

УДК 517.938.5:512.721

О поверхностях, склеенных из $2n$ -угольников© В. Е. Круглов¹, Г. Н. Таланова²

Аннотация. В работе рассматриваются $2n$ -угольники и поверхности, которые получают при отождествлении сторон этих многоугольников попарно, то есть при склейке $2n$ -угольника. Как известно, склейкой некоторого $2n$ -угольника можно получить поверхность любого рода и ориентируемости, однако узнать род этой поверхности по многоугольнику и характеру склейки очень непросто, ведь для этого надо подсчитать количество вершин, образовавшихся после отождествления, а уже при малых n это практически невыполнимая задача, если делать это напрямую. Имеются различные подходы к этой задаче. Хорошо известен канонический вариант склейки $4q$ -угольника ($2q$ -угольника), дающий ориентируемую (неориентируемую) поверхность рода q . Известны также числа Харера-Цагира – числа склеек $2n$ -угольника в ориентируемую поверхность рода q . В работе мы предлагаем новый способ вычисления эйлеровой характеристики полученной поверхности (а, следовательно, рода) вне зависимости от её ориентируемости с помощью трёхцветного графа и сведений о топологической классификации замкнутых поверхностей.

Ключевые слова: $2n$ -угольник, эйлерова характеристика, ориентируемость, склейка.

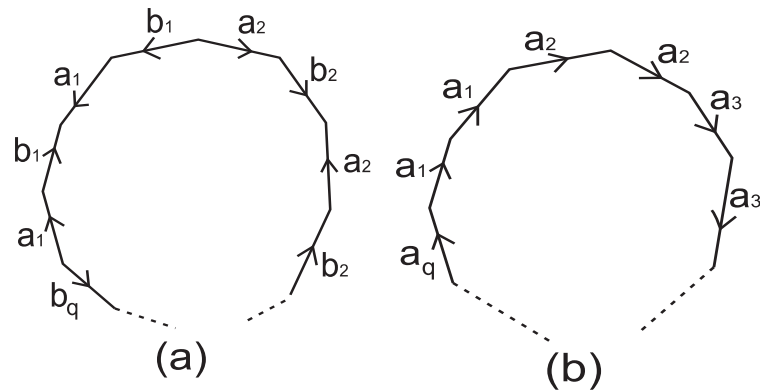
1. Введение и формулировка результатов

В работе мы рассматриваем многоугольники с чётным числом сторон и “склеенные” из них поверхности. В статье Г. Шабата и А. Сгибнева [1] подробно рассказывается, как можно получить замкнутые поверхности заданием минимального отношения эквивалентности, отождествляющего попарно стороны $2n$ -угольников. В ней приведены результаты классической работы Дж. Харера и Д. Цагира [2] о числе склеек $2n$ -угольника в ориентируемую поверхность рода q (*числа Харера-Цагира*).

Хорошо известен канонический вариант склейки $4q$ -угольника ($2q$ -угольника), дающий ориентируемую (неориентируемую) поверхность рода q , смотри Рис. 1.1 (а) (Рис. 1.1 (b)). Здесь и на всех рисунках ниже буквы и стрелки около сторон многоугольника означают следующее: у многоугольника склеиваются граничные стороны, обозначенные одинаковой буквой, при этом стрелки на сторонах указывают направление отождествления сторон. Коротко описать такую склейку можно так называемым “словом”, состоящим из всех букв, встречающихся при обходе границы многоугольника по часовой стрелке, при этом к букве добавляется -1 в верхнем индексе, если стрелка на соответствующей стороне направлена в сторону, противоположную обходу. Так склейка на Рисунке 1.1 (а) (1.1 (b)) записывается словом $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_q b_q a_q^{-1} b_q^{-1}$ ($a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_q a_q$).

¹ **Круглов Владислав Евгеньевич**, стажёр-исследователь лаборатории Топологических Методов в Динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), студент института ИТММ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovlava21@mail.ru

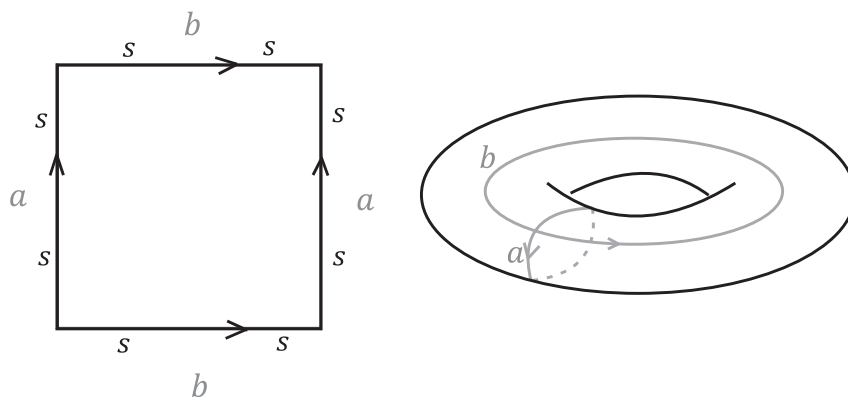
² **Таланова Галина Николаевна**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4743-4055>, Gntalanova@gmail.com



Р и с у н о к 1.1

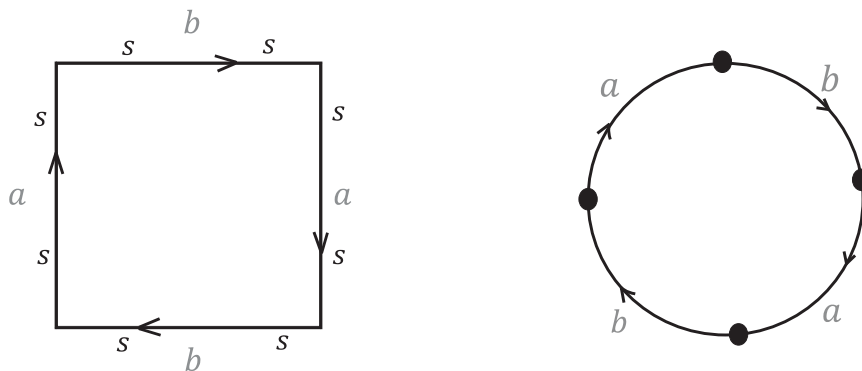
Канонические склейки $2n$ -угольников

Однако, это не единственный вариант склейки, и для разных склеек одного и того же многоугольника род поверхности может получиться различным. К примеру, из квадрата может получиться тор (см. Рис. 1.2), проективная плоскость (см. Рис. 1.3), сфера (см. Рис. 1.4), бутылка Клейна (см. Рис. 1.5).



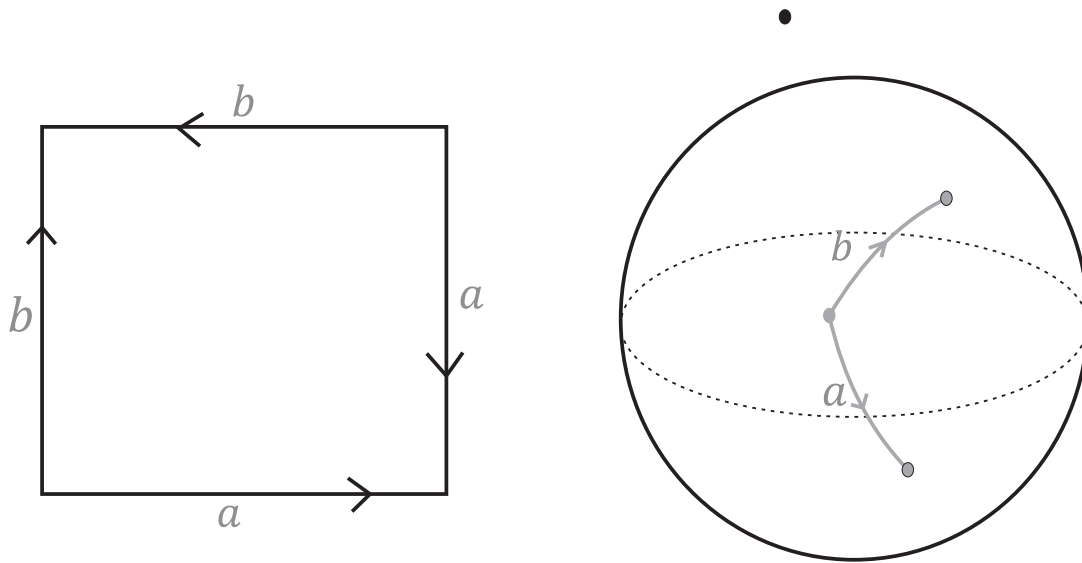
Р и с у н о к 1.2

Тор и его развёртка

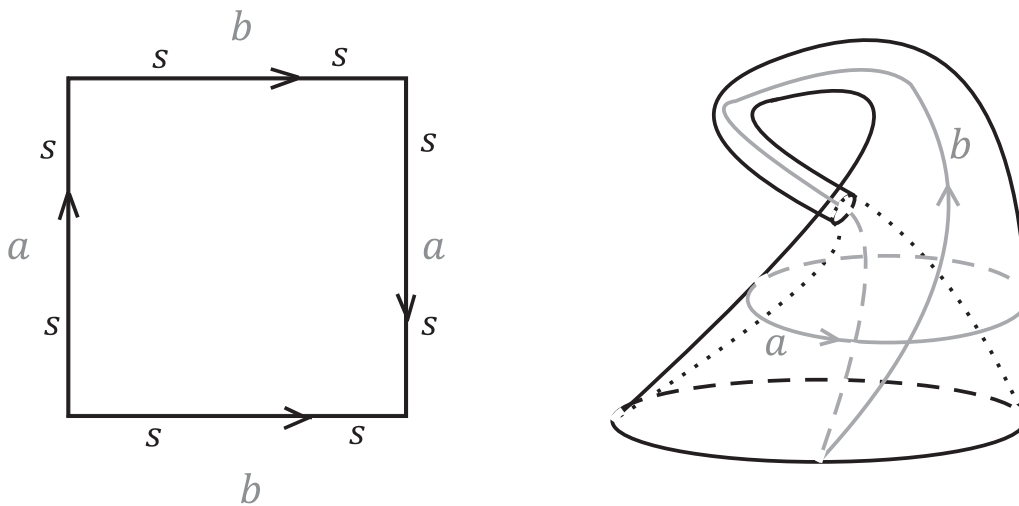


Р и с у н о к 1.3

Проективная плоскость и её развёртка



Р и с у н о к 1.4
Сфера и её развёртка



Р и с у н о к 1.5
Бутылка Клейна и её развёртка

Нетрудно понять, что наличие в слове хотя бы двух одинаковых букв aa , $a^{-1}a^{-1}$, не обязательно стоящих подряд, приводит к существованию пленки Мёбиуса на такой поверхности и, следовательно, к неориентируемости такой поверхности. Таким образом, ориентируемость поверхности по склейке определяется довольно быстро. По формуле Эйлера род поверхности q связан с числом вершин B , ребер P и граней Γ следующей формулой

$$B - P + \Gamma = 2 - 2q$$

для ориентируемой поверхности и

$$B - P + \Gamma = 2 - q$$

для неориентируемой, в этих формулах число $2 - 2q$ и $2 - q$, соответственно, — *эйлерова характеристика поверхности*. В нашем случае формулы принимают вид $B - n + 1 = 2 - 2q$,

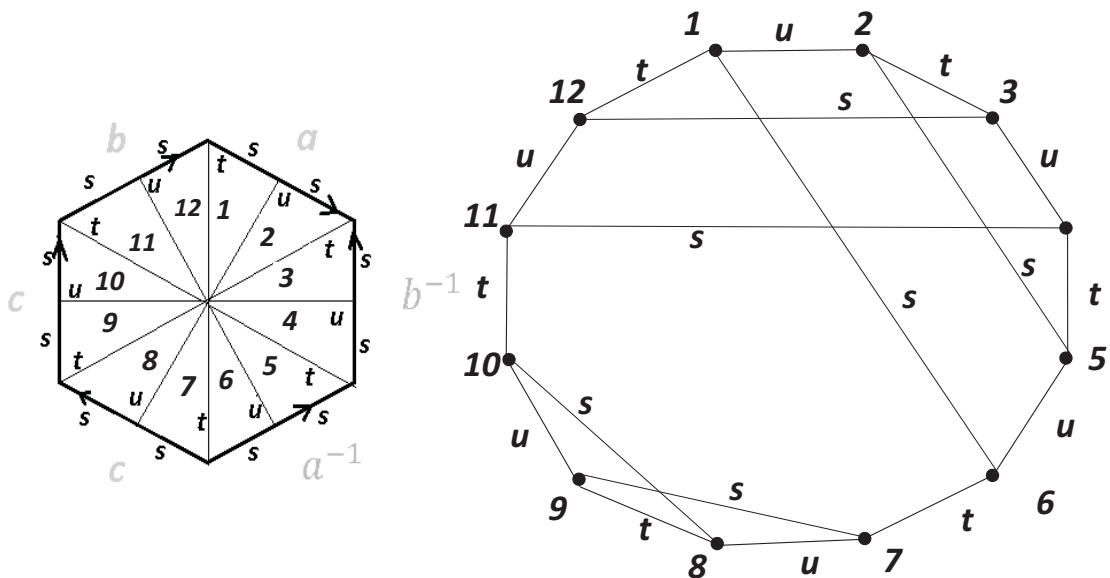
$B - n + 1 = 2 - q$ соответственно и, следовательно, задача определения рода поверхности сводится к подсчету вершин, получающихся в результате склейки. Однако сделать это не так просто, особенно для большого числа сторон. Например, уже для восьмиугольника существует 105 различных склеек его сторон и нужно хорошее пространственное воображение, чтобы при каждом склеивании сторон следить, какие вершины склеятся. В настоящей работе мы покажем, как вычислить число склеенных вершин с помощью цветных графов.

Более детально.

Обозначим через M наш $2n$ -угольник и через S поверхность, получающуюся после склейки его сторон. Соединим его центр со всеми вершинами, а соединяющие отрезки назовём t -кривыми. Затем соединим центр же с серединами всех сторон, а соединяющие отрезки назовём u -кривыми. Каждую половину стороны, отделённую вершиной многоугольника и серединой стороны, назовём s -кривой.

Заметим, что мы только что триангулировали многоугольник и, соответственно, поверхность, или разделили на *треугольные области*. Стороны треугольных областей будем называть цветными кривыми, каждая одного из трёх цветов – s , u или t (см. Рис. 1.6).

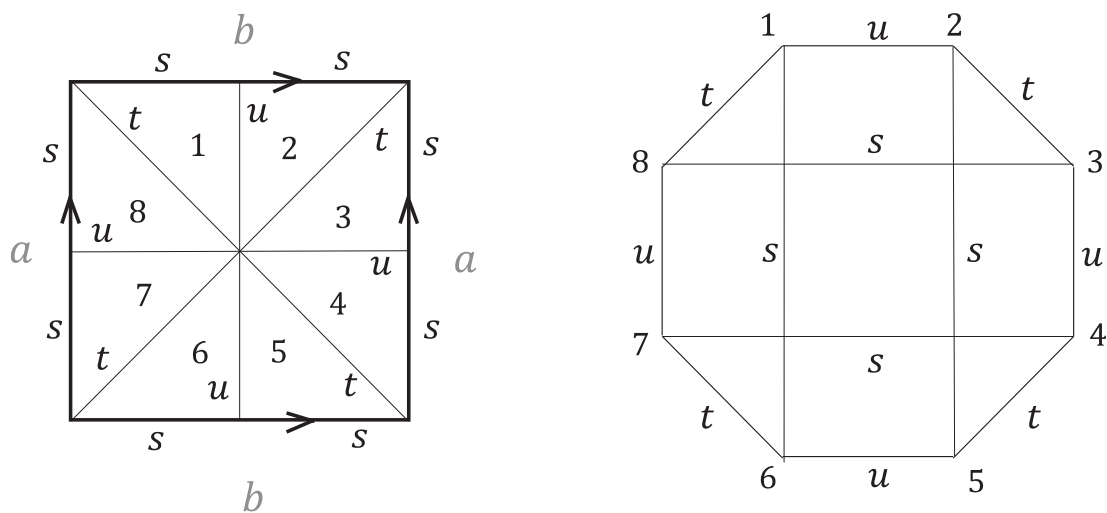
Теперь мы можем построить *трёхцветный граф* Υ . Поставим в соответствие треугольным областям вершины графа, а цветным кривым – цветные рёбра, причём ребро, соответствующее цветной кривой, имеет такой же цвет что и сторона и соединяет вершины, соответствующие треугольным областям, границам которых одновременно принадлежит цветная кривая (см. Рис. 1.6).



Р и с у н о к 1.6

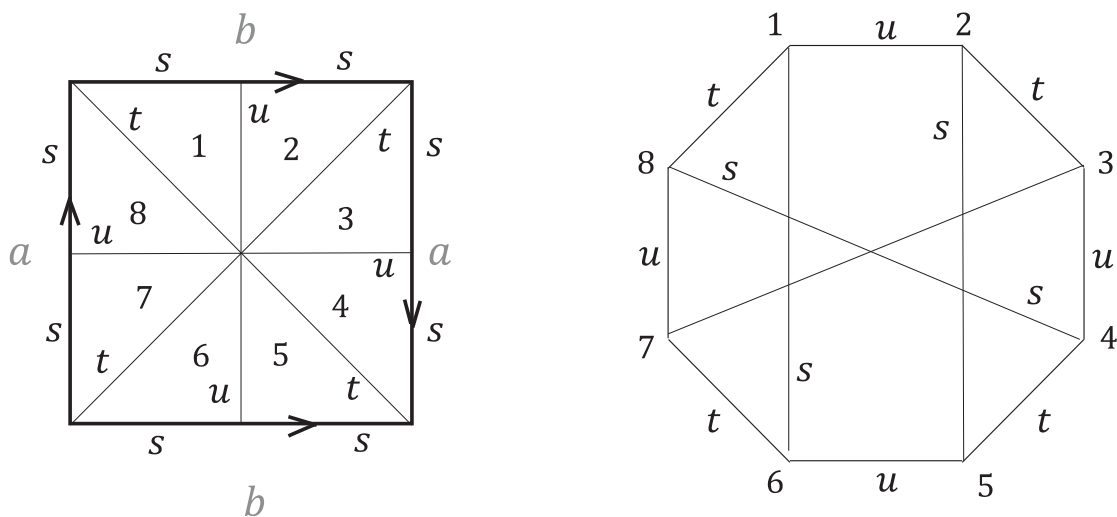
Триангуляция цветными кривыми и её трёхцветный граф

Назовём st -циклом, tu -циклом, su -циклом цикл на графе, состоящий только из рёбер цветов s и t , t и u , s и u соответственно (см. Рис. 1.7, 1.8, 1.9).



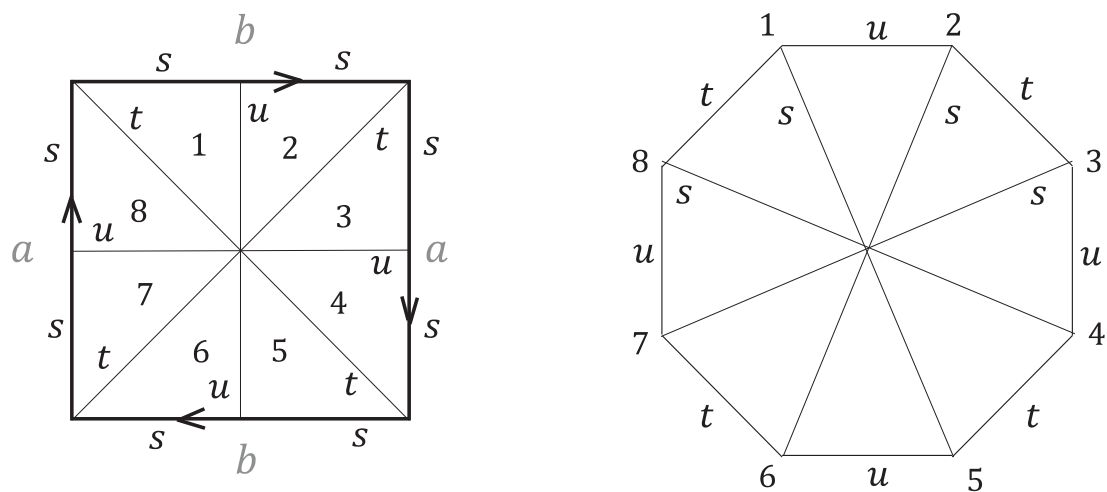
Р и с у н о к 1.7

Развёртка тора и его трёхцветный граф



Р и с у н о к 1.8

Развёртка бутылки Клейна и её трёхцветный граф



Р и с у н о к 1.9

Развёртка проективной плоскости и её трёхцветный граф

Т е о р е м а 1.1.

1. Эйлерова характеристика $\chi(S)$ поверхности S вычисляется по формуле

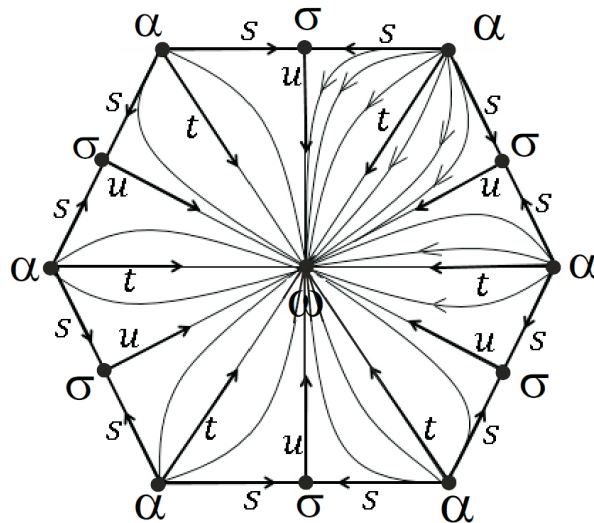
$$\chi(S) = \nu - n + 1, \quad (1.1)$$

где ν – количество st -циклов графа Γ .

2. Поверхность S ориентируема тогда и только тогда, когда в соответствующем ей графе Υ не содержится циклов нечетной длины.

2. Доказательство Теоремы 1.1.

1. Построение потока Морса на многоугольнике. Зададим градиентно-подобный поток или, что то же самое, поток Морса $f^t: S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ таким образом, что в центре лежит сток ω , в каждой вершине – источник α , в центре каждой стороны – седловая точка σ с неустойчивой сепаратрисой, лежащей на радиусе описанной окружности, и устойчивыми сепаратрисами, лежащими на сторонах M (Рис. 2.1); при таком расположении особых траекторий неустойчивые сепаратрисы седловых точек совпадут с u -кривыми, устойчивые – с s -кривыми, а с t -кривыми совпадут обычные траектории, идущие из источника в сток. Сделаем мы это следующим образом (основанным на способе, описанном в [4]).

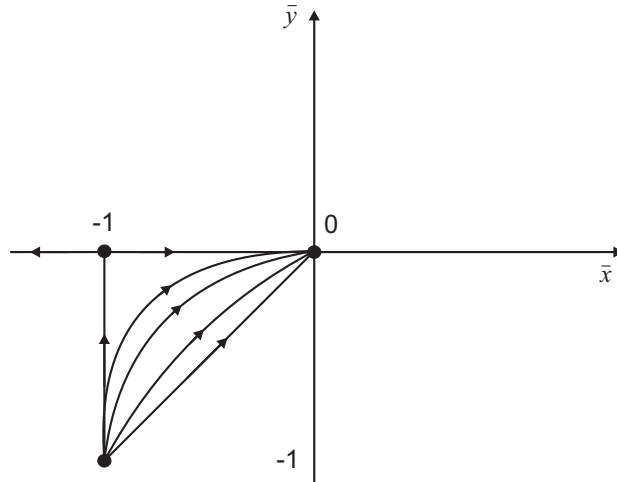


Р и с у н о к 2.1

Поток f^t

Рассмотрим векторное поле v_0 на плоскости, определяемое формулой $v_0 = (\sin \pi x, \sin \pi y)$. Это поле является полем Морса. Его особые точки – это все точки целочисленной решётки (x, y) , из них точки с двумя чётными координатами – источники, с двумя нечётными – стоки, а с координатами разной чётности – седловые точки потока, определяемого полем v_0 . Сепаратрисы параллельны осям координат, в качестве t -кривых возьмём диагонали квадратов со сторонами, лежащими на сепаратрисах. Получили разбиение на “стандартные” треугольники.

Определим гомеоморфизм $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $p(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + 1, y + 1)$ и подействуем им на поле v_0 , чтобы сток оказался в начале координат. Получили поле $\tilde{v}_0 = p(v_0)$.



Р и с у н о к 2.2
Векторное поле \tilde{v}_0

Единственный сток в нашем многоугольнике M является вершиной $4n$ треугольников. Положим T – стандартный треугольник в пространстве (\bar{x}, \bar{y}) с вершинами $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$. Расположим наш многоугольник M так, чтобы его центр лежал в начале координат, а одна из u -кривых лежала на оси Ox . Обозначим каждую треугольную область многоугольника M через δ_i , $i = \overline{1, 4n}$ таким образом, чтобы δ_1 лежала в первом квадранте и её u -кривая лежала на оси Ox . Определим гомеоморфизм $\psi_i: T \rightarrow \delta_i$ формулой

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{y}) = \psi_i(r \cos \theta, r \sin \theta) = \psi_i(r_i(r, \theta) \cos \theta_i(r, \theta), r_i(r, \theta) \sin \theta_i(r, \theta)),$$

где

$$r_i(r, \theta) = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\theta - \pi}{\frac{\pi}{4}} + r \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\frac{5}{4}\pi - \theta}{\frac{\pi}{4}},$$

$$\theta_i(\theta) = \left(i - 2 \left(\frac{i}{2} (\operatorname{mod} 1) \right) \right) \cdot \frac{\pi}{2n} + (-1)^{i-1} \frac{\theta - \pi}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{2n}.$$

Нетрудно увидеть, что гомеоморфизмы ψ_i меняют величину угла при начале координат до величины угла между u -кривой и t -кривой, разворачивают треугольник на i -е место и меняют величины сторон, чтобы получился именно $2n$ -угольник, соответственно меняя и значения поля \tilde{v}_0 . Таким образом, мы задали в треугольной области δ_i векторное поле $v_i = \psi_i(\tilde{v}_0) = \psi_i(p(v_0))$. Положим, что общее поле V , определяющее поток f^t на M , равно v_i на всех его треугольных областях.

Таким образом, мы получили поток Морса f^t на замкнутой поверхности. В силу теоремы Пуанкаре-Хопфа [5], в этом случае эйлерова характеристика поверхности может быть вычислена по формуле

$$\chi(S) = \mu_0 - \mu_1 + \mu_2,$$

где μ_0 – число стоков, μ_1 – число седловых точек, μ_2 – число источников.

2. Определение числа стоков, источников и седел по графу. Множества st , tu и su -циклов графа Υ взаимно однозначно соответствуют множеству источников, множеству стоков, множеству седловых точек соответственно, причем число st -циклов ν

чётное. Всё это видно, если спроектировать граф Υ на поверхность S , ведь тогда каждый из этих циклов станет окружностью, которая пересекает траектории, причём каждое ребро пересекает единственный раз траекторию своего цвета. Кривые цветов s и t могут лежать лишь в бассейне источника и чередуются, поэтому цикл имеет чётную длину. Кривые цветов u и t могут лежать лишь в бассейне стока. А кривые s и u могут пересекать лишь седловые сепаратрисы. Более подробные рассуждения смотрите [4], где, в частности, построена топологическая классификация потоков Морса с помощью трёхцветных графов как топологических инвариантов и приведена и доказана общая формула эйлеровой характеристики несущего многообразия по трёхцветному графу потока (данная классификация осуществлялась методами, разработанными ранее в [6], [7], [8]).

Из соответствия циклов неподвижным точкам следует, что формула 1.1 является формулой суммы индексов особых точек потока f^t , что влечёт истинность доказываемого утверждения. А число вершин, получающихся в результате склейки, теперь просто равно числу st -циклов на графе.

3. Определение ориентируемости поверхности по графу. Обозначим через Δ множество треугольных областей поверхности S , через \mathcal{B} – множество вершин графа Υ , а через $\pi: \Delta \rightarrow \mathcal{B}$ функцию, осуществляющую соответствие треугольных областей и вершин графа.

Пусть поверхность S ориентируема. Ориентируем границу каждой треугольной области, выбрав один из порядков обхода её вершин; если при обходе в положительном направлении область остаётся слева, то присвоим ей метку $+1$, если справа – то -1 . Назовём функцию $\theta: \Delta \rightarrow \{-1, 1\}$ *согласованной ориентацией*, если любые две соседние многоугольные области имеют различные метки. То есть $\theta(\delta_1)\theta(\delta_2) = -1$ для различных $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ таких, что $cl(\delta_1) \cap cl(\delta_2) \neq \emptyset$. Мы полагаем S ориентируемым, поэтому согласованная ориентация существует.

Покажем, что в графе Υ все циклы имеют четную длину. Предположим противное: существует цикл $C = \{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), \dots\}$ нечётной длины k , где $\delta_k = \delta_0$. Положим $\delta_i = \pi^{-1}(b_i), i = 0, k-1$. Тогда из условия $\theta(\delta_1) \cdot \theta(\delta_2) = -1$ следует, что $\theta(\delta_i) \cdot \theta(\delta_{i+1}) = -1$. Отсюда $\theta(\delta_0) = -\theta(\delta_1) = -(-\theta(\delta_2)) = \dots = (-1)^{k-1}\theta(\delta_{k-1}) = (-1)^k\theta(\delta_k)$. Таким образом, $\theta(\delta_0) = -\theta(\delta_0)$: пришли к противоречию.

Обратно, пусть все циклы графа Υ имеют чётную длину. Введём согласованную ориентацию θ следующим образом. Пусть $\delta_0 \in \Delta$ – произвольная треугольная область. Положим $\theta(\delta_0) = +1$ и $b_0 = \pi(\delta_0)$. Для любой области $\delta \in \Delta$ положим $b = \pi(\delta)$. Поскольку граф связан, то в нём существует путь $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b)$ длины k . Положим $\theta(\delta) = (-1)^k$. Так как все циклы графа имеют четную длину, то длины всех путей, соединяющих вершины b_0 и b имеют одинаковую чётность. Следовательно, отображение θ корректно определено.

Благодарности. Построение потока на многоугольнике выполнено в рамках проекта № 17-11-01041 РНФ, формула эйлеровой характеристики поверхности найдена в рамках проекта ГЗ-90 ЦФИ ВШЭ. Авторы благодарят Починку О.В. за постановку задачи, внимательное прочтение рукописи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Б. Шабат, А. И. Сгибнев, “Склейки многоугольников”, *Квант*, **3** (2011), 17–22.
2. J. Harer, D. Zagier, “The Euler characteristic of the moduli space of curves”, *Inventiones mathematicae*, **85** (1986), 457–486.

3. С. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980, 269 с.
4. А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140.
5. Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология. Начальный курс.*, М: Мир, 1972, 223 с.
6. Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251–257.
7. Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.
8. М. Peixoto, *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971.

Поступила 2.09.2017

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

On surfaces glued of $2n$ -gons

© V. E. Kruglov³, G. N. Talanova⁴

Abstract. In this paper $2n$ -gons and surfaces obtained through identification of $2n$ -gon's sides in pairs (i.e. through sewing) are considered. As well-known, one can get surface of any genus and orientability through sewing but it's very uneasy to calculate by only the polygon and the way of sewing, because to do this one need to calculate the number of vertices appearing after identification; even for small n the problem is almost impossible if one want to do this directly. There are different ways to solve the task. The canonical variant of $4q$ -gon sewing ($2q$ -gon sewing) giving an orientable (unorientable) surface of genus q is well-known, as the Harer-Zagier' numbers, that are the numbers of variants of sewing a $2n$ -gon to an orientable surface of gunes q . In this paper we offer a new way of Euler characteristic's of obtained surface calculation (and, hence, its genus) undepending on its orientability by means of three-colour graph and information about closed surfaces topological classification.

Key Words: $2n$ -gon, Ejler characteristic, orientability, sewing

REFERENCES

1. G. B. Shabat, A. I. Sgibnev, "Sewings of polygons", *Kvant*, **3** (2011), 17–22 (In Russ.).
2. D. Zagier, J. Harer, "The Euler characteristic of the moduli space of curves", *Inventiones mathematicae*, **85** (1986), 457–486 (In Eng.).
3. C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980 (In Eng.), 269 p.
4. A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, "About classification of Morse-Smale flows on 2-manifolds", *Matematicheskiiy sbornik*, **189**:8 (1998), 93–140 (In Russ.).
5. J. Milnor, A. Wallace, *Differential TopologMilnorWallacey: a First Steps*, M: Mir, 1972 (In Russ.), 223 p.
6. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, "About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories", *Dokl. Akad. AN SSSR*, **14**:5 (1937), 251–257 (In Russ.).
7. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, "About scheme determining topological structure of partition into trajectories", *Dokl. Akad. AN SSSR*, **103**:4 (1955), 557–560 (In Russ.).
8. M. Peixoto, *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil, 1971 (In Eng.).

Submitted 2.09.2017

³ **Vladislav E. Kruglov**, Trainee Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya Ulitsa 25/12, 603155 Nizhniy Novgorod, Russia), student of Institute ITMM, Lobachevsky State University (Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) 23, 603950 Nizhniy Novgorod, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovlava21@mail.ru

⁴ **Galina N. Talanova**, student of informatics, mathematics and computer sciences faculty, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya Ulitsa 25/12, 603155 Nizhniy Novgorod, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4743-4055>, Glntalanova@gmail.com