

УДК 517.9

Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях

© А. Д. Козлов¹

Аннотация. Рассматривается проблема существования у трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов дискретных странных гомоклинических аттракторов, т.е. тех, которые содержат ровно одну неподвижную точку. В настоящей статье эта задача решается на примере трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно, т.е. полиномиальных отображений с постоянным и отрицательным якобианом. Показывается, что у таких отображений могут существовать неориентируемые дискретные гомоклинические аттракторы различных типов. При этом основное внимание в данной работе уделяется описанию качественных и численных методов нахождения таких аттракторов (метод карт седел, метод диаграмм показателей Ляпунова), а также описанию их геометрических структур. Также приводятся примеры различных неориентируемых странных аттракторов, найденных в конкретных трехмерных отображениях с использованием вышеуказанных методов.

Ключевые слова: хаос, странный гомоклинический аттрактор, спиральный аттрактор, трехмерное отображение Эно, карта седел, диаграмма показателей Ляпунова.

1. Введение

В работе [1] были построены феноменологические сценарии возникновения дискретных аттракторов лоренцевского, восьмерочного и спирального типов у трехмерных ориентируемых диффеоморфизмов. В работе [2] для нахождения таких аттракторов были предложены достаточно эффективные поисковые методы. В частности, так называемый *метод карт седел* позволяет находить дискретные гомоклинические аттракторы различных типов, основываясь на определении областей параметров, отвечающих существованию неподвижных точек с заданным набором мультипликаторов. С помощью такого метода в [2] были решены важные вопросы существования гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку $O(0, 0, 0)$, в случае трехмерных обобщенных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z), \quad (1.1)$$

где

$$g(0, 0) = g_y(0, 0) = g_z(0, 0) = 0,$$

при условии, что якобиан B отображения положителен, т.е. когда отображение (1.1) является ориентируемым.

В настоящей статье мы рассматриваем аналогичную задачу в случае, когда отображение (1.1) неориентируемо, т.е. когда якобиан отображения $B < 0$. Заметим, что аттракторы, возникающие в неориентируемом случае, сильно отличаются от тех, которые

¹ Козлов Александр Дмитриевич, младший научный сотрудник, лаборатория суперкомпьютерных технологий, кафедра ТУиДС, ИИТММ, ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23); младший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozozloff@list.ru

наблюдаются в случае $B > 0$, как с точки зрения их качественного описания, так и геометрической структуры. Также следует отметить, что в ориентируемом случае некоторые из гомоклинических аттракторов (например, дискретные аттракторы Лоренца, аттракторы Шильникова или «восьмерочные» аттракторы) могут существовать у систем из приложений (см. [3], [4], [5]), которые описываются четырехмерными потоками. Здесь такие дискретные аттракторы наблюдаются в отображениях Пуанкаре соответствующих трехмерных секущих. Очевидно, что неориентируемые аттракторы трехмерных отображений не могут встречаться в отображениях Пуанкаре четырехмерных потоков. Однако, они могут быть у четырехмерных ориентируемых отображений и, соответственно, у отображения Пуанкаре потоков, размерность которых не меньше 5. Поэтому, с нашей точки зрения, такие неориентируемые аттракторы представляют несомненный интерес для теории многомерного хаоса.

По аналогии с работой [1] в нашей работе [6] были описаны феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях и установлено существование некоторых таких аттракторов у трехмерных отображений вида (1.1) с $B < 0$. Настоящая работа продолжает эти исследования, здесь мы делаем акцент на описании методов нахождения странных аттракторов.

Первый такой метод – метод карт седел – описывается в параграфах 2 и 3. Суть его, применительно к отображению (1.1), состоит в том, что для данного фиксированного значения якобиана $B < 0$ на плоскости параметров (A, C) мы рассматриваем области, соответствующие различным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0)$. Здесь наиболее важными являются два момента:

1. Рассматривается расположение мультипликаторов относительно единичной окружности. Также определяется, являются ли мультипликаторы вещественными или комплексными, тем самым мы определяем тип неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ (седло, седло-фокус и т.п.).
2. Следующий момент связан с тем, что из всего многообразия возможных режимов и аттракторов, возникающих в трехмерных отображениях, наибольший интерес вызывают псевдогиперболические аттракторы [7]. При этом одним из необходимых условий псевдогиперболичности является то, что значение седловой величины (произведение устойчивого и неустойчивого мультипликаторов, ближайших к мнимой оси) по модулю должно быть больше 1.

Исходя из представленных выше условий, накладываемых на мультипликаторы, аналитически мы находим кривые относительно параметров A , B , C отображения (1.1), которые являются границами областей соответствующих различным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0)$. Данные области изображаются в виде рисунка, тем самым давая наглядное представление о возможных режимах и бифуркационных сценариях отображения. Описанный метод очень схож с методом, предложенным в [8], где подобная карта, только в табличном виде, была получена для трехмерного потока.

Как уже было сказано, предпочтение при рассмотрении отдается псевдогиперболическим аттракторам. Псевдогиперболичность подразумевает, что рассматриваемое отображение допускает инвариантное расслоение фазового пространства на трансверсальные друг к другу сильно-сжимающее E^{ss} и центрально-неустойчивые подпространства E^{cu} , такие, что любое сжатие в нашем случае E^{ss} экспоненциально сильнее, чем в E^{cu} , а также дифференциал отображения растягивает фазовый объем в E^{cu} . Данные свойства, а также то, что в нашем случае $\dim E^{ss} = 1$, накладывают следующие ограничения на

значения показателей Ляпунова:

$$\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \quad (1.2)$$

Данные неравенства проверяются численно для каждого рассматриваемого аттрактора. Отсюда вытекает следующий метод, который мы используем для исследования систем, – диаграммы показателей Ляпунова. В них на плоскости параметров (A, C) (при фиксированном значении параметра B) темно-серым цветом указываются области, удовлетворяющие условиям (1.2). При этом также должно выполняться условие того, что данный конкретный аттрактор содержит неподвижную точку $O(0, 0, 0)$ (в нашем случае расстояние от точки до аттрактора должно быть меньше, чем 10^{-4}).

Используя диаграммы показателей Ляпунова, а также аналитически найденные условия для карт седел, можно заранее определить, какому режиму соответствует каждая конкретная точка в области параметров отображения.

В результате исследований, проведенных с использованием вышеописанных методов, удалось обнаружить следующие виды аттракторов в неориентируемых трехмерных отображениях Эно:

- «Тонкий» неориентируемый аттрактор Лоренца.
- Неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Двойной неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Неориентируемый спиральный аттрактор.
- Неориентируемый аттрактор Шильникова.

Необходимые условия, при которых возможно появление данных аттракторов в трехмерных отображениях Эно, будут описаны ниже.

2. Необходимые условия существования гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

Как уже было сказано, мы рассматриваем трехмерные отображения Эно, вида (1.1), имеющие постоянный якобиан $B < 0$. Точка $O(0, 0, 0)$ является неподвижной данного отображения. Тогда характеристическое уравнение в точке O примет следующий вид

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \quad (2.1)$$

Нетрудно заметить, что данное характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = +1$ при

$$L^+ : A + B + C = 1, \quad (2.2)$$

корень $\lambda = -1$ при

$$L^- : A + B - C = -1, \quad (2.3)$$

и корни $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$, при

$$L_\varphi : 1 + B(A - B) + C = 0. \quad (2.4)$$

2.1. Условия существования неориентируемого аттрактора Лоренца

Если в отображении (1.1) при условии, что $-1 < B < 0$, существует дискретный аттрактор Лоренца, то его неподвижная точка имеет мультипликаторы, удовлетворяющие следующим условиям:

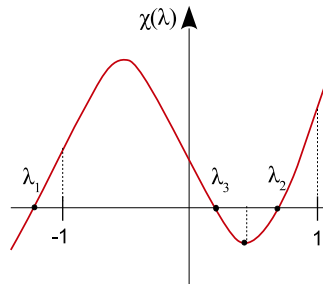
$$\begin{aligned} \lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 < -1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь подразумевается, что $\lambda_2 > \lambda_3$, но при этом данное условие не является существенным.

Л е м м а 2.1. Пусть отображение (1.1) при $B < 0$ имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям (2.5). Тогда,

$$\begin{aligned} C - B - A - 1 &> 0, \\ C - 1 + B + A &< 0, \\ \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^3 - A\left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^2 - C\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3} - B &< 0, \\ A + \sqrt{A^2 + 3C} &> 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На Рис.2.1 показано расположение корней характеристического уравнения (2.1), удовлетворяющих условиям леммы. Сразу можно заметить, что $\chi(-1) > 0$ и $\chi(1) > 0$. Собственно два этих неравенства и составляют первые два условия леммы.



Р и с у н о к 2.1

Расположение корней характеристического уравнения в случае неориентируемого «тонкого» аттрактора Лоренца

Последние два условия вытекают из того, что значение функции характеристического уравнения в точке, равной значению старшего корня его производной (точка перегиба), должно быть отрицательным. Иными словами, если рассмотреть производную от функции характеристического уравнения

$$\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2A\lambda - C = 0, \quad (2.7)$$

то старший корень будет равен

$$\lambda_+ = \frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}.$$

Кривую $\chi(\lambda_+) = 0$ в дальнейшем будем обозначать S^+ , а кривую, соответствующую $\chi(\lambda_-) = 0$, через S^- . Для нашей задачи получаем, что $\lambda_+ > 0$ и $\chi(\lambda_+) < 0$. Последние два неравенства как раз составляют два последних условия леммы.

2.2. Условия существования неориентируемого «восьмерочного» аттрактора.

В случае существования в отображении (1.1) неориентируемого «восьмерочного» аттрактора, мультипликаторы неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ будут удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lambda_1 < -1, -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 < -1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь подразумевается, что $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, но опять же данное условие не является существенным.

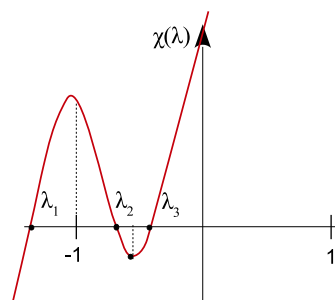
Л е м м а 2.2. Пусть отображение (1.1) при $B < 0$ имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям (2.8). Тогда,

$$C - B - A - 1 > 0,$$

$$\left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^3 - A\left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^2 - C\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3} - B < 0, \quad (2.9)$$

$$A + \sqrt{A^2 + 3C} < 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы практически аналогично доказательству предыдущей леммы. Необходимо всего лишь из геометрических ограничений Рис.2.2 получить соответствующие условия.

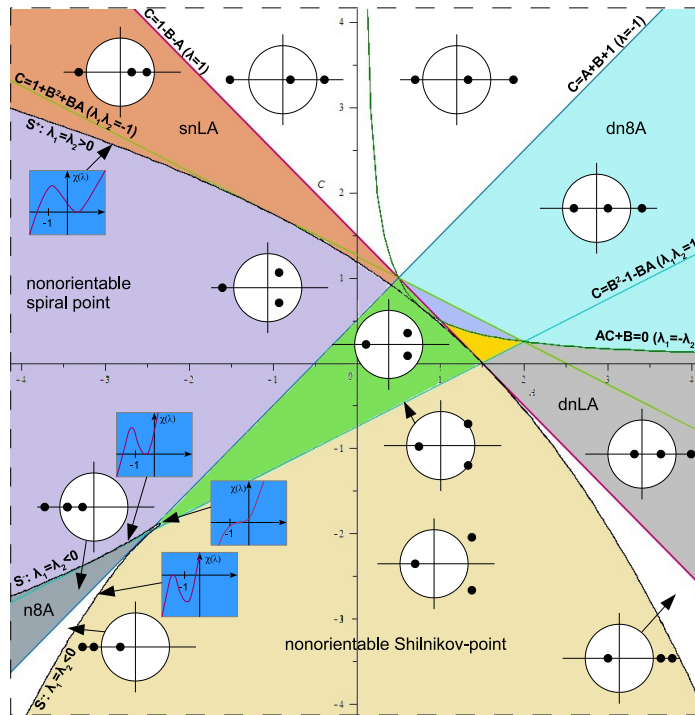


Р и с у н о к 2.2

Расположение корней характеристического уравнения в случае неориентируемого «восьмерочного» аттрактора

3. Общий вид карты седел

На плоскости параметров (A, C) были определены области возможного существования неориентируемого «восьмерочного» аттрактора ($n8A$) и неориентируемого аттрактора Лоренца ($snLA$), исходя из условий, накладываемых на мультипликаторы характеристического уравнения (2.1) для отображения (1.1) в неподвижной точке $O(0, 0, 0)$. Однако, на данной плоскости имеются также области и кривые, отвечающие условиям существования других не менее интересных аттракторов, некоторые из которых будут рассмотрены подробнее.



Р и с у н о к 3.1

Карта седел отображения (1.1) при $B = -0.5$

На Рис.3.1 представлена карта седел при фиксированном параметре якобиана $B = -0.5$. На ней можно видеть уже рассмотренные ранее области **snLA** и **n8A** и ограничивающие их кривые равных корней S^+ и S^- , а также кривые L^+ , L^- и L^φ , образующие «треугольник устойчивости», внутри которого значения мультипликаторов не выходят за пределы единичной окружности, таким образом, данная область соответствует асимптотически устойчивой неподвижной точке. Однако, более интересными для рассмотрения представляются области:

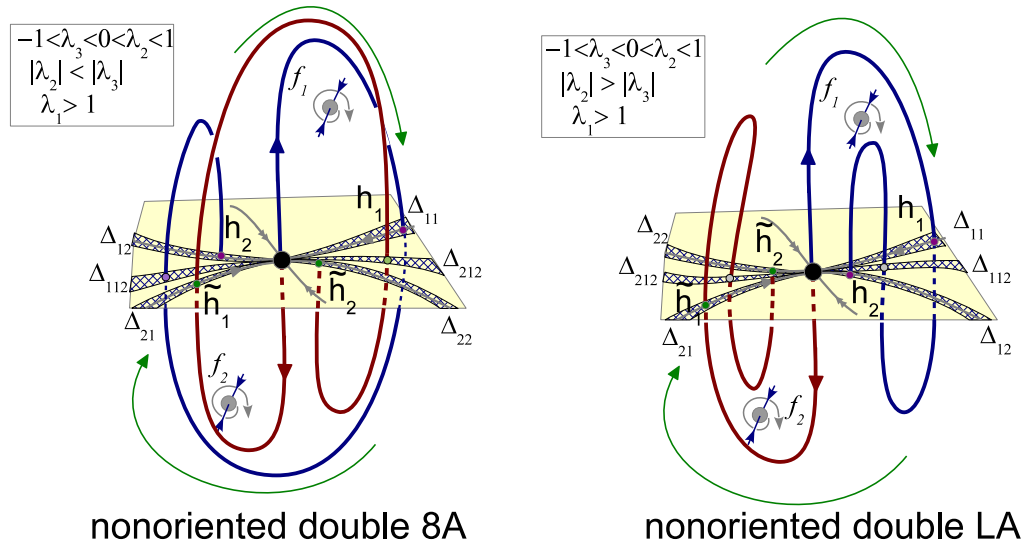
$$\mathbf{dn8A} : \lambda_1 > 1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, |\lambda_2| < |\lambda_3| < 1, |\lambda_1 \lambda_3| < 1, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{dnLA} : \lambda_1 > 1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, |\lambda_3| < |\lambda_2| < 1, |\lambda_1 \lambda_2| < 1. \quad (3.2)$$

dnLA представляет собой область существования двойного неориентируемого аттрактора Лоренца, а область **dn8A** – двойного неориентируемого «восьмерочного» аттрактора. Поведение гомоклинических траекторий данных двух типов аттракторов представлено на Рис.3.2.

Также особый интерес представляют спиральные квазиаттракторы, которым соответствуют области:

- $S^+ > 0, L^- > 0$ – область существования неориентируемого спирального аттрактора.
- $S^+ > 0, S^- < 0, L^\varphi < 0$ – область существования неориентируемого аттрактора Шильникова.



Р и с у н о к 3.2

Поведение гомоклиник у двойных неориентируемых аттракторов

Данным аттракторам соответствуют следующие значения мультипликаторов:

$$\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| < 1, \varphi \neq \pi, 2\pi, \pi/2, 2\pi/3, \quad (3.3)$$

$$|\lambda_1| < 1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| > 1, \varphi \neq \pi, 2\pi, \pi/2, 2\pi/3. \quad (3.4)$$

Внешний вид и сценарий происхождения последнего несколько отличается от ориентируемого случая, но об этом немного позднее.

Также на карте седел присутствуют невыделенные нами области, соответствующие различным аттракторам, имеющим двумерное неустойчивое многообразие, рассмотрение которых мы оставили за рамками данной статьи.

4. Примеры гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

В этом параграфе мы рассмотрим конкретные примеры гомоклинических странных аттракторов, найденных в (1.1), с помощью методов карт седел и диаграмм показателей Ляпунова. Заметим, что диаграммы показателей Ляпунова позволяют определить области существования хаотических режимов, а карты седел помогают ответить на вопрос о том, какому типу аттрактора соответствует данная область. После этого мы можем построить такой аттрактор численно.

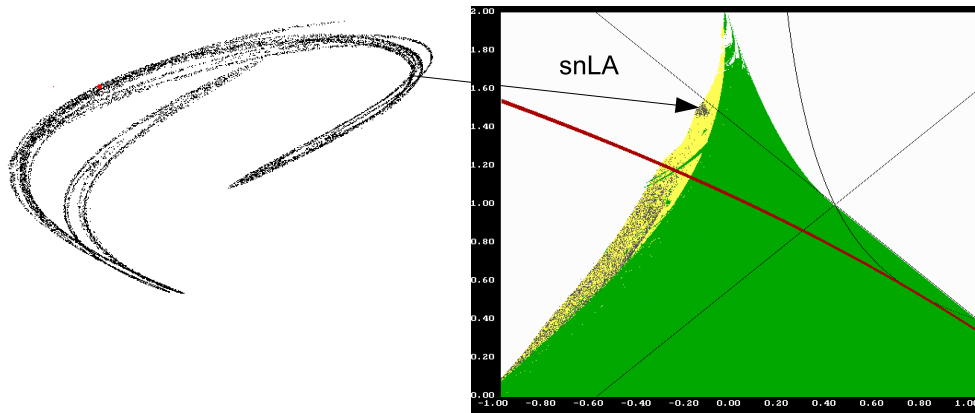
4.1. Неориентируемый дискретный аттрактор Лоренца

Рассматривается отображение Эно вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 0.54y^3 + 0.54z^3 + 1.5yz \quad (4.1)$$

при $B = -0.4$. Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) , а также наложенной на него картой седел показан на Рис.4.1 справа. Видно, что

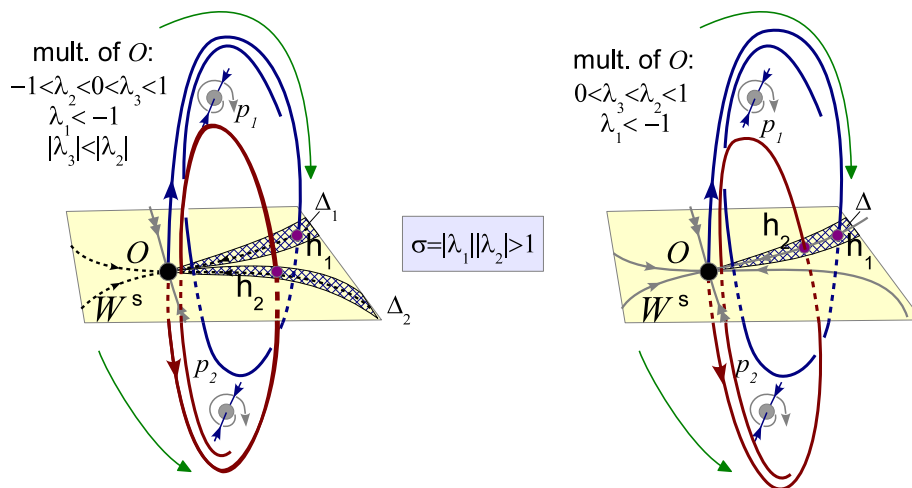
область «темно-серого» цвета, соответствующая странному гомоклиническому аттрактору, для которого выполнены необходимые условия псевдогиперболичности, попала в область **snLA**. При следующих значениях параметров $A = -0.16, C = 1.51$ из этой области мы можем наблюдать такой аттрактор.



Р и с у н о к 4.1

Пример неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.4$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

На Рис.4.1 слева показан пример неориентируемого аттрактора Лоренца. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = -1.42, \lambda_2 = 0.97, \lambda_3 = 0.29$, что соответствует условиям (2.5) существования неориентируемого аттрактора Лоренца.



Р и с у н о к 4.2

Поведение гомоклинических траекторий ориентируемого и неориентируемого аттракторов Лоренца

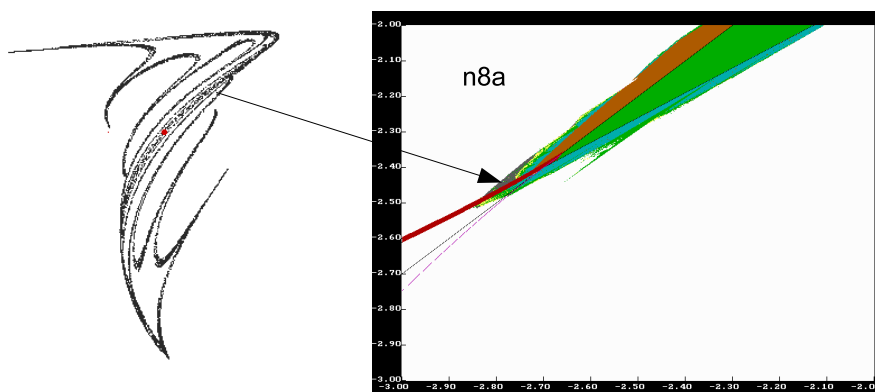
Исходя из внешнего вида аттрактора мы назвали его в [6] неориентируемый «тонкий» аттрактор Лоренца. И, действительно, если обратить внимание на поведение гомоклинических траекторий, показанных на Рис.4.2, можно заметить, что при пересечении устойчивого подпространства они образуют только один гомоклинический «клин». В то время как ориентируемый аттрактор Лоренца образует два таких «клина».

4.2. Неориентируемый дискретный «восьмерочный» аттрактор

Рассматривается отображение Эно вида

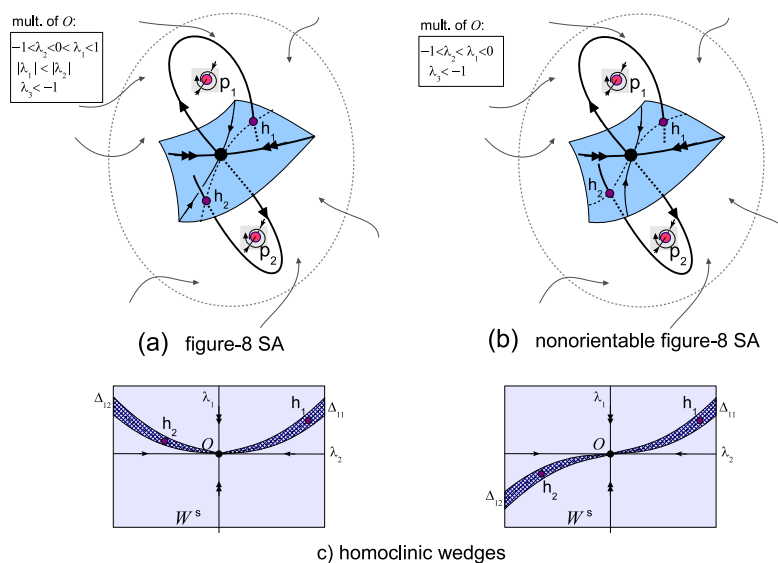
$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + 1.3y^2 + 0.22z^2 + 12.5yz + 2.7z^3 \quad (4.2)$$

при $B = -0.55$. Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) , а также наложенной на него картой седла показан на Рис.4.3 справа. Видно, что область «темно-серого» цвета, соответствующая странному гомоклиническому аттрактору, попала в область **n8A**. При следующих значениях параметров $A = -2.667, C = -2.155$ из этой области мы можем наблюдать такой аттрактор.



Р и с у н о к 4.3

Пример неориентируемого «восьмерочного» аттрактора. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.55$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .



Р и с у н о к 4.4

Поведение гомоклинических траекторий «восьмерочного» аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случаях

На Рис.4.3 слева показан пример неориентируемого «восьмерочного» аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = -1.327$, $\lambda_2 = -0.939$, $\lambda_3 = 0.401$, что соответствует условиям (2.8) существования данного аттрактора.

Отметим, что формы «восьмерочного» аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случае очень похожи. Действительно, если рассмотреть поведение гомоклинических траекторий Рис.4.4, то можно заметить, что принципиальной разницы между ними нет. И в том, и в другом случае гомоклиники седла $O(0, 0, 0)$ пересекают устойчивое многообразие, образуя два гомоклинических «клина», расположенные по разные стороны от сепаратрисы, соответствующей направлению наибольшего сжатия.

4.3. Двойной неориентируемый восьмерочный аттрактор

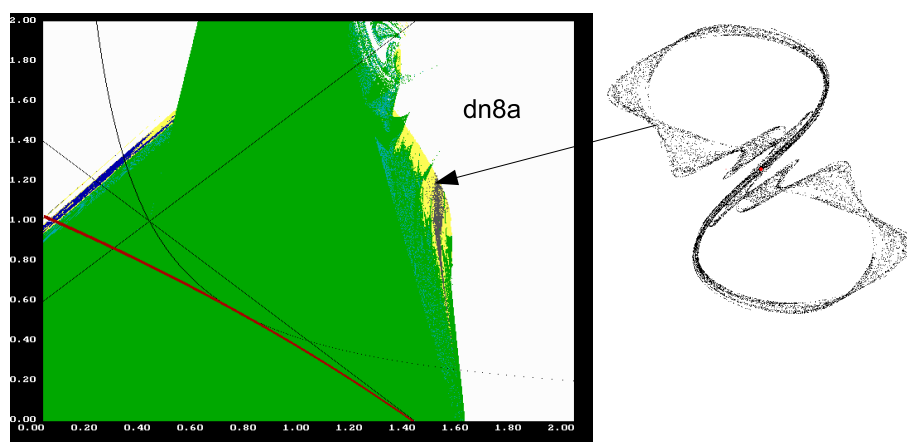
Данный аттрактор присутствует в следующем отображении Эно

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 2y^3 + 1.25z^3 \quad (4.3)$$

при значениях параметров $A = 1.45$, $C = 1.21$, $B = -0.4$.

На Рис.4.5 показан пример двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = 1.96$, $\lambda_2 = 0.26$, $\lambda_3 = -0.7$, что соответствует условиям (3.1).

Как и в случае с ориентируемым отображением Эно, данный аттрактор называется двойным в силу того, что его гомоклиники при пересечении с устойчивым подпространством образуют дополнительные «клинья», как можно видеть на Рис.3.2.



Р и с у н о к 4.5

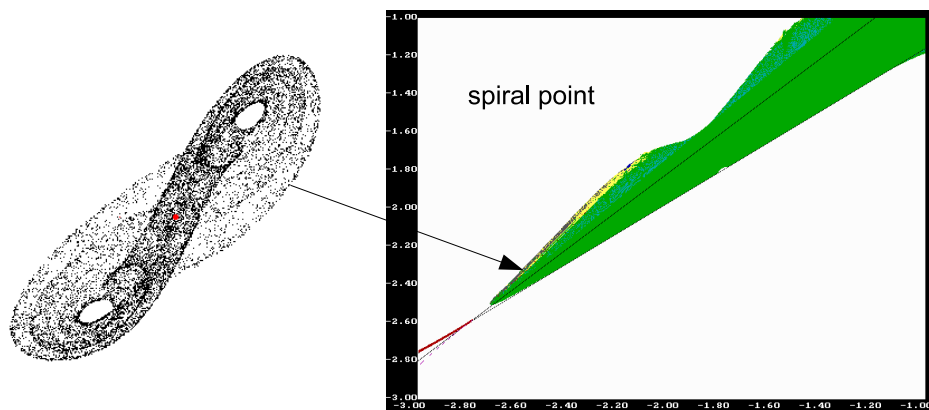
Пример двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Слева изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.4$. Справа – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

4.4. Спиральные аттракторы

Особый случай составляют спиральные аттракторы, содержащие неподвижную точку типа седло фокус и являющиеся, по сути, квазиаттракторами. Первый из рассматриваемых нами таких аттракторов, – неориентируемый спиральный аттрактор. Он присутствует в следующем отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 1.5z^3 + 0.5y^3 + 1.5zy \quad (4.4)$$

при значениях параметров $A = -2.64, C = 2.37, B = -0.8$



Р и с у н о к 4.6

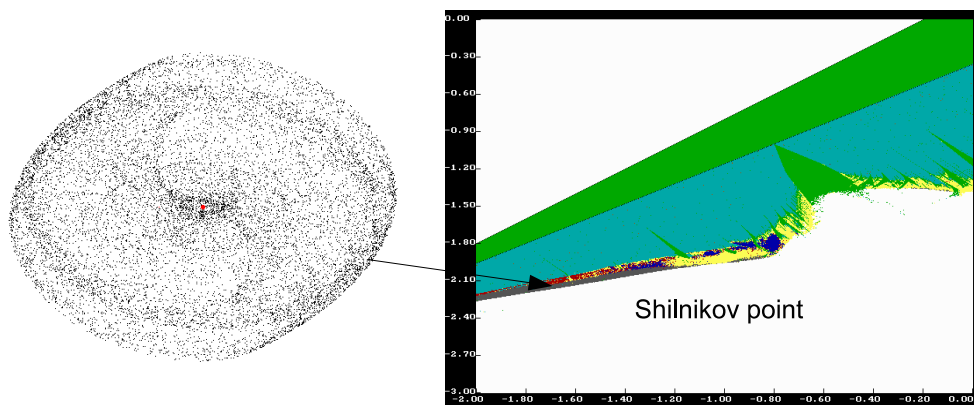
Пример неориентируемого спирального аттрактора. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.8$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

На Рис.4.6 показан пример неориентируемого спирального аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для приведенного отображения равны $\lambda_1 = -1.26, \lambda_{2,3} = 0.69 \pm 0.4i$, что соответствует условиям (3.3).

Второй из рассматриваемых спиральных аттракторов – неориентируемый аттрактор Шильникова, который был найден в следующем отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 1.5z^3 + 2.5y^3 \quad (4.5)$$

при значениях параметров $A = -1.66, C = -2.15, B = -0.8$.



Р и с у н о к 4.7

Пример неориентируемого аттрактора Шильникова. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.8$. Слева - проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

На Рис.4.7 показан пример неориентируемого аттрактора Шильникова. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для приведенного отображения равны $\lambda_1 = -0.51, \lambda_{2,3} = -0.57 \pm 1.11i$, что соответствует условиям (3.4).

5. Заключение

В данной статье была рассмотрена проблема существования дискретных странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых отображений Эно. Было показано, что в таких системах могут существовать дискретные неориентируемые аттракторы лоренцовского, восьмерочного и спирального типов. Также был рассмотрен инструмент «карта седел», позволяющий однозначно определить тип аттрактора в каждой конкретной области параметров отображения, а также инструмент «диаграмма показателей Ляпунова», основным предназначением которого является определение типа динамики системы (1.1) при конкретных параметрах отображения и заданной нелинейности. Сочетание данных двух инструментов позволило обнаружить пять странных неориентируемых аттракторов в конкретных примерах обобщенных отображений Эно, это:

- «Тонкий» неориентируемый аттрактор Лоренца.
- Неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Двойной неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Неориентируемый спиральный аттрактор.
- Неориентируемый аттрактор Шильникова.

Однако присутствие данных странных аттракторов в динамических системах из приложений еще только предстоит выяснить.

Благодарности. Автор благодарит Гонченко С.В. за полезные весьма полезные замечания. Разделы 2 и 3 выполнены финансовой поддержке гранта РФФИ No. 14-41-00044, а раздел 4 (включая результаты численных экспериментов) выполнен финансовой поддержке гранта РФФИ No. 17-11-01041.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Гонченко, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников, «К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений», *Нелинейная Динамика*, **8**:1 (2012), 3–28.
2. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *to appear in Physica D (or arXiv:1510.02252v2 [math.DS] for this version.*
3. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin’s top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:6 (2014), 718–733.
4. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21** (2016), 939–954.
5. A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**:5 (2013), 521–538.

6. А. С. Гонченко, А. Д. Козлов, “О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях”, *Журнал СВМО*, **18**:4 (2016), 17–29.
7. Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа”, *Докл. РАН.*, **418**:1 (2008), 23–27.
8. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, М. – Ижевск, 2009.

Поступила 1.04.2017

MSC2010 34C23, 34D45

Examples of strange attractors in three-dimensional nonoriented maps

© A. D. Kozlov ²

Abstract. We consider the problem of existence of discrete strange homoclinic attractors (i.e. attractors which possess exactly one fixed point) for three-dimensional non-oriented diffeomorphisms. In this article we solve this problem using three-dimensional non-oriented generalized Hénon maps, i.e. polynomial maps with constant and negative Jacobian. We show that such maps can possess non-oriented discrete homoclinic attractors of different types. Herewith the main attention in this work is paid to the description of qualitative and numerical methods which are used to find such attractors (the saddle chart, colored Lyapunov diagram) as well as to the description of attractors' geometric structures. Examples of various non-oriented strange attractors that were found in specific three-dimensional maps by means of above listed methods are also given.

Key Words: chaos, strange homoclinic attractors, spiral attractor, three-dimensional Hénon map, saddle chart, colored Lyapunov diagram.

REFERENCES

1. A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, “Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps”, *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*, **8**:1 (2012), 3–28.
2. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *to appear in Physica D (or arXiv:1510.02252v2 [math.DS] for this version.*
3. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:6 (2014), 718–733.

² **Alexander D. Kozlov**, junior researcher, Supercomputer technology laboratory, ITMM, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod – National Research University (23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhni Novgorod, Russia); junior researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozloff@list.ru

4. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21** (2016), 939–954.
5. A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**:5 (2013), 521-538.
6. A. S. Gonchenko, A. D. Kozlov, “On scenaria of chaos appearance in three-dimension nonorientable maps”, *J. SVMO*, **18**:4 (2016), 17–29.
7. D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, “Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors.”, *Doklady Mathematics*, **418**:1 (2008), 23–27.
8. D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, Leon O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 2*, «Regular and Chaotic Dynamics», Insitute of computer research, Moscow – Izhevsk, 2009.

Submitted 1.04.2017