DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.025-030

УДК 517.9

О простейших потоках Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями на сфере S^n

© **Е. Я. Гуревич**[1], **Д. А. Павлова**[2]

Аннотация. В работе делается первый шаг в изучении структуры разбиения фазового пространства размерности $n \geq 4$ на траектории потоков Морса-Смейла (структурно-устойчивых потоков, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа состояний равновесия и замкнутых траекторий), допускающих гетероклинические пересечения. Более точно, рассмотрен класс потоков Морса-Смейла на сфере S^n, неблуждающее множество которых состоит из двух узловых и двух седловых состояний равновесия. Доказано, что для любого потока из рассматриваемого класса пересечение инвариантных многообразий двух различных седловых состояний равновесия непусто и состоит из конечного числа компонент связности. Гетероклинические пересечения являются математической моделью сепараторов магнитного поля, изучение структуры которых, как и вопрос существования, является одной из принципиальных проблем магнитной гидродинамики.
Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, гетероклинические пересечения.

1. Введение

Динамические системы, называемые сейчас системами Морса-Смейла, были введены С. Смейлом в 1960 г. в качестве претендента на класс всех структурно устойчивых систем в размерности, большей двух. Условия, выделяющие этот класс, были сформулированы по аналогии с необходимыми и достаточными условиями грубости потоков на плоскости, найденными А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 году. Основным атрибутом систем Морса-Смейла является гиперболичность неблуждающего множества и конечность числа его компонент связности. Вскоре сам С. Смейл понял, что многомерные структурно-устойчивые системы устроены значительно сложнее и могут обладать счетным множеством гиперболических периодических траекторий. Однако, изучение систем Морса-Смейла является актуальной задачей, имеющей как самостоятельный интерес (для описания детерминированных процессов в естествознании), так и с точки зрения теории бифуркаций для понимания переходных процессов.

Гладкий поток $f^t : M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется *потоком Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество Ω_{f^t} потока f^t состоит из конечного числа состояний равновесия и замкнутых траекторий, все они гиперболические;
- инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия или замкнутых траекторий пересекаются трансверсально.

[1] **Гуревич Елена Яковлевна**, доцент кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

[2] **Павлова Дарья Александровна**, студент НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8634-4143, dapavlova _1 @mail.ru

Напомним, что гладкие подмногообразия L, N многообразия M^n пересекаются *трансверально*, если либо $L \cap N = \emptyset$, либо в каждой точке пересечения $x \in L \cap N$ касательные пространства к L, N порождают касательное пространство к M^n.

Классическими работами по изучению потоков Морса-Смейла, открывшими эту тематику, стали работы А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович и А. Г. Майера 1937 - 1955 годов, результатом которых являются необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков на двумерной сфере S^2 с конечным числом особых траекторий (в частности, отсюда следует и классификация грубых потоков на двумерной сфере, см. [1]). Отправной точкой этой работы послужили идеи А. Пуанкаре и И. Бендиксона о возможности выделения особых траекторий, то есть таких траекторий, взаимное расположение которых однозначно задает качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории, а также идея грубости, принадлежащая А. А. Андронову и Л. С. Понтрягину.

Топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях, отличных от двумерной сферы, получена в работах М. Пейкшото, а так же А. А. Ошемкова и В. В. Шарко. Несмотря на внешнюю схожесть двумерных потоков Морса-Смейла и потоков Морса-Смейла, заданных на многообразиях размерности большей двух, топологическая классификация последних оказалась все же сложнее, чем в двумерном случае, благодаря, в частности, существованию гетероклинических траекторий. В связи с этим, наиболее содержательные результаты были получены пока только для трехмерных потоков в случае конечного множества гетероклинических траекторий в работах Ж. Флейтаса [2] и Я. Л. Уманского [3], а в большей размерности — С. Ю. Пилюгиным [4] для класса потоков, заданных на сфере, и не обладающих замкнутыми и гетероклиническими траекториями.

В настоящей работе делается первых шаг в изучении структуры разбиения фазового пространства на траектории потоков Морса-Смейла, заданных на сфере размерности 4 и выше, и допускающих гетероклинические пересечения. Пусть $G_{i,j}(S^n)$ – класс потоков Морса-Смейла, заданных на сфере S^n, такой, что для любого потока $f^t \in G_{i,j}(S^n)$ его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника α, стока ω и двух седел σ_i, σ_j, имеющих неустойчивые многообразия размерности i, j соответственно, $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Из формулы Лефшеца следует, что разность $j - i$ является нечетным числом. Для состояния равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ обозначим через W^s_p, W^u_p его устойчивое и неустойчивое мнообразие соответственно. Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть* $f^t \in G_{i,j}(S^n)$, $j > i$. *Тогда:*

1. $W^u_{\sigma_i} \cap W^s_{\sigma_j} = \emptyset$.
2. $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ *непусто и состоит из конечного числа компонент связности.*

Аналогичный результат для диффеоморфизмов Морса-Смейла на замкнутых трехмерных многообразиях получен в работе [5]. Вопрос существования гетероклинических кривых у систем Морса-Смейла на трехмерных многообразиях в предположениях различной общности решался также в работах [6, 7, 8], а для диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n > 3$, таких, что множество седловых точек состоит из точек индекса 1 и $(n-1)$ — в работе [9].

2. Гетероклинические пересечения потоков из класса $G_{i,j}(S^n)$

Следующее предложение является непосредственным следствием теоремы 2.3 работы [10].

Предложение 2.1. *Пусть $f^t : M^n \to M^n$ — поток Морса-Смейла. Тогда:*

1) $M^n = \bigcup\limits_{p \in \Omega_{f^t}} W^u_p$;

2) *для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ многообразие W^u_p является гладким подмногообразием многообразия M^n ;*

3) *для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$, и компоненты связности l^u_p множества $W^u_p \setminus p$ верно равенство $cl\, l^u_p \setminus (l^u_p \cup p) = \bigcup\limits_{q \in \Omega_f : W^s_q \cap l^u_p \neq \emptyset} W^u_q$ [3].*

Замечание 2.1. *Утверждения предложения 2.1. остаются справедливыми после формальной замены символов u, s на символы s, u соответственно.*

Доказательство теоремы 1.1.

Докажем п.1). Если $W^u_{\sigma_i} \cap W^s_{\sigma_j} \neq \emptyset$, то касательные пространства к $W^u_{\sigma_i}, W^s_{\sigma_j}$ в каждой точке пересечения порождают касательное пространство к S^n, следовательно $dim\, W^u_{\sigma_i} + dim\, W^s_{\sigma_j} \geq n$. Это невозможно, так как $dim\, W^u_{\sigma_i} = i$, а $dim\, W^s_{\sigma_j} = n-j$, и $j > i$.

Докажем п. 2). Из п.1 и предложения 2.1. следует, что замыкание $cl\, W^s_{\sigma_j}$ является сферой $S^{n-j}_\alpha = \alpha \cup W^s_{\sigma_j}$. Из гиперболичности состояния равновесия σ_j следует, что существует гладко вложенная сфера $S^{j-1} \subset W^u_{\sigma_j}$, ограничивающая шар $B^j \subset W^u_{\sigma_j}$ такой, что $\sigma_j \subset int\, B^j$, являющаяся глобальной секущей для потока $f^t|_{W^u_{\sigma_j} \setminus \sigma_j}$. Тогда коэффициент зацепления сфер S^{n-j}_α, S^{j-1} равен ± 1.

В силу предложения 2.1. $S^n = \bigcup\limits_{p \in \Omega_{f^t}} W^s_p$. Если $W^u_{\sigma_j} \cap W^s_{\sigma_i} = \emptyset$, то $S^{j-1} \subset W^s_\omega$. Так как $W^s_\omega \cap (W^s_{\sigma_i} \cup \alpha) = \emptyset$, то существует окрестность u_ω точки ω в W^s_ω такая, что $u_\omega \cap S^{n-j}_\alpha = \emptyset$. С другой стороны, существует $T > 0$ такое, что $f^t(S^{j-1}) \subset int\, u_\omega$ для всех $t > T$. Так как группа $\pi_{j-1}(\mathbb{R}^n)$ тривиальна, то $f^t(S^{i-2})$ ограничивает шар $D^j \subset u_\omega$ (возможно, с самопересечениями). Тогда коэффициент зацепления сфер $f^t(S^{n-j}_\alpha)$ и $f^t(S^{j-1})$ равен нулю, но тогда и коэффициент зацепления сфер S^{n-j}_α, S^{j-1} равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j} \neq 0$.

Покажем, что пересечение $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ состоит из конечного числа компонент связности. Положим $\Sigma = W^s_{\sigma_i} \cap S^{j-1}$. Тогда множество $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ гомеоморфно прямому произведению $\Sigma \times \mathbb{R}$, и достаточно доказать конечность компонент связности множества Σ. Предположим противное. Выберем по одной точке из каждой компоненты связности множества Σ и обозначим полученное множество через X. В силу компактности сферы S^{j-1} существует последовательность $\{x_i\} \subset X$, сходящаяся к некоторой точке $x^* \subset S^{j-1}$. Тогда $x^* \in cl\ W^s_{\sigma_i}$. В силу предложения 2.1. $cl\ W^s_{\sigma_i} = W^s_{\sigma_i} \cup W^s_{\sigma_j} \cup \alpha$, поэтому $x^* \in W^s_{\sigma_i}$ и любая окрестность точки x^* имеет непустое пересечение с бесконечным множеством компонент связности множества $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$.

[3] Здесь $cl\, l^u_p$ обозначает замыкание множества l^u_p.

С другой стороны, из определения трансверсального пересечения непосредственно следует, что для точки $x^* \in W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ существует окрестность $u(x^*) \subset S^n$ и гомеоморфизм $h : u(x^*) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $h(W^u_{\sigma_j}) \subset \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ x_{j+1} = x_{i+2} = ... = x_n = 0\}$, $h(W^s_{\sigma_i}) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ x_1 = x_2 = ... = x_i = 0\}$. Таким образом, множество $u(x^*) \cap (W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j})$ связно. Полученное противоречие доказывает конечность числа компонент пересечения $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за постановку задачи и полезные обсуждения. Исследование выполнено в рамках Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2017 году (проект 90) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-03687-а).

Список литературы

1. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966, 568 с.

2. G. Fleitas, "Classification of gradient-like flows in dimension two and three", *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183

3. Я. Л. Уманский, "Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий", *Мат. сб.*, **181**:2 (1990), 212 - 239

4. С.Ю. Пилюгин, "Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах", *Дифференциальные уравнения*, **14**:2 (1978), 245-254

5. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев,, "О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях", *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386.

6. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev and E. Pecou, "Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves", *Topology and its applications*, **117** (2002), 335-344.

7. V. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. Pochinka, T. V. Medvedev, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **294** (2015), 1-5.

8. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, "On the number of heteroclinic curves of diffeomorphisms with surface dynamics", *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:2 (2017), 122-135.

9. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection", *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81-91.

10. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747 - 817.

Поступила 21.03.2017

MSC2010 37D15

On the simplest Morse-Smale flows with heteroclinical intersections on the sphere S^n

© E. Gurevich[4], **D. Pavlova**[5]

Abstract. This paper is the first step in stydying structure of decomposition of phase space with dimension $n \geq 4$ on the trajectories of Morse-Smale flows (structurally stable flows with non-wandering set consisting of finite number of equilibria and closed trajectories) allowing heteroclinic intersections. More precisely, special class of Morse-Smale flows on the sphere S^n is studied. The non-wandering set of the flow of interest consists of two nodal and two saddle equilibrium states. It is proved that for every flow from the class under consideration the intersection of invariant manifolds of two different saddle equilibrium states is nonempty and consists of a finite number of connectivity components. Heteroclinic intersections are mathematical models for magnetic field separators. Study of their structure, as well as the question of their existence, is one of the principal problems of magnetic hydrodynamics.

Key Words: Morse-Smale flows, heteroclinic intersections.

References

1. A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon, A. Mayer, *Kachestvennaya toriya dynamicheskich system vtorogo poryadka [Qualitative theory of dynamical systems of the second order]*, Nauka, M., 1966 (In Russ.), 568 c.

2. G. Fleitas, "Classification of gradient-like flows in dimension two and three", *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183 (In English)

3. Y. Umanskii, "Neobhodimiye i dostatochnie usloviya topologicheskoi equivalentnosti trechmernych dynamicheskich system Morsa-Smeila s konechnym chislom osobych trayectorii [Nessecary and sufficient conditions of topological equivalence of three-dimensional Morse-Smale dynamical systems with finite number of singular trajectories]", *Sbornic Mathematics*, **181**:2 (1990), 212 - 239 (In Russ.)

4. S. Pilyugin, "Fazivye diagrammy opredelyayushieu systemy Morsa-Smeila bez periodicheskich traectorii na spherach [Phaze diagrammes defined Morse-Smale dynamical systems without periodical trajectories on spheres]", *Differencialnye uravneniya*, **14**:2 (1978), 245-254 (In Russ.)

5. V. Grines, E. Zhuzhoma, V. Medvedev, "On Morse–Smale Diffeomorphisms with Four Periodic Points on Closed Orientable Manifolds", *Mathematical Notes*, **74**:3 (2003), 352–366 (In English).

6. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev and E. Pecou, "Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves", *Topology and its applications*, **117** (2002), 335-344 (In English).

[4] **Elena Gurevich**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

[5] **Daria Pavlova**, student, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8634-4143, dapavlova _1 @mail.ru

7. V. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. Pochinka, T. V. Medvedev, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **294** (2015), 1-5 (In English).

8. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “On the number of heteroclinic curves of diffeomorphisms with surface dynamics”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:2 (2017), 122-135 (In English).

9. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81-91 (In English).

10. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747 - 817 (In English).

Submitted 21.03.2017