DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.41-52

УДК 519.6:517.962

Точность разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений с неограниченной нелинейностью

© Ф. В. Лубышев[1], М. Э. Файрузов[2], А. Р. Манапова[3]

Аннотация. Рассматривается первая краевая задача для нелинейных эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Строится и исследуется разностная схема решения данного класса задач и реализующий ее итерационный процесс. Проведено строгое исследование сходимости итерационного процесса, с помощью которого доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу. Установлены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости разностных схем, аппроксимирующих нелинейное уравнение с неограниченной нелинейностью.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, точность разностных аппроксимаций, итерационный процесс.

1. Введение

Одним из основных вопросов теории разностных схем для уравнений математической физики (УМФ) является вопрос о точности [1, 2]. Для случая, когда решение исходной дифференциальной задачи достаточно гладкое, в теории метода сеток проведено достаточно полное исследование сходимости разностных схем и получены оценки точности в соответствующих метриках [1-2]. При понижении требований к дифференциальным свойствам искомого решения анализ сходимости разностной схемы существенно усложняется [3-11].

В работах [3, 4] предложен новый подход получения таких оценок точности метода сеток для УМФ с обобщенными решениями, в которых порядок скорости сходимости согласован с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи:

$$\|y(x) - u(x)\|_{W_2^s(\omega)} \leq M|h|^{m-s}\|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \qquad s < m,$$

где $u \in W_2^m(\Omega)$ – решение дифференциальной задачи, а $y = y(x)$, $x \in \overline{\omega}$ – решение аппроксимирующей задачи, $\|\cdot\|_{W_2^s(\omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ – нормы пространств Соболева дискретного и непрерывного аргументов соответственно.

[1] **Лубышев Федор Владимирович**, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru.

[2] **Файрузов Махмут Эрнстович**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru.

[3] **Манапова Айгуль Рашитовна**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8778-4917, aygulrm@mail.ru.

В настоящее время для широкого класса линейных задач установлены согласованные оценки точности разностных схем. Но, как правило, большинство реальных задач нелинейны, причем природа нелинейностей различна. Для квазилинейных эллиптических уравнений с обобщенными решениями в случае наличия ограниченных нелинейностей согласованные оценки точности разностных схем можно найти, например, в [3, 4].

Теория разностных схем для нелинейных УМФ с неограниченной нелинейностью является одной из наиболее сложных и актуальных областей вычислительной математики [9-11]. Исследования сходимости разностных схем для данного класса задач показали, что даже на гладких решениях эти исследования представляют довольно сложную техническую проблему. Проблема сходимости и точности разностных схем менее изучена для нелинейных УМФ с обобщенными решениями и неограниченной нелинейностью. В работах [10, 11] впервые (для одномерного случая) исследована сходимость разностных схем к обобщенным решениям одномерных аналогов квазилинейных уравнений эллиптического типа с нелинейностью неограниченного роста и получены согласованные оценки скорости сходимости. Из публикаций за последние годы следует, прежде всего, выделить работы [12-16]. В первую очередь отметим монографию [12] и обзорную работу [13].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию сходимости и точности разностных схем для нелинейных УМФ эллиптического типа со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Установлены априорные согласованные оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$, аппроксимирующих нелинейную задачу с неограниченной нелинейностью. Доказательство сходимости разностных схем проводится в предположении, что само точное решение краевой задачи существует в классе $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$ и принадлежит некоторой ограниченной области D_u и только в этой области функции, входящие в уравнение, удовлетворяют требуемым свойствам. Таким образом, получена шкала априорных оценок скорости сходимости в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$-норме для разностного решения. Условия, налагаемые на коэффициенты уравнения, выполнены в настоящей работе лишь в некоторой окрестности значений точного решения исходной задачи, что говорит как о наличии нелинейностей неограниченного роста, так и значительно расширяет класс допустимых функций, удовлетворяющих, например, условию равномерной эллиптичности на решениях уравнения.

Настоящая работа дополняет и развивает результаты, установленные в работах [10, 11], для одномерных аналогов квазилинейных уравнений эллиптического типа с неограниченной нелинейностью. В отличии от [10, 11] результаты настоящей работы установлены для нелинейных двумерных УМФ эллиптического типа со смешанными производными и неограниченной нелинейностью.

Результаты, полученные в настоящей работе, будут существенно использованы в дальнейшем при решении проблем, связанных с разработкой и исследованием разностных аппроксимаций задач оптимального управления для систем, описываемых нелинейными УМФ с обобщенными решениями (состояниями) и неограниченной нелинейностью. Исследованию этих проблем (сходимость аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризация аппроксимаций [17, 18]) для данного класса задач оптимального управления будет посвящена отдельная работа.

2. Постановка дифференциальной задачи

Пусть $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\right\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка: требуется найти функцию $u = u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющую условиям

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(u)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = f(u), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega = \Gamma, \tag{2.2}$$

где $k_{\alpha\beta}(\eta) = k_{\beta\alpha}(\eta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $f(\eta)$ – заданные функции η.

Априори предполагается, что задача (2.1)-(2.2) однозначно разрешима в классе $W_{2,0}^m(\Omega) = W_2^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $3 < m \leq 4$. Обозначим через M_u

$$M_u = \{u : M_1 \leq u(x) \leq M_2, x \in \Omega\} \tag{2.3}$$

– область значений точного решения задачи (2.1)-(2.2) (которая, в силу предположения о гладкости решения исходной задачи является ограниченным множеством). Определим окрестность D_u (δ-окрестность) области значений точного решения M_u:

$$D_u = \left\{\bar{u} : \bar{M}_1 = M_1 - \delta \leq \bar{u}(x) \leq M_2 + \delta = \bar{M}_2, \quad x \in K \subseteq \bar{\Omega}, \delta > 0\right\}, \tag{2.4}$$

здесь $\delta > 0$ – произвольная постоянная, которая может быть достаточно малой.

Будем предполагать, что для старших коэффициентов $k_{\alpha\beta}(\eta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, уравнения (2.1) выполняются следующие условия на решении задачи (2.1)-(2.2):

$$\nu \sum_{\alpha=1}^{2} \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(\eta)\xi_\alpha\xi_\beta \leq \mu \sum_{\alpha=1}^{2} \xi_\alpha^2, \quad k_{\alpha\beta}(\eta) = k_{\beta\alpha}(\eta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \tag{2.5}$$

для любых $\eta \in D_u$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$, и любых вещественных параметров ξ_1, ξ_2, где ν и μ – положительные постоянные.

Пусть, кроме того, выполняются следующие условия гладкости на коэффициенты $k_{\alpha\beta}(\eta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $f(\eta)$ уравнения (2.1) на решении задачи (2.1)-(2.2)

$$|k_{\alpha\beta}(\eta_1) - k_{\alpha\beta}(\eta_2)| \leq L|\eta_1 - \eta_2|, \qquad \forall \eta_1, \eta_2 \in D_u, \alpha, \beta = 1, 2; \tag{2.6}$$

$$|f(\eta)| \leq f_0, \quad \forall \eta \in D_u; \tag{2.7}$$

$$|f(\eta_1) - f(\eta_2)| \leq L_f|\eta_1 - \eta_2|, \forall \eta_1, \eta_2 \in D_u; \tag{2.8}$$

$$\frac{2\mu(\max l_\alpha)^2}{\nu^2}\left\{L_f + \frac{\mu f_0[2(2+\sqrt{2})L]}{\nu^2}\right\} = q_0^*, \tag{2.9}$$

$$q_1^* = \frac{q_0^*}{2} < 1. \tag{2.10}$$

Исходное уравнение (2.1) в более подробной записи принимает следующий вид

$$\begin{aligned} &-\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - 2k_{12}(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(u), \quad x \in \Omega, \\ &k_{12}(u) = k_{21}(u). \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. Постановка сеточной задачи (разностной схемы)

Для аппроксимации задачи (2.1)-(2.2) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha=1,2$ и в $\bar\Omega$: $\bar\omega_\alpha=\{x_\alpha=x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha\in[0,l_\alpha]:\ i_\alpha=\overline{0,N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha=l_\alpha\}$, $\alpha=1,2$; $\omega_\alpha=\bar\omega_\alpha\cap(0,l_\alpha)$; $\omega_\alpha^+=\bar\omega_\alpha\cap(0,l_\alpha]$, $\omega_\alpha^-=\bar\omega_\alpha\cap[0,l_\alpha)$, $\alpha=1,2$; $\bar\omega=\bar\omega_1\times\bar\omega_2$; $\omega^{(\pm1)}=\omega_1^\pm\times\omega_2$, $\omega^{(\pm2)}=\omega_1\times\omega_2^\pm$; $\gamma=\bar\omega\setminus\omega$; $|h|^2=h_1^2+h_2^2$.

Пусть V – множество сеточных функций, заданных на сетке $\bar\omega=\bar\omega_1\times\bar\omega_2$, а $\overset{\circ}{V}$ – его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma=\bar\omega\setminus\omega$. Для сеточных функций из множества $\overset{\circ}{V}$ введем скалярные произведения, нормы и полунормы [1-3]:

$$(y,v)_{L_2(\omega)}=\sum_\omega h_1h_2y(x)v(x),\qquad \|y\|^2_{L_2(\omega)}=(y,y)_{L_2(\omega)}=\sum_\omega h_1h_2y^2(x),$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}=\|y_{\bar x_1}\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2)}+\|y_{\bar x_2}\|^2_{L_2(\omega_1\times\omega_2^+)}=|y|^2_{W_2^1(\omega)}=\sum_{\alpha=1}^2\sum_{\omega^{(+\alpha)}}h_1h_2y^2_{\bar x_\alpha}=\|\nabla y\|^2_{L_2(\omega)},$$

$$\|y\|^2_{W^2_{2,0}(\omega)}=\|y_{\bar x_1x_1}\|^2_{L_2(\omega)}+\|y_{\bar x_2x_2}\|^2_{L_2(\omega)}+2\|y_{\bar x_1\bar x_2}\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^2\sum_\omega h_1h_2y^2_{\bar x_\alpha x_\alpha}+2\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}h_1h_2y^2_{\bar x_1\bar x_2}=|y|^2_{W_2^2(\omega)},$$

$$\|y\|_{C(\bar\omega)}=\|y\|_{L_\infty(\bar\omega)}=\max_{\bar\omega}|y(x)|.$$

Здесь символами $|\cdot|_{W_2^1(\omega)}$ и $|\cdot|_{W_2^2(\omega)}$ обозначены полунормы в $W_2^1(\omega)$ и $W_2^2(\omega)$ соответственно.

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3.1. *Для любой сеточной функции $y(x)$, $x\in\bar\omega$, заданной на сетке $\bar\omega=\bar\omega_1\times\bar\omega_2\subset\bar\Omega$ и обращающейся в нуль на границе $\gamma=\partial\omega$: $y(x)=0$, $x\in\gamma$, справедливы следующие разностные аналоги теорем вложения:*

$$\|y\|_{L_2(\omega)}\le C_1\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)},\qquad C_1^2=\frac{(l_1l_2)^2}{8(l_1^2+l_2^2)};\tag{3.12}$$

$$\|y\|_{C(\bar\omega)}\le C_2\|y\|_{W^2_{2,0}(\omega)},\qquad C_2=\frac{(\max l_\alpha)^2}{2(l_1l_2)^{1/2}};\tag{3.13}$$

$$\|y\|_{L_2(\omega)}\le C_3\|y\|_{W^2_{2,0}(\omega)},\qquad C_3=C_2(l_1l_2)^{1/2}=\frac{(\max l_\alpha)^2}{2};\tag{3.14}$$

$$\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}\le C_4\|y\|_{W^2_{2,0}(\omega)},\qquad C_4=\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{32}\right)^{1/2}.\tag{3.15}$$

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (2.1)-(2.2) следующую разностную схему: требуется найти сеточную функцию $y(x)$, $x\in\bar\omega_h$, заданную на сетке $\bar\omega_h=\bar\omega_1\times\bar\omega_2$, которая является решением следующей сеточной задачи

$$-\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(y)y_{\bar x_\alpha x_\alpha}-2k_{12}(y)Q(y)=f(y),\quad x\in\omega_h,\tag{3.16}$$

$$y(x)=0,\qquad x\in\gamma_h,\tag{3.17}$$

где

$$Q(y)(x) = \frac{y_{x_1x_2}(x) + y_{\bar{x}_1x_2}(x) + y_{x_1\bar{x}_2}(x) + y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}}{4}(x) =$$
$$= \frac{y(x_1+h_1,x_2+h_2) - y(x_1-h_1,x_2+h_2) - y(x_1+h_1,x_2-h_2) + y(x_1-h_1,x_2-h_2)}{4h_1h_2} =$$
$$= y_{\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2}(x_1,x_2). \quad (3.18)$$

4. Итерационный процесс для нелинейной сеточной задачи

Задача (3.16)-(3.18) – это система нелинейных уравнений относительно сеточной функции $y = y(x)$, $x \in \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. В связи с этим возникает естественный вопрос о существовании и единственности решения нелинейной задачи. Как известно, одними из основных методов нахождения решения нелинейных уравнений являются итерационные методы. Они же позволяют в ряде случаев исследовать проблемы существования и единственности решения нелинейных уравнений. Поэтому возникает естественная необходимость в привлечении соответствующих итерационных методов к исследованию существования и единственности решения нелинейной разностной схемы (3.16)-(3.18), а также ее численной реализации. Следует заметить, что выбор того или иного метода итераций существенным образом влияет и на условия сходимости самой нелинейной разностной схемы к решению дифференциальной задачи (2.1)-(2.2). Кроме того, проблема строгого обоснования сходимости итерационных методов в случае наличия нелинейностей неограниченного роста имеет самостоятельный интерес и являются нетривиальной задачей [10, 11].

В дальнейшем через $A(\theta)v$ будем обозначать сеточный оператор (зависящий от параметра $\theta = \theta(x)$), задаваемый соотношением

$$A(\theta)v = -\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(\theta)v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) - 2k_{12}(\theta)Q(v)(x), \quad x \in \omega_h, \quad (4.19)$$

на множестве сеточных функций $v(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$; $v(x) = 0$, $x \in \gamma_h$, где $\theta(x)$, $x \in \bar{\omega}$ – произвольная сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\omega}$, играющая роль функционального параметра, а под $A(\theta)v$ понимается результат применения сеточного оператора $A(\theta)$ к элементу v.

Лемма 4.1. *Пусть $\theta(x)$, $x \in \bar{\omega}$ – произвольная сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\omega}$, такая что $\theta(x) \in D_u$, $\forall x \in \bar{\omega}$. Тогда оператор $A(\theta)$, задаваемый соотношением (4.19) обладает следующими свойствами*

$$\frac{\nu^2}{2\mu}\|v\|_{W^2_{2,0}(\bar{\omega})} \le \|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})}, \quad (4.20)$$

$$\|A(\theta)v\|_{W^2_{2,0}(\bar{\omega})} \le (1 + C_3^2)^{1/2}6\mu^2\|v\|_{W^2_{2,0}(\bar{\omega}))}, \quad (4.21)$$

$$\|v\|_{W^2_{2,0}(\bar{\omega})} \le C_0\|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})}, \quad (4.22)$$

при любых $v(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, $v(x) = 0$, $x \in \gamma$; $\theta(x) \in D_u$, $x \in \bar{\omega}$, где

$$C_0 = \frac{2\mu}{\nu^2}, \quad (4.23)$$

а константа C_3 определена в лемме 3.1..

Для нахождения приближенного решения нелинейных разностных уравнений (3.16)-(3.18) построим итерационный процесс, связанный с последовательными приближениями по нелинейностям, когда коэффициенты сеточного оператора $A(y)$ берутся из предыдущей итерации, так что новое приближение $y^{(s+1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, находится из решения линейной задачи:

$$A(y^{(s)})y^{(s+1)} = -\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(y^{(s)})y^{(s+1)}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(y^{(s)})Q(y^{(s+1)}) = f(y^{(s)}), x \in \omega, \tag{4.24}$$

$$y^{(s+1)}(x) = 0, \qquad x \in \gamma_h. \tag{4.25}$$

Л е м м а 4.2. *Пусть* $y^{(s)} \in D_u$, $x \in \bar{\omega}$. *Тогда сеточная функция* $y^{(s+1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, *определяемая из итерационного процесса* (4.24)-(4.25), *ограничена в сеточной норме* $\|\cdot\|_{W^2_{2,0}(\omega)}$*:*

$$\|y^{(s+1)}\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \le C_5, \qquad C_5 = C_0 f_0(l_1, l_2)^{1/2}. \tag{4.26}$$

В процессе доказательства теоремы о сходимости метода нам понадобится оценка погрешности первого приближения $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$, в равномерной метрике. Для того, чтобы избежать в условиях теоремы о сходимости метода итераций ограничений на значение первой итерации $y^{(1)}$, $x \in \bar{\omega}$, отдельно изучим задачу для погрешности первого приближения $z^{(1)}$, $x \in \bar{\omega}$.

Обозначим через $\psi(x)$, $x \in \omega$ – невязку разностного уравнения (3.16) (погрешность аппроксимации разностного уравнения (3.16) на решении исходного уравнения (2.1)):

$$\psi(x) = f(u) - \left[-\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(u)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(u)Q(u)\right] = f(u) - A(u)u, \quad x \in \omega. \tag{4.27}$$

Рассмотрим уравнение (4.24) при $s = 0$ и сложим с невязкой $\psi(x)$, $x \in \omega$. Тогда после некоторых преобразований для погрешности $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$, получим следующую задачу

$$\begin{aligned} A(u)z^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^{2}\big[k_{\alpha\alpha}(u) - k_{\alpha\alpha}(y^{(0)})\big]y^{(1)}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\big[k_{12}(u) - k_{12}(y^{(0)})\big]Q(y^{(1)}) + \\ + \big[f(y^{(0)}) - f(u)\big] + \psi(x), \quad x \in \omega, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$z^{(1)} = 0, \qquad x \in \gamma, \tag{4.29}$$

где

$$A(u)z^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha} z^{(1)}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(u)Q(z^{(1)}), \quad x \in \omega, \tag{4.30}$$

а сеточная функция $\psi(x)$, $x \in \omega$, имеет вид (4.27).

Оценку погрешности первого приближения $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$, в метрике $W^2_{2,0}(\omega)$ и в равномерной метрике $C(\bar{\omega})$ устанавливает следующая

Л е м м а 4.3. *Пусть* $y^{(0)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$ *– начальное приближение итерационного процесса* (4.24)-(4.25), *а* $u(\xi)$ *– точное решение дифференциальной задачи* (2.1)-(2.2). *Тогда при* $y^{(0)}(x) \in D_u$ *имеют место оценки*

$$\|y^{(1)}(x) - u(x)\|_{W^2_{2,0}(\omega)} = \|z^{(1)}\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \le C_0 C_8 \|z^{(0)}(x)\|_{C(\bar{\omega})} + C_0\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)}, \tag{4.31}$$

$$\begin{gathered}\|y^{(1)}(x)-u(x)\|_{C(\bar\omega)}=\|z^{(1)}\|_{C(\bar\omega)}\le C_0C_2C_8\|z^{(0)}\|_{C(\bar\omega)}+C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}=\\ =\frac{q_0^*}{2}\|z^{(0)}\|_{C(\bar\omega)}+C_0C_2\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)}\le\left(1+\frac{q_0^*}{2}\right)\|z^{(0)}\|_{C(\bar\omega)}+C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}=\beta,\end{gathered}\tag{4.32}$$

где

$$\begin{gathered}C_0C_2C_8=\frac{q_0^*}{2}=\frac{\mu(\max l_\alpha)^2}{\nu^2}\left\{L_f+\frac{\mu f_0[2(2+\sqrt{2})L]}{\nu^2}\right\};\\ C_0=\frac{2\mu}{\nu^2},\quad C_1^2=\frac{(l_1l_2)^2}{8(l_1^2+l_2^2)},\quad C_2=\frac{(\max l_\alpha)^2}{2(l_1l_2)^{1/2}},\\ C_3=\frac{(\max l_\alpha)^2}{2},\quad C_4=\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{32}\right)^{1/2},C_5=C_0f_0(l_1l_2)^{1/2},\\ C_6=[2(2+\sqrt{2})L]C_5,\quad C_7=L_f(l_1l_2)^{1/2},\quad C_8=C_6+C_7.\end{gathered}\tag{4.33}$$

С л е д с т в и е 4.1. *Пусть выполнены условия леммы 4.3.. Тогда для разности* $\Delta y^{(1)}(x)=y^{(1)}(x)-y^{(0)}(x)$ *имеет место оценка*

$$\|\Delta y^{(1)}(x)\|_{C(\bar\omega)}\le\left(1+\frac{q_0^*}{2}\right)\|z^{(0)}\|_{C(\bar\omega)}+C_0C_2\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)}=\beta.\tag{4.34}$$

Л е м м а 4.4. *Пусть* $y^{(k)}(x)\in D_u$, $k=0,1,2,...,s$ *– приближения, построенные на основе итерационного процесса* (4.24)-(4.25). *Тогда имеет место оценка*

$$\|\Delta y^{(s+1)}(x)\|_{C(\bar\omega)}\le\frac{q_0^*}{2}\|\Delta y^{(s)}(x)\|_{C(\bar\omega)},\tag{4.35}$$

откуда

$$\|\Delta y^{(s+1)}(x)\|_{C(\bar\omega)}\le\frac{q_0^*}{2}\|\Delta y^{(s)}(x)\|_{C(\bar\omega)}\le...\le\left(\frac{q_0^*}{2}\right)^s\|\Delta y^{(1)}(x)\|_{C(\bar\omega)},s=0,1,2,...\tag{4.36}$$

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполнены условия леммы 4.4.. Тогда справедлива оценка*

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\bar\omega)}=\max_{x\in\bar\omega}|y^{(s+1)}(x)-y^{(s)}(x)|\le\beta\left(\frac{q_0^*}{2}\right)^s,\tag{4.37}$$

где $\Delta y^{(s+1)}=y^{(s+1)}-y^{(s)}$, *а константы* $\beta>0$ *и* $q_0^*>0$ *определены в лемме 4.3..*

5. Теоремы о сходимости и скорости сходимости метода итераций, о существовании и единственности решения нелинейной разностной схемы

Под δ-окрестностью точного решения $u=u(x)$ дифференциальной задачи (2.1)-(2.2) будем понимать множество $S_u=\{v:\|v-u\|_C\le\delta\}$. Очевидно, что если $v\in S_u$, то $v\in D_u$, и для этого элемента справедливы все изложенные выше утверждения.

Справедлива следующая теорема о сходимости итерационного процесса (4.24)-(4.25) и о существовании решения нелинейной разностной краевой задачи (3.16)-(3.18).

Т е о р е м а 5.1. *Пусть выполнены условия из п.1 - при постановке задачи* (2.1)-(2.2) *и выбор начального приближения* $y^{(0)}(x)$ *в итерационном процессе* (4.24)-(4.25) *для нелинейной сеточной краевой задачи* (3.16)-(3.18) *подчинен условию*

$$y^{(0)} \in S_u^*, \qquad \frac{\beta}{1-q_1^*} < \delta, \qquad q_1^* = \frac{q_0^*}{2} < 1, \tag{5.38}$$

где

$$S_u^* = \left\{ v : \|v-u\|_C \leq \frac{1-q_1^*}{1+q_1^*} \cdot \frac{\delta}{2} \right\}, \tag{5.39}$$

а величина β *определяется соотношением*

$$\beta = (1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\bar\omega)} + C_0C_2\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)}, \qquad z^{(0)} = y^{(0)} - u. \tag{5.40}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) все последовательные приближения $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots$, *определяемые из итерационного процесса* (4.24)-(4.25), *содержатся в* S_u : $y^{(s)} \in S_u$, $s = 1, 2, \ldots$ *(т.е. для любых* $s = 0, 1, 2, \ldots$ *последовательность решений задачи* (4.24)-(4.25) *принадлежит* S_u, *т.е. не выходит из* S_u *).*

2) метод итераций (4.24)-(4.25) *сходится, т.е. существует*

$$\lim_{s\to\infty} y^{(s)} = y, \qquad \textit{причем } y \in S_u, \tag{5.41}$$

и предел $y \in S_u$ *последовательности* $\{y^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *является решением нелинейной разностной краевой задачи* (3.16)-(3.18), *т.е. решение* y *разностной краевой задачи* (3.16)-(3.18) *лежит в окрестности* S_u *– точного решения* $u = u(x)$ *дифференциальной задачи* (2.1)-(2.2).

3) скорость сходимости итерационного процесса характеризуется оценкой

$$\|y^{(s)}(x) - y(x)\|_{C(\bar\omega)} \leq \frac{\beta}{1-q_1^*}(q_1^*)^s. \tag{5.42}$$

Т е о р е м а 5.2. *Пусть выполнены условия п.1 при постановке краевой задачи* (2.1)-(2.2). *Нелинейная разностная краевая задача* (3.16)-(3.18) *имеет в* S_u *–* δ*-окрестности точного решения* u *краевой задачи* (2.1)-(2.2) *– единственное решение.*

6. Оценки погрешности и скорости сходимости разностной схемы на решениях из класса $W_2^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации разностной схемы (3.16)-(3.18) на сетке $\bar\omega = \bar\omega_1 \times \bar\omega_2$.

Оценку погрешности метода сеток устанавливает следующая

Т е о р е м а 6.1. *Пусть выполнены условия п.1 при постановке дифференциальной задачи. Пусть начальное приближение* $y^{(0)}(x)$ *в итерационном процессе* (4.24)-(4.25) *принадлежит* S_u^*. *Тогда при достаточно малом* $h < h_0$ *справедлива следующая оценка погрешности метода сеток* $z(x) = y(x) - u(x)$ *в сеточной норме* $W_{2,0}^2(\omega)$ *:*

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|y(x)-u(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \frac{C_0}{1-q_1^*}\|\psi\|_{L_2(\omega)}, \tag{6.43}$$

где

$$\begin{aligned}\psi(x) = f(u) - \left[-\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(u) u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(u)Q(u) + q(u)u\right] = f(u) - A(u)u = \\ = \sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(u)\left(u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\alpha^2}\right) + 2k_{12}(u)\left(Q(u) - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\end{aligned} \tag{6.44}$$

– *невязка разностного уравнения* (3.16)-(3.18).

Рассмотрим теперь сеточную функцию $\psi(x)$, $x \in \omega = \omega_1 \times \omega_2$ – погрешность аппроксимации разностной схемы (3.16)-(3.18), определяемую по формуле (6.44).

Проводя оценку правой части (6.44), получим

$$\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)} \leq M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad 3 < m \leq 4, \tag{6.45}$$

где постоянная M_* не зависит от h и $u(x)$.

Теорема 6.2. *Пусть решение дифференциальной задачи* (2.1)-(2.2) *принадлежит классу* $W_2^m(\Omega)$, *где* m *– любое число из интервала* $3 < m \leq 4$ *и начальное приближение* $y^{(0)}$ *в итерационном процессе* (3.16)-(3.18) *принадлежит* S_u^*. *Тогда при достаточно малом* $h < h_0$ *и при выполнении условий п.1 при постановке задачи* (2.1)-(2.2), *решение разностной схемы* (3.16)-(3.18) *сходится к решению дифференциальной задачи* (2.1)-(2.2) *и при этом справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток в сеточной норме* $W_{2,0}^2(\omega)$

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|y(x) - u(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \tilde{M}_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad 3 < m \leq 4, \tag{6.46}$$

где постоянная $\tilde{M}_*$ *не зависит от* h *и* $u(x)$.

Список литературы

1. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.

2. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

3. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.

4. А. А. Самарский, "Исследование точности разностных схем для задач с обобщенными решениями", *Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики*, 1984, с. 174-183.

5. П. П. Матус, "Двухслойные разностные схемы с переменными весами", *Вестник АН Беларуси. Серия физ.-мат. наук*, **4** (1993), С. 15-21.

6. В. Н. Абрашин, "Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **11**:2 (1975), С. 294-308.

7. В. Н. Абрашин, В. А. Асмолик, “Локально-одномерные разностные схемы для многомерных квазилинейных гиперболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **18**:7 (1982), С. 1107-1117.

8. П. П. Матус, “О безусловной сходимости некоторых разностных схем задач газовой динамики”, *Дифференциальные уравнения*, **21**:7 (1985), С. 1227-1238.

9. П. П. Матус, Л. В. Станишевская, “О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики”, *Дифференциальные уравнения*, **27**:7 (1991), С. 1203-1219.

10. П. П. Матус, М. Н. Москальков, В. С. Щеглик, “Согласованные оценки точности метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:7 (1995), С. 1249-1256.

11. В. С. Щеглик, “Анализ разностной схемы, аппроксимирующей третью краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **37**:8 (1997), С. 951-957.

12. B. S. Jovanovic, E. Suli, *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol.46., Springer Science & Business Media, London, 2014, 408 с.

13. B. S. Jovanovic, “Finite difference scheme for partial differential equations with weak solutions and irregular coefficients”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **4**:1 (2004), P. 48-65.

14. B. S. Jovanovic, P. P. Matus, V. S. Shchehlik, “The estimates of accuracy of difference schemes for the nonlinear heat equation with weak solutions”, *Mathematical Modelling and Analysis (MMA)*, **5**:1 (2000), P. 86-96.

15. П. П. Матус, “О корректности разностных схем для полулинейного уравнения с обобщенными решениями”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **50**:12 (2010), С. 2155-2175.

16. P. Matus, “On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **14**:3 (2014), P. 361-371.

17. Ф. В. Лубышев, *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БашГУ, Уфа, 1999.

18. Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:7 (2016), С. 1267-1293.

19. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

20. С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1973.

Поступила 30.08.2017

Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, А. Р. Манапова. Точность разностных схем для . . .

MSC2010 65N06

Accuracy of difference schemes for nonlinear elliptic equations with non-restricted nonlinearity

© **F. V. Lubyshev** [4], **M. E. Fairuzov**[5], **A. R. Manapova**[6]

Abstract. We consider the first boundary-value problem for nonlinear elliptic equations with mixed derivatives and unrestricted nonlinearity. Difference scheme for solution of a given problem class and an iterative process implementing the scheme are constructed and studied. Rigorous study of the iterative process' convergence is conducted. Existence and uniqueness of solution of nonlinear difference scheme approximating the original differential problem are proved. Estimates of convergence rates for difference schemes approximating nonlinear equation with non-restricted nonlinearity are obtained. These estimates are consistent with the smoothness of the sought solution.
Key Words: nonlinear elliptic equations, difference method of solving, accuracy of difference approximations, iterative process

References

1. A. A. Samarskij, *Teoriya raznostnyh skhem*, Nauka, M., 1989 (In Russ.).
2. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha*, Knizhnyj dom «LIBROKOM», M., 2009 (In Russ.).
3. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *Raznostnye skhemy dlya differencial'nyh uravnenij s obobshchennymi resheniyami*, Vysshaya shkola, M., 1987 (In Russ.).
4. A. A. Samarskij, "Issledovanie tochnosti raznostnyh skhem dlya zadach s obobshchennymi resheniyami", *Aktual'nye problemy matematicheskoj fiziki i vychislitel'noj matematiki*, 1984, c. 174-183 (In Russ.).
5. P. P. Matus, "Dvuhslojnye raznostnye skhemy s peremennymi vesami", *Vestnik AN Belarusi. Seriya fiz.-mat. nauk*, **4** (1993), C. 15-21 (In Russ.).
6. V. N. Abrashin, "Raznostnye skhemy dlya nelinejnyh giperbolicheskih uravnenij", *Differencial'nye uravneniya*, **11**:2 (1975), C. 294-308 (In Russ.).
7. V. N. Abrashin, V. A. Asmolik, "Lokal'no-odnomernye raznostnye skhemy dlya mnogomernyh kvazilinejnyh giperbolicheskih uravnenij", *Differencial'nye uravneniya*, **18**:7 (1982), C. 1107-1117 (In Russ.).
8. P. P. Matus, "O bezuslovnoj skhodimosti nekotoryh raznostnyh skhem zadach gazovoj dinamiki", *Differencial'nye uravneniya*, **21**:7 (1985), C. 1227-1238 (In Russ.).

[4] **Fedor V. Lubyshev**, Professor, Department of information technology and computer mathematics, of the "Bashkir state University" (450076, Russia, Republic of Bashkortostan, Ufa, street Zaki Validi, 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[5] **Mahmut E. Fairuzov**, associate Professor, Department of information technology and computer mathematics, of the "Bashkir state University" (450076, Russia, Republic of Bashkortostan, Ufa, street Zaki Validi, 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru.

[6] **Aigul R. Manapova**, associate Professor, Department of information technology and computer mathematics, of the "Bashkir state University" (450076, Russia, Republic of Bashkortostan, Ufa, street Zaki Validi, 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8778-4917, aygulrm@mail.ru.

9. P. P. Matus, L. V. Stanishevskaya, “O bezuslovnoj skhodimosti raznostnyh skhem dlya nestacionarnyh kvazilinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki”, *Differencial’nye uravneniya*, **27**:7 (1991), C. 1203-1219 (In Russ.).

10. P. P. Matus, M. N. Moskal’kov, V. S. Shcheglik, “Soglasovannye ocenki tochnosti metoda setok dlya nelinejnogo uravneniya vtorogo poryadka s obobshchennymi resheniyami”, *Differencial’nye uravneniya*, **31**:7 (1995), C. 1249-1256 (In Russ.).

11. V. S. Shcheglik, “Analiz raznostnoj skhemy, approksimiruyushchej tret’yu kraevuyu zadachu dlya nelinejnogo differencial’nogo uravneniya vtorogo poryadka”, *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, **37**:8 (1997), C. 951-957 (In Russ.).

12. B. S. Jovanovic, E. Suli, *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol.46., Springer Science & Business Media, London, 2014, 408 c.

13. B. S. Jovanovic, “Finite difference scheme for partial differential equations with weak solutions and irregular coefficients”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **4**:1 (2004), P. 48-65.

14. B. S. Jovanovic, P. P. Matus, V. S. Shchehlik, “The estimates of accuracy of difference schemes for the nonlinear heat equation with weak solutions”, *Mathematical Modelling and Analysis (MMA)*, **5**:1 (2000), P. 86-96.

15. P. P. Matus, “O korrektnosti raznostnyh skhem dlya polulinejnogo uravneniya s obobshchennymi resheniyami”, *ZHurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, **50**:12 (2010), C. 2155-2175 (In Russ.).

16. P. Matus, “On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **14**:3 (2014), P. 361-371.

17. F. V. Lubyshev, *Raznostnye approksimacii zadach optimal’nogo upravleniya sistemami, opisyvaemymi uravneniyami v chastnyh proizvodnyh*, BashGU, Ufa, 1999 (In Russ.).

18. F. V. Lubyshev, M. EH. Fajruzov, “Approksimacii zadach optimal’nogo upravleniya dlya polulinejnyh ehllipticheskih uravnenij s razryvnymi koehfficientami i sostoyaniyami, s upravleniyami v koehfficientah pri starshih proizvodnyh”, *ZHurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, **56**:7 (2016), C. 1267-1293 (In Russ.).

19. S. L. Sobolev, *Nekotorye primeneniya funkcional’nogo analiza v matematicheskoj fizike*, Izd-vo SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962 (In Russ.).

20. S. G. Mihlin, *Linejnye uravneniya v chastnyh proizvodnyh*, Vysshaya shkola, M., 1973 (In Russ.).

Submitted 30.08.2017