(\varepsilon)=\infty,\ \lim_{\gamma\to 0} C_2(\gamma)=\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$T=\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^2(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2)\|^2. \tag{1.6}$$

Положив в неравенстве (1.3) $\widetilde{w}(x_1,\xi_2)=h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^{3/2}(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2)$, получим

$$T\leq C((D_1 h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^{3/2}(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2), D_1 h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^{3/2}(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2))+$$
$$(x_1\xi_2 h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^{3/2}(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2), x_1\xi_2 h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^{3/2}(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2))+$$
$$\|v_1(x)\|^2).$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$T\leq C(I+\|v_1(x)\|^2)+\varepsilon\|\lambda^{3/2}(D_2)D_1 v_1(x)\|^2+\varepsilon^2\|\lambda^2(D_2)v_1(x)\|^2,\ \text{где} \tag{1.7}$$

$$I=\int\int|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda(\xi_2)\widetilde{F}_1(x_1,\xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2,$$
$$\widetilde{F}_1(x_1,\xi_2)=(D_1^2+x_1^2\xi_2^2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2). \tag{1.8}$$

Оценим интеграл I.
Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\widetilde{F}_1(x_1,\xi_2)=\widetilde{F}_1(0,\xi_2)+x_1\partial_1\widetilde{F}_1(0,\xi_2)+\int_0^{x_1}\int_0^{t_1}\partial_1^2\widetilde{F}_1(t_2,\xi_2)dt_2dt_1.$$

Поэтому

$$I\leq C(J_0+J_1+J_2),\ \text{где}$$

$$J_0=\int\int|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda(\xi_2)\widetilde{F}_1(0,\xi_2|^2 dx_1 d\xi_2\leq\frac{C}{\varepsilon}\int\lambda^{3/2}(\xi_2)|\widetilde{F}_1(0,\xi_2|^2 d\xi_2,$$
$$J_1=\int\int|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))x_1\lambda(\xi_2)\partial_1\widetilde{F}_1(0,\xi_2|^2 dx_1 d\xi_2\leq$$
$$\frac{C}{\varepsilon^3}\int\lambda^{1/2}(\xi_2)|D_1\widetilde{F}_1(0,\xi_2|^2 d\xi_2,$$
$$J_2=\int\int|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda(\xi_2)\int_0^{x_1}\int_0^{t_1}\partial_1^2\widetilde{F}_1(\tau_1,\xi_2))d\tau_1dt_1|^2dx_1d\xi_2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$J_2 \le C\int\int h^2(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))|x_1|^3dx_1\lambda^2(\xi_2)\int|D_1^2\widetilde{F}_1(\tau_1,\xi_2)|^2d\tau_1d\xi_2 \le$$
$$C(\varepsilon)\le\int\int|D_1^2\widetilde{F}_1(\tau_1,\xi_2)|^2d\tau_1d\xi_2\le$$
$$C(\varepsilon)(|D_1^2P(x,D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1,0)\|^2+|D_1^2f(x)\|^2_{x_2>0}). \tag{1.9}$$

Из равенства

$$D_1^jF_1(0,x_2)=D_1^jF(0,x_2)+D_1^jF_0(0,x_2), \text{где } j=0,1,$$

$$D_1^jF_0(0,x_2)=\begin{cases}0, \text{ если } x_2\ge 0\\ 2h(x_2\lambda(D_1))D_1^{j+2}U(0)-2D_1^jF(0,x_2), \text{ если } x_2<0\end{cases}$$

следует

$$J_j\le C\varepsilon^{-1-2j}\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)(|D_1^j\widetilde{F}(0,\xi_2)|^2+|D_1^j\widetilde{F}_0(0,\xi_2)|^2)d\xi_2. \tag{1.10}$$

Из (1.1) имеем

$$\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|D_1^j\widetilde{F}_0(0,\xi_2)|^2d\xi_2\le C(\int|D_1^jF_0(0,x_2)|^2dx_2+$$
$$\int\int|D_1^jF_0(0,x_2)-D_1^jF_0(0,y_2)|^2/|x_2-y_2|^{1-j+3/2}dx_2dy_2)\le$$
$$C(\int_{x_2<0}\int_{y_2<0}|D_1^jF_0(0,x_2)-D_1^jF_0(0,y_2)|^2/|x_2-y_2|^{1-j+3/2}dx_2dy_2+$$
$$\int_{x_2<0}|D_1^jF_0(0,x_2)|^2/|x_2|^{-j+3/2}dx_2)\le C(I_1+I_2+I_3), \text{ где} \tag{1.11}$$

$$I_1=\int|\lambda^{3/4-j/2}(D_2)h(x_2\lambda^2(D_1))D_1^{j+2}U(0)|^2dx_2,$$
$$I_2=\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|D_1^j\widetilde{F}(0,\xi_2)|^2d\xi_2, \tag{1.12}$$
$$I_3=\int|D_1^jF(0,x_2)-h(x_2\lambda^2(D_1))D_1^{j+2}U(0)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2.$$

Оценим интегралы I_1, I_2, I_3.

Из соотношений

$$I_1\le C\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}\int h(x_2\lambda^2(\xi_1))\xi_1^{j+2}\widetilde{U}(\xi_1,0)d\xi_1dx_2|^2d\xi_2=$$
$$C\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int\xi_1^{j+2}\widetilde{U}(\xi_1,0)\int e^{-ix_2\xi_2}h(x_2\lambda^2(\xi_1))dx_2d\xi_1|^2d\xi_2,$$

используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$I_1\le$$
$$C(\gamma)\int\lambda^{2j+4+1+2\gamma}(\xi_1)|\widetilde{U}(\xi_1,0)|^2\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}h(x_2\lambda^2(\xi_1))dx_2|^2d\xi_2d\xi_1.$$

Отсюда, заменив переменную x_2 на $x_2\lambda^{-2}(\xi_1)$, ξ_2 на $\xi_2\lambda^2(\xi_1)$, получим

$$I_1 \le C(\gamma)\int \lambda^{2j+4+1+2\gamma+(3/2-j)2-2}(\xi_1)|\widetilde{U}(\xi_1,0)|^2 d\xi_1 =$$
$$C(\gamma)\int \lambda^{6+2\gamma}(\xi_1)|\widetilde{U}(\xi_1,0)|^2 d\xi_1 \le C(\gamma)\|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1,0)\|^2. \quad (1.13)$$

Далее, имеем

$$I_2 \le C\int \lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int \xi_1^j\widetilde{F}(\xi)d\xi_1|^2 d\xi_2 \le$$
$$C\int\int(|\xi_1|+\lambda^{1/2}(\xi_2))^{-2}d\xi_1\int(|\xi_1|+\lambda^{1/2}(\xi_2))^2\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\xi_1^j\widetilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \le$$
$$C\int\int(|\xi_1|+\lambda^{1/2}(\xi_2))^2\lambda^{1-j}(\xi_2)|\xi_1^j\widetilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 =$$
$$C(\int\int_{|\xi_1|\le\lambda^{1/2}(\xi)}(|\xi_1|+\lambda^{1/2}(\xi_2))^2\lambda^{1-j}(\xi_2)|\xi_1^j\widetilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 +$$
$$\int\int_{|\xi_1|\ge\lambda^{1/2}(\xi)}(|\xi_1|+\lambda^{1/2}(\xi_2))^2\lambda^{1-j}(\xi_2)|\xi_1^j\widetilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2) \le$$
$$C\|(D_1^2+\lambda(D_2))f(x)\|^2_{x_2>0}. \quad (1.14)$$

Очевидно,

$$I_3 \le J_1 + J_2, \text{ где}$$

$$J_1 = \int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2,$$
$$W(x_2) = h(x_2\lambda^2(D_1))D_1^jF(0,x_2) - h(x_2\lambda^2(D_1))D_1^{j+2}U(0),$$
$$J_2 = \int |(1-h(x_2\lambda^2(D_1)))D_1^jF(0,x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2.$$

Учитывая дифференцируемость функции $W(x_2)$, равенство $W(0)=0$, интегрируя по частям, получаем

$$\int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2 \le C\int |W(x_2)D_2W(x_2)|/|x_2|^{1/2-j}dx_2 \le$$
$$C(\int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2)^{1/2}(\int |D_2W(x_2)|^2|x_2|^{1/2+j}dx_2)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2 \leq C\int |x_2|^{1/2+j}|D_2W(x_2)|^2dx_2 \leq$$
$$C(\int |x_2|^{1/2+j}|D_2\int h(x_2\lambda^2(\xi_1))\xi_1^j\widetilde{F}(\xi_1,x_2)d\xi_1|^2dx_2 +$$
$$\int |x_2|^{1/2+j}|D_2\int h(x_2\lambda^2(\xi_1))\xi_1^{j+2}\widetilde{U}(\xi_1,0)d\xi_1|^2dx_2) \leq$$
$$C(\int(\int \lambda^{3/2}(\xi_1)|\widetilde{F}(\xi_1,x_2)|d\xi_1)^2dx_2 +$$
$$\int(\int \lambda^{-1/2}(\xi_1)|D_2\widetilde{F}(\xi_1,x_2)|d\xi_1)^2dx_2 +$$
$$\int\int \lambda^{2j+4+1+2\gamma}(\xi_1)|\widetilde{U}(\xi_1,0)D_2h(x_2\lambda^2(\xi_1))|^2|x_2|^{1/2+j}dx_2d\xi_1) \leq$$
$$C(\int\int \lambda^{4+2\gamma}(\xi_1)|\widetilde{F}(\xi_1,x_2)|^2d\xi_1dx_2 + \int\int |\lambda^{\gamma}(\xi_1)D_2\widetilde{F}(\xi_1,x_2)|^2d\xi_1dx_2 +$$
$$\int \lambda^{2j+4+1+2\gamma+4-(3/2+j)2}(\xi_1)|\widetilde{U}(\xi_1,0)|^2d\xi_1) \leq$$
$$C(\gamma)(\|(\lambda^{2+\gamma}(D_1)+\lambda^{\gamma}(D_1)\lambda(D_2))f(x)\|^2_{x_2>0} + \|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1,0)\|^2). \tag{1.15}$$

$$J_2 \leq C\int |\int(1-h(x_2\lambda^{2+\gamma}(\xi_1)))\xi_1^j\widetilde{F}(\xi_1,x_2)d\xi_1|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2 \leq$$
$$C\int(\int \lambda^{3/2}(\xi_1)|\widetilde{F}(\xi_1,x_2)|d\xi_1)^2dx_2 \leq$$
$$C\int\int \lambda^{4+2\gamma}(\xi_1)|\widetilde{F}(\xi_1,x_2)|^2d\xi_1dx_2.$$

Отсюда и из (1.6 – 1.15) следует доказательство Леммы.
Доказательство закончено.

Теорема 1.1. *Для любой постоянной* $\gamma > 0$ *существует постоянная* $C(\gamma)$, *не зависящая от* $u(x) \in C_0^{\infty}(K)$ *и такая, что*

$$\begin{aligned}\|D_2^2u(x)\|_{x_2>0} \leq\ & C(\gamma)(\|(\lambda^{2\gamma}(D_1)+\lambda^{\gamma}(D_1)\lambda(D_2))P(x,D)u(x)\|_{x_2>0} + \\ & \|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1,0)\| + |D_1^2P(x,D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1,0)\|)\end{aligned} \tag{1.16}$$

Доказательство.
Положим

$$v = v(x) = \begin{cases} u(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ \alpha_1u(x_1,-x_2)+\alpha_2u(x_1,-2x_2)+\alpha_3u(x_1,-3x_2), \text{ если } x_2 < 0; \end{cases}$$

α_j удовлетворяют системе уравнений

$$(-1)^k\alpha_1 + (-2)^k\alpha_2 + (-3)^k\alpha_3 = 1,\ k = 0,1,2.$$

Очевидно,

$$\|D_2^2u(x)\|_{x_2>0} \leq C\|\lambda^2(D_2)v(x)\|.$$

Положив в неравенстве (1.2) $w(x) = \lambda^{3/2}(D_2)v(x)$ и интегрируя по частям, получаем

$$\|\lambda^2(D_2)v(x)\|^2 \leq C(\|D_2P(x,D)v(x)\|^2 + \|P(x,D)v(x)\|^2 + \|v(x)\|^2).$$

Отсюда, учитывая, что функция $v(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, получаем

$$\begin{aligned}\|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2>0} \leq C(\|\lambda(D_2)P(x,D)u(x)\|_{x_2>0} + \|u(x)\|_{x_2>0} +\\ \|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0}).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Оценка $\|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0}$.

Ясно, что

$$\begin{aligned}\|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0} \leq C\|D_2D_1^2v_1(x)\| \leq\\ C(\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2D_1^2v_1(x)\| + \|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2)))D_2D_1^2v_1(x)\|).\end{aligned} \tag{1.18}$$

(ε – положительная константа). Оценим каждое слагаемое правой части последнего неравенства.

Оценка $\|(1-h(x_1\varepsilon\mu(D_2)))D_1^2D_2v_1(x)\|$.

Поскольку

$$1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)) \leq C\varepsilon(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)))x_1\lambda^{1/2}(\xi_2), \text{ то}$$

$$\begin{aligned}\|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)))D_1^2\xi_2\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2)\|^2 \leq\\ C\varepsilon^2((x_1\lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^2\xi_2\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2), x_1\lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^2\xi_2\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2)) +\\ (\lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^3\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2), \lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^3\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2))) \leq\\ C\varepsilon^2(\|D_1^2P(x,D)v_1\|^2 + \|(1+D_2^2)v_1\|^2 + \|D_1^2D_2v_1\|^2) \leq\\ C\varepsilon^2(\|D_1^2P(x,D)u\|_{x_2>0}^2 + \|(1+D_2^2)u\|_{x_2>0}^2 + \|D_1^2u\|_{x_2>0}^2 +\\ |D_1^2P(x,D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1,0)\|).\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (1.17), (1.18) следует

$$\begin{aligned}\|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2>0} \leq C(\|(D_1^2+\lambda(D_2))P(x,D)u(x)\|_{x_2>0} +\\ |D_1^2P(x,D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1,0)\| + \|u(x)\|_{x_2>0} +\\ \|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2D_1^2v_1(x)\|).\end{aligned} \tag{1.19}$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2D_1^2v_1(x)\|^2 \leq\\ C(\varepsilon^{1/2}\|D_1^4v_1(x)\|^2 + \varepsilon^{1/2}\|D_2^2v_1(x)\|^2 + \varepsilon^{-1/2}\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))D_2^2v_1(x)\|^2).\end{aligned} \tag{1.20}$$

Оценка $\|D_1^4v_1(x)\|$.

Из неравенства

$$\|D_1^4v_1(x)\|^2 \leq (D_1^4v_1(x), D_1^4v_1(x)) + (D_1^3x_1D_1^3D_2v_1(x), x_1D_1^3D_2v_1(x))$$

следует

$$\|D_1^4v_1(x)\|^2 \leq C(\|D_1^2P(x,D)v_1(x)\|^2 + \|D_2^2v_1(x)\|^2.$$

Поэтому, выбирая ε достаточно малым, используя вышеприведенную лемму и оценки (1.19), (1.20), получаем доказательство теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, М.: Наука, 1984, 360 с.

2. Л. Н. Слободецкий, “Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных”, *Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та*, **197** (1958), 54-112.

3. Г. А. Смолкин, “Априорные оценки, связанные с дифференциальными операторами типа Купцова-Хермандера”, *Дифференциальные уравнения*, **40**:2 (2004), 242-250.

4. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, М.: Мир, 1985, 472 с.

Поступила 25.10.2017

MSC2010 35J93

About an a priori estimate for the second order elliptic operator degenerate alog coordinate axis orthogonal to semi-plane boundary

© **G. A. Smolkin** [2]

Abstract. In the paper the methodology is demonstrated to derive an inequality of special type. The left-hand side of this inequality is a norm of the second-order derivative of a function along the normal to a half-plane boundary. The right-hand side of the inequality is a linear combination of two terms. The first is a norm of a function image generated by degenerate elliptic operator, and the second is a trace of function on the half-plane boundary. Paper deals with norms in Sobolev spaces and in Slobodetzky spaces. In the inequality proof two function continuations from half-plane to the entire plane are used. Using the first continuation which has derivatives up to the third order the inequality is reduced to estimation of mixed derivatives and derivatives with respect to boundary's tangents. This derivatives are obtained using the second continuation that is twice differentiable.
Key Words: Fouries transform, Sobolev spaces, a priori estimates, degenerate elliptic operator, function continuation.

References

1. Yu. V. Egorov, *Lineynye differentsial'nye uravneniya glavnogo tipa [Linear differential equations of principal type]*, M.: Nauka Publ., 1984 (In Russ.), 360 c.

2. L. N. Slobodetskiy, "[Generalized spaces of SL Sobolev and their applications to boundary-value problems for differential equations in partial derivatives]", *Uch. app. Leningr. ped. in-ta*, **197** (1958), 54-112. (In Russ.).

3. G. A. Smolkin, "[A priori estimates associated with differential operators of type Kuptsov-Hermander]", *Differential equations*, **40**:2 (2004), 242-250 (In Russ.).

4. M. Teylor, *Psevdodifferentsial'nye operatory [Pseudodifferential operators]*, M.: Mir Publ., 1985 (In Russ.), 472 c.

Submitted 25.10.2017

[2] **Georgy A. Smolkin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5964-9814, smolkinga@yandex.ru