DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.076-084

УДК 517.925.42, 517.925.53, 517.928.7

К проблеме существования интегральных многообразий системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных

© М. И. Купцов [1], М. Т. Терехин [2], В. В. Теняев [3]

Аннотация. Рассматривается задача нахождения локального ненулевого интегрального многообразия нелинейной $(n+m)$ -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Предполагается, что у изучаемой системы имеется n-мерное тривиальное интегральное многообразие при всех значениях параметра, а соответствующая линейная подсистема имеет m-параметрическое семейство периодических решений. Это означает, в частности, что линейная система не обладает свойством экспоненциальной дихотомии. Допускается, что матрица линейного приближения системы при нулевом значении параметра является функцией от независимой переменной. Проблема существования интегрального многообразия сводится к проблеме разрешимости операторных уравнений в пространстве ограниченных Липшиц-непрерывных периодических вектор-функций. Для доказательства наличия интегрального многообразия исходная система подвергается линеаризации, к которой применяется метод преобразующей матрицы. Метод преобразующей матрицы удается распространить в том числе и на случай отсутствия линейных по параметру членов операторных уравнений. Получены достаточные условия существования в окрестности состояния равновесия системы n-мерного ненулевого периодического интегрального многообразия.

Ключевые слова: метод преобразующей матрицы, интегральное многообразие, система обыкновенных дифференциальных уравнений, операторное уравнение, уменьшение размерности фазового пространства.

1. Введение

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f(\nu, y, \dot{y}, t) = 0 \tag{1.1}$$

для любых ν, t имеет состояние равновесия $y = 0$ и в области Λ ее решения существуют и единственны. Здесь и далее f, y, ν – $(n+m)$-векторы, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $f(\nu, y, \dot{y}, t+T) \equiv f(\nu, y, \dot{y}, t)$, $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \{y : \|y\| \leqslant \Delta_1\} \subset R^{n+m}$, $\Lambda_2 = \{\nu : \|\nu\| \leqslant \Delta_2\} \subset R^{n+m}$, Δ_1, Δ_2 - константы, R^p - стандартное евклидово пространство размерности p и $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^p.

[1] **Купцов Михаил Иванович**, начальник кафедры математики и информационных технологий управления, ФКОУ ВО "Академия ФСИН России" (390000, Россия, Рязанская область, г. Рязань, ул. Сенная, д. 1.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6814-6423, kuptsov_michail@mail.ru.

[2] **Терехин Михаил Тихонович**, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина (390000, Россия, Рязанская область, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5657-0155, m.terehin@rsu.edu.ru.

[3] **Теняев Виктор Викторович**, заместитель начальника кафедры математики и информационных технологий управления, Академия ФСИН России, ФКОУ ВО "Академия ФСИН России" (390000, Россия, Рязанская область, г. Рязань, ул. Сенная, д. 1.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3359-7152, tenyaevvv@yandex.ru.

Предположим, что замена переменных

$$y = \Gamma(\varepsilon, x, \phi, t),\ \ \nu = \xi(\varepsilon) \tag{1.2}$$

систему (1.1) приводит к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = X(\varepsilon,x,\phi,t) \cdot x, \\ \dot{\phi} = \Phi(\varepsilon,x,\phi,t), \end{cases} \tag{1.3}$$

где Γ, ξ, ε — $(n+m)$-векторы, X — $(n \times n)$-матрица, x — n-вектор, ϕ, Φ — m-векторы, $\Gamma(\varepsilon, x, \phi, t) \neq 0$ при $x \neq 0$, $\Gamma(\varepsilon, 0, \phi, t) \equiv 0$. Кроме того, будем полагать, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = X(0, 0, \phi,t) \cdot x, \\ \dot{\phi} = \Phi(0, 0, \phi,t), \end{cases} \tag{1.4}$$

имеет m-параметрическое семейство ненулевых kT-периодических решений $x = x(\phi_0, t)$, $\phi = \phi(\phi_0, t)$.

Будем говорить, что у системы (1.1) существует n-мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие $\chi(\phi_0, t)$, если для всех ϕ_0 найдется такое значение $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ параметра ν, при котором

$$f(\xi(\varepsilon_0), \Gamma(\varepsilon_0, \chi(\phi_0, t), \dot{\Gamma}(\varepsilon_0, \chi(\phi_0, t), \phi^{\chi}(\phi_0, t), t), \phi^{\chi}(\phi_0, t), t), t) \equiv 0,$$

причем $\chi(\phi_0,\ t)$ не обращается в ноль ни при каких значениях ϕ_0 и t, является ω-периодическим по компонентам m-вектора ϕ_0, kT-периодическим по t, где k — натуральное число, $\phi = \phi^{\chi}(\phi_0,\ t)$ определяет интегральную кривую на многообразии. Задача существования нетривиального периодического интегрального многообразия системы (1.1) вблизи ее состояния равновесия и решается в данной работе.

Общий подход к решению поставленной задачи, разработанный Н.Н. Боголюбовым, Ю.А. Митропольским и А.М. Самойленко [1] – [4], состоит в построении функции Грина и успешно применяется для многих систем вида (1.3) (см., например, [5], [6]). Однако в данном случае этот подход реализовать не удается, поскольку система (1.3) при всех значениях параметра ε имеет нулевое интегральное многообразие $x = 0$, а система (1.4) — m-параметрическое семейство периодических решений. Указанные условия удается обойти лишь с помощью нахождения решения вспомогательного векторного (бифуркационного) уравнения и перехода в его окрестность [7], [8].

Изложенные в данной работе результаты получены на основе модификации предложенного в [9] метода преобразующей матрицы, применение которого позволили получить новые достаточные условия существования локального интегрального многообразия для систем более общего вида, чем рассматриваемые в работах [10] – [13].

2. Основные обозначения и определения

Пусть $F(\phi,\ t) \in \Omega_1$, $\varepsilon(\phi) \in \Omega_2$ — ω–периодические по компонентам вектора ϕ ограниченные соответственно числами δ_{10} и δ_{20} вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$\|F(\phi_1,\ t_1) - F(\phi_2,\ t_2)\| \leqslant \delta_{11} \|\phi_1 - \phi_2\| + \delta_{12} |t_1 - t_2|, \tag{2.1}$$

$$\|\varepsilon(\phi_1) - \varepsilon(\phi_2)\| \leqslant \delta_{21} \|\phi_1 - \phi_2\|, \tag{2.2}$$

имеющие соответственно размерность n и l, $0 < l \leqslant n+m$, $F(\phi,\ t)$ kT –периодическая по t, $\|F(\phi,\ t)\| = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{\substack{\phi_i \in [0,\ \omega] \\ t \in [0,\ kT]}} |F_i(\phi,\ t)|\right]^{1/2}$, $\|\varepsilon(\phi)\| = \left[\sum\limits_{i=1}^{l} \sup\limits_{\phi_i \in [0,\ \omega]} |\varepsilon_i(\phi)|\right]^{1/2}$. Отметим, что если для множеств Ω_i ввести указанную норму, то они становятся выпуклыми компактами [9, с.15].

Для решения дифференциального уравнения

$$\dot{\phi} = \Phi(\varepsilon(\phi_0),\ F(\phi_0,\ t),\ \phi,\ t), \tag{2.3}$$

удовлетворяющего начальным данным $\phi(0) = \phi_0$, примем обозначение ϕ_t^F. Пусть, кроме того, $Y_\varepsilon^F(\phi_0,\ t)$ — матрицант уравнения

$$\dot{x} = X(\varepsilon(\phi_0),\ F(\phi_0,\ t),\ \phi_t^F,\ t) \cdot x. \tag{2.4}$$

Здесь и далее $F(\phi_0,\ t) \in \Omega_1$, $n+m-l$ значений компонентов вектора ε приняты равными 0, а вместо оставшихся l значений в уравнения системы (1.3) подставлены элементы функции $\varepsilon(\phi_0) \in \Omega_2$.

Определение 2.1. *Неособенную функциональную $n \times n$ – матрицу $Q_\varepsilon^F(\phi_0)$ с постоянным определителем, непрерывную по всем своим переменным и ω–периодическую по компонентам вектора ϕ_0, будем называть преобразующей матрицей системы* (1.3), *если у матрицы*

$$(Y_\varepsilon^F(\phi_0,\ kT) - I_n) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) \tag{2.5}$$

существует, по крайней мере, один столбец $q_\varepsilon^F(\phi_0) \not\equiv 0$. Здесь I_n – единичная $n \times n$–матрица.

Обозначим $\mathrm{X} = \{x : \|x\| \leqslant \delta_1\} \subset R^n$, $\mathrm{E} = \{\varepsilon : \|\varepsilon\| \leqslant \delta_2\} \subset R^{n+m}$.

3. Теорема о существовании интегрального многообразия

Здесь и далее мы предполагаем, что правые части системы (1.3) являются ω–периодическими по компонентам вектора ϕ и T–периодическими по независимой переменной $t \in R$, непрерывны и обеспечивают существование и единственность решений системы (1.3) в области $R^{m+1} \times \mathrm{X} \times \mathrm{E}$ при достаточно малых δ_1 и δ_2. Иначе говоря, мы полагаем, что замена переменных (1.2) сохраняет свойства существования и единственности решений системы (1.1).

Введем в рассмотрение систему уравнений

$$\begin{cases} q_\varepsilon^F(\phi_0) = 0, \\ \displaystyle\int_0^{kT} \Phi(\varepsilon(\phi_0),\ F(\phi_0, t),\ \phi_t^F,\ t)\, dt = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть преобразующую матрицу системы* (1.3) *удается построить так, что существуют такое число l ($0 < l \leqslant n+m$) и такой столбец $q_\varepsilon^F(\phi_0)$, при которых для нахождения решения системы* (3.1) *достаточно найти решение некоторой, вообще говоря, отличной от* (3.1) *системы l уравнений*

$$S_\varepsilon^F(\phi_0) = 0, \tag{3.2}$$

имеющей для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ *единственное решение* $\varepsilon^F(\phi_0) \in \Omega_2$.

Кроме того, пусть при $t \in [0; kT]$ *выполнено:*

$$\left\|Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0)\right\| \leqslant r_0, \tag{3.3}$$

$$\left\|Y_\varepsilon^F(\phi_0^*,\ t^*) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0^*) - Y_\varepsilon^F(\phi_0,\ t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0)\right\| \leqslant r_1 \left\|\phi_0^* - \phi_0\right\| + r_2 \left|t^* - t\right|. \tag{3.4}$$

Тогда для любого вектора $\phi_0 \in R^m$ *можно указать такое значение параметра* ν, *что система* (1.1) *будет иметь ненулевое интегральное многообразие в окрестности состояния равновесия* $y = 0$.

4. Доказательство теоремы о существовании интегрального многообразия

1. Поскольку $\varepsilon = \varepsilon^F(\phi_0)$ является решением системы (3.2), то, значит, при $\varepsilon = \varepsilon^F(\phi_0)$ в тождество обращается и выражение (3.1). Следовательно, дифференциальное уравнение (2.4) для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ имеет kT–периодическое решение

$$x^F(\phi_0,\ t) = Y_\varepsilon^F(\phi_0,\ t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) \cdot C, \tag{4.1}$$

где все элементы постоянного n–вектора C равны нулю, кроме элемента, соответствующего номеру столбца $q_\varepsilon^F(\phi_0)$, который равен c — произвольной константе. Неособенность преобразующей матрицы обеспечивает нетривиальность $x^F(\phi_0, t)$.

2. Согласно условиям (3.3) и (3.4), $x^F(\phi_0,\ t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $r_1 \cdot c$ по переменной ϕ_0 и $r_2 \cdot c$ по t, ограничено числом $r_0 \cdot c$. Значит, за счет уменьшения с всегда можно добиться выполнения $x^F(\phi_0, t) \in \Omega_1$.

3. Таким образом, мы построили оператор, определяемый равенствами (3.2) и (4.1), к которому, в силу единственности значения $\varepsilon^F(\phi_0)$ для каждой функции $F(\phi_0,\ t) \in \Omega_1$, можно применить теорему [14, с.26] (или теорему 1.3 [9, с.20]). Следовательно, у этого оператора существует неподвижная точка $\Psi(\phi_0,\ t) = Y_\varepsilon^\Psi(\phi_0,\ t) \cdot Q_\varepsilon^\Psi(\phi_0) \cdot C$.

4. Ясно, что при $\varepsilon = \varepsilon^\Psi(\phi_0)$ функции $\Psi(\phi_0,\ t)$, ϕ_t^Ψ определяют семейство ненулевых kT–периодических решений системы (1.3). Действительно, для того, чтобы убедится в этом, достаточно принять во внимание обращение в тождество уравнения (3.1) и продифференцировать $\Psi(\phi_0,\ t)$, учитывая, что функция ϕ_t^Ψ удовлетворяет уравнению (2.3).

5. Для завершения доказательства теоремы остается вернуться к системе (1.1) с помощью замены (1.2). Итак, $\Psi(\phi_0,\ t)$ – искомое n–мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие системы (1.1), что и требовалось доказать.

5. Один пример системы, удовлетворяющей условиям теоремы о существовании интегрального многообразия

В качестве иллюстрации использования теоремы 3.1. рассмотрим систему специального вида, к которой не может быть применен ни один из достаточных признаков существования интегральных многообразий из работ [1] – [14].

П р и м е р 5.1. *Пусть в систему трех дифференциальных уравнений*

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1 - [\cos t + {\varepsilon_1}^2 - {\varepsilon_2}^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - {\varepsilon_3}^4 - {y_1}^2 \cdot {y_3}^2] \cdot y_1 = 0, \\ ({y_2}^2 + {y_3}^2) u(\varepsilon, y, \dot{y}, t) - 4{y_1}^2{y_2}^2{y_3}^2 = 0, \\ y_2 \cdot \dot{y}_3 - y_3 \cdot \dot{y}_2 - [\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2] \cdot ({y_2}^2 + {y_3}^2) = 0, \end{array}\right. \tag{5.1}$$

входит только одна векторная величина $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ *и* $u(\varepsilon, y, \dot{y}, t) = y_3\dot{y}_2 + y_2\dot{y}_3 + (\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2)({y_3}^2 - {y_2}^2) - 2(\sin t + \alpha_1(\varepsilon))y_2y_3$,

$$\alpha_i(\varepsilon) = a_{i1}\cdot\varepsilon_1 + a_{i2}\cdot\varepsilon_2 + a_{i3}\cdot\varepsilon_3 + \bar{\alpha}_i(\varepsilon), \bar{\alpha}_i(\varepsilon) = o(\|\varepsilon\|), a_{12}\cdot a_{23} \neq a_{13}\cdot a_{22}.$$

Будем также полагать, что для выражений $\bar{\alpha}_i(\varepsilon)$ *выполнены условия Липшица с такими постоянными* γ_i, *для которых* $\gamma_i \to 0$ *при* $\delta_{20} \to 0$ *(см. п. 2.). После замены переменных* $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2\cdot\cos\phi$, $y_3 = x_2\cdot\sin\phi$, *уравнения* (5.1) *преобразуются к виду* (1.3)*:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[\cos t + {\varepsilon_1}^2 - {\varepsilon_2}^4\cdot(1+\sin^2 t) - {\varepsilon_3}^4 - {x_1}^2\cdot{x_2}^2\cdot\sin^2\phi\right]\cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = \left[\sin t + \alpha_1(\varepsilon) + {x_1}^2\cdot\sin 2\phi\right]\cdot x_2, \\ \dot{\phi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + x_2\cdot\cos\phi. \end{cases}$$

Тогда система (1.4) *здесь состоит из трех уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos t\cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = \sin t\cdot x_2, \\ \dot{\phi} = \cos 2t \end{cases}$$

и имеет однопараметрическое ($m = 1$) *семейство* 2π *–периодических решений* $x_1 = e^{\sin\, t}$, $x_2 = e^{1-\cos\, t}$, $\phi = \phi_0 + 0,5\cdot\sin 2t$.

Вместо уравнений (2.3) *и* (2.4) *будут соответственно рассматриваться*

$$\dot{\phi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon(\phi_0)) + F_2(\phi_0,\ t)\cdot\cos\phi, \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\cos t + X_1(\phi_0,\ t)]\cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = [\sin t + X_2(\phi_0,\ t)]\cdot x_2, \end{cases} \tag{5.3}$$

где

$$X_1(\phi_0,\ t) = {\varepsilon_1}^2(\phi_0) - {\varepsilon_2}^4(\phi_0)\cdot(1+\sin^2 t) - {\varepsilon_3}^4(\phi_0) - {F_1}^2(\phi_0,\ t)\cdot{F_2}^2(\phi_0,\ t)\cdot\sin^2(\phi_t^F),$$

$$X_2(\phi_0,\ t) = \alpha_1(\varepsilon(\phi_0)) + {F_1}^2(\phi_0,\ t)\cdot\sin(2\phi_t^F),$$

причем

$$F(\phi_0,\ t) = (F_1(\phi_0,\ t), F_2(\phi_0,\ t))^T,$$

$\varepsilon(\phi_0) = (\varepsilon_1(\phi_0),\ \varepsilon_2(\phi_0),\ \varepsilon_3(\phi_0))^T$ – 2π *–периодические по* ϕ_0, *а* $F(\phi_0,\ t)$ *и по* t.

Кроме того, в силу свойств правых частей системы (5.1), *решение* ϕ_t^F *уравнения* (5.2) *ограничено, удовлетворяет условию Липшица по всем своим переменным при* $t \in [0,\ 2\pi]$ *и* 2π *–периодическое по начальным данным* ϕ_0. *Тогда матрицант уравнения* (5.3) *представляет собой диагональную матрицу*

$$Y_\varepsilon^F(\phi_0,\ t) = diag\left(\exp\left[\sin t + \int_0^t X_1(\phi_0,\ \tau)\,d\tau\right], \exp\left[1 - \cos t + \int_0^t X_2(\phi_0,\ \tau)\,d\tau\right]\right)$$

и обладает точно такими же свойствами (см., например, [9, с.29]*).*

Выбирая теперь преобразующую матрицу $Q_\varepsilon^F(\phi_0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *для выражения* (2.5) *получаем*

$$\left(Y_\varepsilon^F(\phi_0,\ 2\pi) - I_2\right)\cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) = \begin{pmatrix} \exp\left[\int_0^{2\pi} X_1(\phi_0,\ \tau)\,d\tau\right] - 1 & 0 \\ \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0,\ \tau)\,d\tau\right] - 1 & \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0,\ \tau)\,d\tau\right] - 1 \end{pmatrix}.$$

Положив тогда в условиях теоремы о существовании интегрального многообразия $l = 3$ *и*

$$q_{\varepsilon}^{F}(\phi_0) = \left(\exp\left[\int_0^{2\pi} X_1(\phi_0,\ \tau)\, d\tau\right] - 1, \ \ \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0,\ \tau)\, d\tau\right] - 1 \right),$$

для системы (3.1) *получим представление*

$$\begin{cases} \exp\left[\int_0^{2\pi} X_1(\phi_0,\ \tau)\, d\tau\right] = 1, \\ \exp\left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0,\ \tau)\, d\tau\right] = 1, \\ \alpha_2(\varepsilon(\phi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\phi_0,\ \tau) \cdot \cos\phi_\tau^F\, d\tau = 0. \end{cases}$$

Значит, в качестве системы (3.2) *достаточно рассмотреть систему трех уравнений*

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\phi_0) \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{{\varepsilon_2}^4(\phi_0) \cdot 3\pi + {\varepsilon_3}^4(\phi_0) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} {F_1}^2(\phi_0,\ \tau) \cdot {F_2}^2(\phi_0,\ \tau) \cdot \sin^2(\phi_\tau^F)\, d\tau}, \\ \alpha_1(\varepsilon(\phi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} {F_1}^2(\phi_0,\ \tau) \cdot \sin(2\phi_\tau^F)\, d\tau = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon(\phi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\phi_0,\ \tau) \cdot \cos\phi_\tau^F\, d\tau = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

В силу условия $a_{12} \cdot a_{23} \neq a_{13} \cdot a_{22}$ *матрица* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ *будет неособенной и систему* (5.4) *можно записать в виде:*

$$\varepsilon(\phi_0) = \mathrm{A}^{-1} \cdot y^{F,\varepsilon}(\phi_0), \tag{5.5}$$

где

$$y^{F,\varepsilon}(\phi_0) = (\ y_1^{F,\varepsilon}(\phi_0),\ \ y_2^{F,\varepsilon}(\phi_0),\ \ y_3^{F,\varepsilon}(\phi_0)\ )^T,$$

$$y_1^{F,\varepsilon}(\phi_0) = {}^1\!\big/\!\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{{\varepsilon_2}^4(\phi_0) \cdot 3\pi + {\varepsilon_3}^4(\phi_0) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} {F_1}^2(\phi_0,\ \tau) \cdot {F_2}^2(\phi_0,\ \tau) \cdot \sin^2(\phi_\tau^F)\, d\tau},$$

$$y_2^{F,\varepsilon}(\phi_0) = -\bar{\alpha}_1(\varepsilon(\phi_0)) - {}^1\!/_{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} {F_1}^2(\phi_0,\ \tau) \cdot \sin(2\phi_\tau^F)\, d\tau,$$

$$y_3^{F,\varepsilon}(\phi_0) = -\bar{\alpha}_2(\varepsilon(\phi_0)) - {}^1\!/_{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_2(\phi_0,\ \tau) \cdot \cos\phi_\tau^F\, d\tau.$$

Путем уменьшения чисел δ_{ij} *(см. п. 2.) легко убедиться, что оператор, задающий уравнение* (5.5)*, является сжимающим и для каждой функции* $F(\phi_0,\ t) \in \Omega_1$ *переводит пространство* Ω_2 *в* Ω_2 *. Этим фактом окончательно устанавливается выполнение всех условий теоремы 3.1. и, значит, существование локального ненулевого интегрального многообразия системы* (5.1).

В заключение отметим, что $\alpha_i(\varepsilon)$ *можно выбрать таким образом, чтобы система алгебраических уравнений вида*

$$\begin{cases} {\varepsilon_1}^2 - 1,5 \cdot {\varepsilon_2}^4 - {\varepsilon_3}^4 = 0, \\ \alpha_1(\varepsilon) = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

не имела нетривиальных решений, а матрица A *оставалась неособенной. Действительно, это выполняется, например, при* $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ *,* $\alpha_2(\varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ *и, следовательно, ни один из достаточных признаков существования интегральных многообразий не только из работ* [1] – [8]*, но и из* [9] – [13] *не может быть приложен к системе* (5.1).

Список литературы

1. Н. Н. Боголюбов, *О некоторых статистических методах в математической физике*, АН УССР, Львов, 1945, 139 с.
2. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, *Интегральные многообразия в нелинейной механике*, Наука, М., 1973, 512 с.
3. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы*, Наука, М., 1987, 301 с.
4. А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський , К. В. Пасюк, "Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь", *Нелінійні коливання*, **13**:2 (2010), 253–271.
5. С. З. Курбаншоев, М. А. Нусайриев, "Построение оптимальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений", *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*, **57**:11-12 (2014), 807–812.
6. Е. В. Щетинина, "Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости", *Вестник Самарского государственного университета*, **6** (2010), 93–105.
7. Ю. Н. Бибиков, *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации*, Изд-во ЛГУ, Л., 1991, 142 с.
8. Д. Ю. Волков, "Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии нулевых характеристических чисел", *Вестник Ленинградского университета*, **1**:2 (1988), 102–103.
9. М. И. Купцов, *Существование интегральных многообразий и периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, УдГУ. Ижевск, 1997, 133 с.
10. М. И. Купцов, "Локальное интегральное многообразие систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра", *Дифференциальные уравнения*, **35**:11 (1999), 1579–1580.

11. М. И. Купцов, “Об условиях существования интегрального многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных”, *Труды средневолжского математического общества*, **2**:1 (1999), 95–96.

12. М. И. Купцов, “Существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **34**:6 (1998), 855–855.

13. M. I. Kuptsov, “Local integral manifold of a system of differential equations”, *Differential equations*, **34**:7 (1998), 1005–1007.

14. М. Т. Терехин, *Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, РГПИ, Рязань, 1992, 88 с.

Поступила 2.04.2017

MSC2010 34A34, 34C25, 34C45

To the problem of existence of integral manifolds systems of differential equations not solved with respect to derivatives

© **M. I. Kuptsov** [4], **M. T. Terekhin** [5], **V. V. Tenyaev** [6]

Abstract. The issue of the article is finding a local non-zero integral manifold of a nonlinear $(n+m)$-dimensional system of ordinary differential equations that is not solved with respect to derivatives. It is assumed that the examined system has n-dimensional trivial integral manifold for all parameter values and that corresponding linear subsystem has the m-parametric family of periodic solutions. In particular it means that the linear system does not have the property of exponential dichotomy. It is allowed for the linear approximation matrix to be a function of independent variable when the parameter value is zero. The problem of existence of integral manifolds is reduced to the issue of operator equations' solution in the space of bounded Lipschitz-continuous periodic vector functions. Linearization is used to prove the existence of integral manifolds of the original system; the method of transforming matrix is used here. This method may be extended on the case of absence of a linearity in the parameter of the operator equations members. The sufficient conditions of existence of n-dimensional nonzero periodic integral manifold in the neighborhood of the equilibrium state of the system were obtained.
Key Words: the method of transforming matrix, integral manifold, ordinary differential equations' system, operator equation, dimensional reduction of phase space.

References

[4] **Michail I. Kuptsov**, Head of the Department of Mathematics and Information Technology, The Academy of Law Management of the Federal Penal Service of Russia, (1 Sennaya Str., Ryazan 390000, Ryazan Region, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6814-6423, kuptsov_michail@mail.ru.

[5] **Michail T. Terekhin** Professor of the Department of mathematics and methods of teaching of mathematical disciplines, Ryazan State University S.A. Esenin (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Ryazan Region, Russia), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5657-0155, m.terehin@rsu.edu.ru.

[6] **Victor V. Tenyaev**, Deputy Head of the Department of Mathematics and Information Technology, The Academy of Law Management of the Federal Penal Service of Russia (1 Sennaya Str., Ryazan 390000, Ryazan Region, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3359-7152, tenyaevvv@yandex.ru.

1. N. N. Bogolyubov, *O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoi fizike [About some statistical methods in mathematical physics]*, Akad. Nauk Ukr. Sov. Sots. Resp., Lvov, 1945 (In Russ.), 139 p.

2. Yu.A. Mitropol'skii, O.B. Lykova, *Integral'nye mnogoobraziya v nelineinoi mekhanike [Integral manifolds in nonlinear mechanics]*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ.), 512 p.

3. A.M. Samoilenko, *Elementy matematicheskoi teorii mnogochastotnykh kolebanii. Invariantnye tory [The elements of mathematical theory of multi frequency vibrations. Invariant tori]*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 301 p.

4. A.M. Samoylenko , Yu.V. Teplins'kyy , K.V. Pasiuk, "[On the existence of infinite-dimensional invariant tori of nonlinear countable systems of difference-differential equations]", *Neliniyni kolyvannya*, **13**:2 (2010), 253–271 (In Ukrainian).

5. S.Z. Kurbanshoev , M.A. Nusairiev, "[The construction of optimal integral manifold for the nonlinear differential equations]", *Doklady Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan*, **57**:11-12 (2014), 807–812 (In Russ.).

6. E.V. Shchetinina, "[Integral manifolds for slow-fast systems and the stability loss delay]", *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **6** (2010), 93–105 (In Russ.).

7. Yu.N. Bibikov, *Mnogochastotnye nelineinye kolebaniya i ikh bifurkatsii [Multi frequent nonlinear vibrations and their bifurcation]*, Len. Gos. Univ., Leningrad, 1991 (In Russ.), 142 p.

8. D.Yu. Volkov, "[Bifurcation of invariant torus fromcondition of equilibrium having zero eigenvalue]", *Vestnik Leningradskogo universiteta*, **1**:2 (1988), 102–103 (In Russ.).

9. M.I. Kuptsov, *Sushchestvovanie integral'nyh mnogoobrazij i periodicheskih reshenij sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [The existence of integral manifolds and periodic solution of system of ordinary differential equations]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Izhevsk, 1997 (In Russ.), 133 p.

10. M.I. Kuptsov, "[Local integral manifold of differential equations' system which depend on the parameter]", *Differ. Uravn.*, **35**:11 (1999), 1579–1580 (In Russ.).

11. M.I. Kuptsov, "[About the conditions of existence of integral manifolds of ordinary differential equations not solved relating theirderivatives]", *Trudy Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **2**:1 (1999), 95–96 (In Russ.).

12. M.I. Kuptsov, "[The existence of integral manifolds of differential equations' system]", *Differ. Uravn.*, **34**:6 (1998), 855–855 (In Russ.).

13. M. I. Kuptsov, "[Local integral manifold of a system of differential equations]", *Differential equations*, **34**:7 (1998), 1005–1007.

14. M.T. Terekhin, *Periodicheskie resheniya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Periodic solutions of systems of ordinary differential equations]*, Ryaz. Gos. Ped. Inst., Ryazan, 1992 (In Russ.), 88 p.

Submitted 2.04.2017