DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.031-052

УДК 517.929

Признаки устойчивости одного класса автономных дифференциальных "псевдолинейных" уравнений первого порядка с авторегулируемым запаздыванием

© М. Б. Ермолаев[1], П. М. Симонов[2]

Аннотация. Статья посвящена получению эффективных признаков экспоненциальной устойчивости некоторых классов автономных дифференциальных уравнений первого порядка с авторегулируемым запаздыванием. Дан обзор работ из г. Перми и из г. Иванова по этой теме. Приведен критерий С.А. Гусаренко о непрерывности оператора с авторегулируемым запаздыванием. Приведено условие В.П. Максимова о полной непрерывности оператора с авторегулируемым запаздыванием. Сформулированы достаточные условия существования и продолжимости решений. Сформулированы теоремы об устойчивости по первому приближению. Эти теоремы основаны на теоремах из книги и статей Н.В. Азбелева и П.М. Симонова. Теоремы об устойчивости по первому приближению по внешнему виду хотя и напоминают известные теоремы Ляпунова о первом приближении, однако в действительности существенно отличаются от последних. Теоремы Ляпунова для обыкновенных дифференциальных или функционально-дифференциальных уравнений дают методику исследования устойчивости: с помощью линеаризации нелинейной части уравнения вопрос об устойчивости нелинейного уравнения сводится к вопросу об устойчивости линейного уравнения, для которого уже доказаны эффективные признаки устойчивости. В нашем случае не удается линеаризовать нелинейные части уравнений, а потому вышеупомянутая методика здесь не применима. В статье, заменяя процесс линеаризации уравнения "псевдолинеаризацией", а также используя результаты статьи В.В. Малыгиной, мы получили некоторые аналоги теорем о первом приближении для скалярных, автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием. Основные выводы, полученные на основании этой идеи, можно оформить следующей фразой: автономные дифференциальные уравнения с авторегулируемым запаздыванием обладают свойствами устойчивости, подобными свойствам соответствующих им уравнений с сосредоточенным запаздыванием.

Ключевые слова: автономные дифференциальные уравнения с авторегулируемым запаздыванием, устойчивость, нелинейный оператор внутренней суперпозиции, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению, оператор сжатия, неподвижная точка оператора, допустимость пар пространств.

1. Введение

Моделирование некоторых практических задач приводит к уравнениям с запаздыванием, зависящим явно или неявно от неизвестной функции. В настоящей работе рассматривается один достаточно общий класс таких уравнений — уравнения, содержащие в качестве

[1] **Ермолаев Михаил Борисович**, и.о. заведующего кафедрой экономики и финансов, профессор кафедры экономики и финансов, ФГБОУ ВО "Ивановский государственный химико-технологический университет" (153000, Россия, Ивановская область, г. Иваново, пр. Шереметевский, д. 7.), доктор экономических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9502-3621, ermol-mb@mail.ru

[2] **Симонов Пётр Михайлович**, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО "Пермский государственный национальный исследовательский университет" (614990, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15.), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6357-662X, simpm@mail.ru

компоненты выражение $x[h(t,x(t))]$, где $x(t)$ — неизвестная функция. Последнее уравнение, следуя работам [1], [2], в дальнейшем будем называть уравнением с авторегулируемым запаздыванием.

В 1963 году Р. Драйвер опубликовал работу [3], в которой он исследовал вопросы существования и единственности решения уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(t, x(t), x[h(t, x(t))]), \quad t \geq a, \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } \xi < a. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Позднее появились работы, посвященные устойчивости некоторых классов таких уравнений [4], [5], [6], [7], [8], а также работы, уточняющие результаты Р. Драйвера [9], [10]. Однако, общим для всех этих исследований является наличие требования так называемой "непрерывной стыковки": $x(a) = \varphi(a)$, что существенно сужает практическое применение полученных результатов.

С другой стороны, отказ от этого требования приводит к ряду парадоксальных явлений. В частности, в этом случае отсутствует непрерывная зависимость решений от импульсных воздействий (при сколько угодно малом воздействии картина расположения интегральных кривых может принципиально измениться, вплоть до исчезновения решений (см., например, [11], [12], [13], [14][с. 278]).

Причина таких явлений состоит в том, что оператор $F : C[0,b] \to L^p[0,b]$, определяемый правой частью уравнения (1.1), вообще говоря, не является непрерывным.

Это обстоятельство затрудняет применение традиционных схем исследования разрешимости уравнения (1.1), использующих классические принципы неподвижной точки.

Преодолению этих трудностей были посвящены работы М.Е. Драхлина [15], [16]; М.Е. Драхлина и Т.К. Плышевской [17]; А.И. Булгакова и В.П. Максимова [18]; В.П. Максимова [19], [20]; Е.С. Жуковского [21], [22]; С.А. Гусаренко [23], [24], [25]; С.А. Гусаренко, Е.С. Жуковского и В.П. Максимова [26].

Были получены достаточные условия [15], [19], а, позднее и критерий [26] непрерывности оператора $H_\varphi : C[0,b] \to L^p[0,b]$, $1 \leq p < \infty$:

$$(H_\varphi x)(t) = \begin{cases} x[h(t,x(t))], & \text{при } h(t,x(t)) \geq 0, \\ \varphi[h(t,x(t))], & \text{при } h(t,x(t)) < 0, \end{cases}$$

а также эффективные признаки разрешимости задач Коши и некоторых краевых задач для уравнений с авторегулируемых запаздыванием. Вопросы устойчивости в этих работах не рассматривались. Первые исследования были в работах [11], [12], [27], [28]. Посвященные этому обзоры имеются в статьях [29], [30], [31], [32], [33]. Заметим, что наше исследование отличается своим подходом от статей зарубежных авторов, см., например, [34], [35], [36].

В предлагаемой работе рассматривается общий случай уравнений с авторегулируемым запаздыванием, а именно, уравнения вида:

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, H_\varphi x\}, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{L} : D_{loc} \to L_{loc}$ — линейный вольтерров оператор, $\Phi : C_{loc} \times L^m_{loc} \to L_{loc}$ — непрерывный вольтерров оператор, а H_φ — операторы, определяющие специфику исследуемых классов функционально-дифференциальных уравнений.

Хотя основное внимание в работе уделяется исследованию устойчивости уравнений (1.2), мы не могли не затронуть проблемы разрешимости этих уравнений, согласно требованиям прикладных задач. Актуальность этой проблемы не столь ярко выражена в случае уравнений $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$, в которых оператор $\mathcal{F} : D^r[a,b] \to L^p[a,b]$ вполне непрерывен для любого $b > a$ и для некоторых $1 < r \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$. Априорная оценка, следующая из устойчивости заданного решения, влечет существование решения на всей полуоси в силу теоремы о локальной разрешимости и продолжимости решения. Однако, как сказано выше, уравнения с авторегулируемым запаздыванием представляют собой особый класс и для них вопросы устойчивости и разрешимости нужно тесно увязывать друг с другом.

При исследовании устойчивости уравнений (1.2) мы использовали два подхода — классический, при котором устойчивость понимается как непрерывная зависимость решения задачи Коши от начального значения α и начальной функции φ [37], [38], и более специфичный подход, при котором устойчивость — это корректная разрешимость задачи Коши в некотором пространстве $\mathbb{V}$ относительно α и аддитивного возмущения ψ правой части уравнения.

Изучению устойчивости и разрешимости уравнения (1.2) предшествует исследование оператора H_{φ}. Эти свойства, а также общие теоремы об устойчивости и разрешимости нелинейных уравнений $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$, позволили нам получить ряд утверждений о существовании и устойчивости решений уравнений (1.2).

Пункты 4 и 5 статьи посвящёны получению эффективных признаков некоторых классов автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием. При этом используется идея сведения вопроса устойчивости исследуемых нелинейных уравнений к вопросу устойчивости класса линейных уравнений, который был подробно изучен в работах [39], [40], [41], [42]. Результаты, полученные на основании этой идеи, вольно трактуя, можно оформить следующей фразой: автономные уравнения с авторегулируемыми запаздываниями, вообще говоря, обладают подобными свойствами устойчивости, чем соответствующие им уравнения с сосредоточенным запаздыванием.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{R}^n$ — пространство вещественных вектор–столбцов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ с некоторой нормой $|\cdot|$; $S[a,b]$, — пространство функций $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ измеримых по Лебегу $-\infty < a < b \leq \infty$; $L^p[a,b]$, — пространство Лебега, $1 \leq p < \infty$, $-\infty < a < b \leq \infty$: банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых с p-ой степенью (интегрируемых по Лебегу с p-ой степенью) функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^p[a,b]} \stackrel{def}{=} \Big(\int\limits_a^b |z(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}$; L_{loc} — линейное пространство (классов эквивалентности) локально суммируемых функций $z : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$; L^p — пространство Лебега, $1 \leq p < \infty$: банахово пространство (классов эквивалентности) функций $z : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$, суммируемых в степени p и с нормой $\|z\|_{L^p} \stackrel{def}{=} \Big(\int\limits_a^\infty |z(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}$; $L^\infty[a,b]$, — пространство Лебега, $-\infty < a < b \leq \infty$: банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^\infty[a,b]} \stackrel{def}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |z(t)|$; L^∞ — пространство Лебега: банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^\infty} \stackrel{def}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq a} |z(t)|$; L_0^∞ — подпространство всех таких функций $z \in L^\infty$, для каждой из которых существует $\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} z(t) = 0$, с нормой $\|z\|_{L_0^\infty} \stackrel{def}{=} \|z\|_{L^\infty}$; L_γ^∞ — банахово пространство всех таких функций $z : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$,, для каждой из которых справедливо представление $z = y_\gamma$, где $y_\gamma(t) \stackrel{def}{=} y(t)\exp(-\gamma t)$ и $y \in L^\infty$, с нормой $\|z\|_{L_\gamma^\infty} \stackrel{def}{=} \|y\|_{L^\infty}$; $C[a,b]$ — банахово пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C[a,b]} \stackrel{def}{=} \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$, $-\infty < a < b < \infty$; C_{loc} — линейное пространство непрерывных функций $x : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$; $\mathbb{C}$ — банахово пространство ограниченных функций

$x \in C_{loc}$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}} \overset{def}{=} \sup\limits_{t \geq a} |x(t)|$; $\mathbb{C}_0$ — подпространство всех таких функций $x \in \mathbb{C}$, для каждой из которых $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}_0} \overset{def}{=} \|x\|_{\mathbb{C}}$; $\mathbb{C}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, — банахово пространство всех таких функций $x \in C_{loc}$, для каждой из которых справедливо представление $x = y_\gamma$, где $y \in \mathbb{C}$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}_\gamma} \overset{def}{=} \|y\|_{\mathbb{C}}$; $D^p[a,b]$, — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, для которых конечна норма $\|x\|_{D[a,b]} \overset{def}{=} \|\dot{x}\|_{L^p[a,b]} + |x(a)|$; D_{loc} — линейное пространство всех абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций $x : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$; $\mathbb{D}$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x \in \mathbb{C}$, $\dot{x} \in L^\infty$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{D}} \overset{def}{=} \|x\|_{\mathbb{C}} + \|\dot{x}\|_{L^\infty}$; $\mathbb{D}_0$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x \in \mathbb{C}_0$, $\dot{x} \in L_0^\infty$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{D}_0} \overset{def}{=} \|x\|_{\mathbb{C}_0} + \|\dot{x}\|_{L_0^\infty}$; $\mathbb{D}_\gamma$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x \in \mathbb{C}_\gamma$, $\dot{x} \in L_\gamma^\infty$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{D}_\gamma} \overset{def}{=} \|x\|_{\mathbb{C}_\gamma} + \|\dot{x}\|_{L_\gamma^\infty}$; $\mathrm{Lip}(q,[a,b])$ — множество функций $y : [c,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $c \leq a$, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Липшица с константой $q > 0$.

2. Дифференциальные уравнения с авторегулируемым запаздыванием. Вопросы существования решений

Некоторые модели инфекционных заболеваний [43], [6], задача взаимодействия двух тел в электродинамике [3], [44], [45], [46], а также другие задачи [47], [4], [48] приводят к задачам Коши вида:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x[h(t, x(t))]), \quad t \geq 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если } \xi < 0, \quad x(0) = \alpha. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Как показывают примеры, подобные уравнения обладают рядом необычных свойств. В частности, никакая степень гладкости функций f, h, φ не обеспечивает единственности и даже существования локального решения задачи Коши для этого уравнения [11], [12], [13], [14][с. 278], [58][p. 230].

Для подробного изучения задачи Коши (2.1) и ему подобных уравнений введем в рассмотрение оператор $\mathcal{H}_\varphi$, определяемый равенством:

$$(\mathcal{H}_\varphi x)(t) = \begin{cases} x[(\Theta x)(t)], & \text{при } (\Theta x)(t) \geq a, \\ \varphi[(\Theta x)(t)], & \text{при } (\Theta x)(t) < a. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь при всех $b > a$ оператор $\Theta : C[a,b] \to S[a,b]$ непрерывен по мере и $(\Theta x)(t) \leq t$ при почти всех $t \geq a$, и всех $x \in C[a,b]$; функция $\varphi = \mathrm{col}\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} : (\nu, a] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, $\nu = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \operatorname*{vrai\,inf}\limits_{t \geq a} (\Theta x)_i(t)$; записи $x[\Theta x]$ и $\varphi[\Theta x]$ означают, соответственно, $\mathrm{col}\{x_i[(\Theta x)_i(t)]\}, i = 1, ..., n,$ и $\mathrm{col}\{\varphi_i[(\Theta x)_i(t)]\}, i = 1, ..., n.$ Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), (\mathcal{H}_\varphi x)(t)),$$

где оператор $\mathcal{H}_\varphi$ определяется равенством (2.2) при $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$.

Очевидно, что если выполняется условие:

$$\int\limits_\nu^a |\varphi(s)|^p ds < \infty \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \qquad \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{s \in (\nu, a)} |\varphi(s)| < \infty \quad \text{при } p = \infty,$$

то оператор $\mathcal{H}_\varphi$ действует из пространства $C[a,b]$ в пространство $L^p[a,b]$. Однако, вообще говоря, оператор $\mathcal{H}_\varphi : C[a,b] \to L^p[a,b]$ не является непрерывным. Этим и объясняются те необычные свойства уравнения (1.1), о которых говорилось выше. Исследуем условия непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi : C[a,b] \to L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.

Лемма 2.1. *([25]) Оператор $\mathcal{H}_\varphi : C[a,b] \to L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, непрерывен в точке $x \in C[a,b]$ тогда, когда для любой последовательности $\{x^{(k)}\} \subset C[a,b]$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ выполняются неравенства:*

$$\begin{gathered}(x_i(a) - \varphi_i(a)) \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}[\{t \in [a,b] : (\Theta x)_i(t) = a\} \cup \\ \cup \{t \in [a,b] : (\Theta x^{(k)})_i(t) < a\}] = 0, \quad i = 1, ..., n.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. *Подчеркнем, что условие (2.3) непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi : C[a,b] \to L^p[a,b]$ необходимо и достаточно лишь в случае $1 \le p < \infty$. Если же $p = \infty$, то условия непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi$ существенно у́же. Следующий ниже простой пример иллюстрирует ситуацию, когда последовательность элементов, сходящихся в $C[a,b]$, отображается оператором $\mathcal{H}_\varphi$ в последовательность, которая сходится в $L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, но уже не сходится в $L^\infty[a,b]$. Пусть $(\Theta x)(t) = t - |x(t)|$, $t \in [0,2]$; $\varphi(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$; $x^{(k)}(t) \equiv 1 - 1/k$, $k = 1, 2, ...,$ $x^{(0)}(t) \equiv 1$. Тогда согласно (2.2) имеем:*

$$(\mathcal{H}_\varphi x^{(k)})(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1 - 1/k), \\ 1 - 1/k, & t \in [1 - 1/k, 2]; \end{cases} \quad (\mathcal{H}_\varphi x^{(0)})(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1), \\ 1, & t \in [1,2]; \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{H}_\varphi x^{(k)} - \mathcal{H}_\varphi x^{(0)}\|_{L^p[0,2]} = \lim_{k\to\infty} (1 + 1/k)(1/(k^p)) = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{H}_\varphi x^{(k)} - \mathcal{H}_\varphi x^{(0)}\|_{L^\infty[0,2]} = \lim_{k\to\infty} (1 - 1/k) = 1.$$

Ранее оператор $\mathcal{H}_\varphi$ исследовался в случае, когда $\Theta : C[a,b] \to S[a,b]$ является оператором Немыцкого, порожденным функцией $h(t,x)$, удовлетворяющей условиям Каратеодори, то есть $h(\cdot, x)$ измерима при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $h(t, \cdot)$ непрерывна при почти всех $t \ge a$.

Достаточные условия, существенно близкие к условиям (2.3) непрерывности такого оператора впервые получил М.Е. Драхлин [15]. *Критерий непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi : C[a,b] \to L^p[a,b]$ в скалярном случае доказал С.А. Гусаренко* [49]. *В работе С.А. Гусаренко* [25] *рассмотрен общий случай оператора Θ.*

В дальнейшем будем считать, что $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$, где функция $h(t,x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

При исследовании уравнений с авторегулируемым запаздыванием, не удовлетворяющих условию непрерывной стыковки: $x(a) = \varphi(a)$, мы будем использовать следующее утверждение сформулированное без доказательства в работе [19].

Лемма 2.2. *([19]) Пусть $\Omega_b \subset D^r[a,b]$, $1 < r \le \infty$, такое открытое множество, что для всех $x \in \Omega_b$ выполнено условие:*

$$\operatorname{mes}\{t \in [a,b] : h_i(t, x(t)) = a\} = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Тогда сужение оператора $\mathcal{H}_\varphi : D^r[a,b] \to L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, *определенного равенством (2.2), на множество* Ω_b *непрерывно в каждой точке* $x \in \Omega_b$, *и образ всякого ограниченного (в метрике* $D^r[a,b]$ *) множества из* Ω_b *относительно компактен в* $L^p[a,b]$.

Это утверждение следует из леммы 2.1, а также из известного факта полной непрерывности оператора вложения пространства $D^r[a,b]$ в пространство $C[a,b]$ при $1 \le r \le \infty$.

Перейдем к рассмотрению уравнения

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\} \tag{2.4}$$

в следующих предположениях: линейная задача Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(a) = \alpha$ однозначно разрешима при любых $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $f \in L_{loc}$, и ее решение представимо в виде формулы Коши:

$$x(t) = \int_a^t C(t,s)f(s)ds + X(t)\alpha;$$

оператор $\Phi : C_{loc} \times L_{loc} \to L_{loc}$ вольтерров, причем при всех $b > a$ соответствующий ему оператор $\Phi_b : C[a,b] \times L^p[a,b] \to L^r[a,b]$, $1 \le p < \infty$, $1 < r \le \infty$, непрерывен; оператор $\mathcal{H}_\varphi : C_{loc} \to L_{loc}$ определяется равенством (2.2) при $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$.

При изучении уравнения (2.4) можно руководствоваться своеобразным “геометрическим” принципом, подсказанным леммой 2.2, а именно:

> *Пусть функции* $h_i(t,x)$ *непрерывны, и пусть выбрано открытое множество* Ω *таких функций* x, *для которых выполнено одно из условий: 1) графики функций* x *не имеют общих точек с гиперповерхностями, определяемыми равенствами* $h_i(t,x) = a, i = 1,...,n$; *2) графики функций* x *пересекают эти гиперповерхности под ненулевым углом. Тогда оператор* $\mathcal{F}_b : D^r[a,b] \to L^p[a,b]$, *определяемый равенством* $\mathcal{F}_b x = \Phi_b\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}$ *является вполне непрерывным на множестве:*
>
> $$\Omega_b = \{x_b \in D^r[a,b] : x_b(t) = x(t), t \in [a,b], x \in \Omega\}$$
>
> *при всех* $b > a$. *Если при этом априорно можно утверждать, что множество решений уравнения (2.4) содержится в множестве* Ω, *то для данного уравнения справедливы теоремы* [50][с. 145], [14][с. 277], [20], [51][§ 2.4] *и* [58][7.3] *о локальной разрешимости и продолжаемости решения.*

В общем случае, когда функция $h(t,x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, данный принцип в приведенной форме не применим. Однако, использование аналогичных “геометрических” представлений для уяснения задачи возможно и в этом случае. В качестве иллюстрации приведем следующую теорему о разрешимости задачи Коши:

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}, \quad x(a) = \alpha. \tag{2.5}$$

Предположим, что для решений уравнения $\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}$ выполняется априорное неравенство

$$|\dot{x}(t)| \le m(t, |x(a)|), \tag{2.6}$$

где

$$m : [a,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty), \quad m(\cdot, s) \in L^p, \quad 1 < p \le \infty.$$

Это означает, что данное уравнение не может иметь решений, не удовлетворяющих неравенству (2.6).

Предположим также, что для всякого $i = 1, ..., n$ выбрано не более чем конечное число измеримых функций $\rho_i^j : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, ..., m_i$, таких, что почти для всех $t \geq a$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих равенству $h_i(t, x) = a$ найдется $j = 1, ..., m_i$, для которого $x_i = \rho_i^j(t)$.

Теорема 2.1. ([28]) *Пусть найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $j = 1, ..., m_i$; $i = 1, ..., n$ выполняется хотя бы одно из условий:*

а) $|\rho_i^j(t) - \alpha| \geq \int\limits_a^t (m(s, |\alpha|) + \varepsilon) ds$ *почти при всех* $t \geq a$,

б) существуют числа $a_i^{j_k} : a = a_i^{j_0} < ... < a_i^{j_k} < \infty$; $k = 0, 1, ...,$ $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m_i$ такие, что при всех $t_1, t_2 \in [a_i^{j_k}, a_i^{j_{k+1}}]$, $t_2 \geq t_1$, $k = 0, 1, ...$, имеет место неравенство

$$|\rho_i^j(t_2) - \rho_i^j(t_1)| \geq \int\limits_{t_1}^{t_2} (m(s, |\alpha|) + \varepsilon) ds.$$

Тогда задача (2.5) имеет хотя бы одно решение.

Для скалярного случая уравнения (1.1) аналогичная теорема была доказана Е.С. Жуковским [21], [52], но другими средствами.

Замечание 2.2. *Ограничения, накладываемые на h, без использования априорной информации о решениях, носят чрезвычайный характер. В частности, неравенство $h(t, x) \leq t$, обеспечивающее запаздывание аргумента и, следовательно, вольтерровость оператора $\mathcal{F} = \Phi\{\mathcal{I}, \mathcal{H}_\varphi\}$ ($\mathcal{I}$ — тождественный оператор) сужает класс рассматриваемых уравнений, если требовать его выполнение при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Наличие же хорошей апиорной оценки решения позволяет накладывать ограничения на h лишь в достаточно малой окрестности предполагаемого решения.*

Кроме того, что продемонстрированного подхода к проблеме разрешимости уравнения (2.4), возможны и другие подходы. Например, в работе [11] для некоторого класса уравнений $\dot{x} = \mathcal{F}_b x$ с оператором $\mathcal{F}_b : D^r[a, b] \to L^p[a, b]$, не обладающим свойством вольтерровости, достаточное условие разрешимости задачи Коши было получено на основе метода монотонных операторов.

Другой достаточно общий способ исследования разрешимости уравнения (1.1) предложил С.А. Гусаренко в работах [23], [24], [26]. В основе этого подхода также лежат теоремы о локальной разрешимости и продолжаемости решений уравнения $\dot{x} = \mathcal{F}_b x$ с вольтерровым вполне непрерывным оператором $\mathcal{F}_b$. Однако, если в первом случае такой оператор $\mathcal{F}_b$ определяется для рассматриваемой задачи единственным образом на некотором множестве Ω_b функций, заданных на отрезке $[a, b]$, то теперь этот оператор определяется каждый раз заново в зависимости от точки $\tau \in [a, b]$ и значения в этой точке локального решения $x(t)$, заданного на $[a, \tau]$. Применим такой подход к изучению уравнения (2.4).

Пусть $x(t)$ — локальное решение задачи (2.5), заданное на $[a, \tau]$, $t \geq a$. В случае $\tau = a$ в качестве $x(t)$ полагаем значение $x(a)$ в этой точке.

Определим операторы $\mathcal{H}_\tau^{i_1 \ldots i_n} : D^r[\tau, \tau + \delta] \to L^p[\tau, \tau + \delta]$, $1 < r \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, где $i_k = 0$ или 1 при всех $k = 1, ..., n$, так, что $k-$ая компонента элемента $\mathcal{H}_\tau^{i_1 \ldots i_n} y$ определяется равенством:

$$(\mathcal{H}_\tau^{i_1 \ldots i_n} y)_k(t) = \begin{cases} x_k(a) & \text{при } h_k(t, y(t)) < a, \\ x_k[h_k(t, y(t))] & \text{при } a \leq h_k(t, y(t)) \leq \tau, \\ y_k[h_k(t, y(t))] & \text{при } h_k(t, y(t)) > \tau; \end{cases}$$

если $i_k = 1$, и равенством:

$$(\mathcal{H}_\tau^{i_1\dots i_n} y)_k(t) = \begin{cases} \varphi[h_k(t, y(t))] & \text{при } h_k(t, y(t)) < a, \\ \varphi(a) & \text{при } h_k(t, y(t)) \geq a; \end{cases}$$

если $i_k = 0$.

В силу леммы 2.1 операторы $\mathcal{H}_\tau^{i_1\dots i_n}$ являются вполне непрерывными, операторы $\mathcal{F}_\tau^{i_1\dots i_n} : D^r[\tau, \tau+\delta] \to L^r[\tau, \tau+\delta]$, определенные равенствами: $(\mathcal{F}_\tau^{i_1\dots i_n} x)(t) = (\Phi_\tau\{x, \mathcal{H}_\tau^{i_1\dots i_n} x\})(t)$, $t \in [\tau, \tau+\delta]$, вольтерровы и вполне непрерывны. Следовательно, по теореме о локальной разрешимости существуют заданные на некотором отрезке $[\tau, \tau+\delta^0]$, $\delta^0 \leq \delta$, локальные решения $x^{(i_1\dots i_n)}$, соответственно, уравнений

$$(\mathcal{L}_\tau x)(t) = (\mathcal{F}_\tau^{i_1\dots i_n} x)(t), t \in [\tau, \tau+\delta].$$

Теорема 2.2. ([28]) *Если найдется такой набор чисел $i_1, ..., i_n$, где $i_k = 0$ или 1 при $k = 1, ..., n$, что для некоторого $\delta^0 > 0$ система*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\tau x = \mathcal{F}_\tau^{i_1\dots i_n} x, \\ h_k(t, x(t)) < a, & \textit{если } i_k = 0, \\ h_k(t, x(t)) \geq a, & \textit{если } i_k = 1; \end{cases}$$

разрешима в пространстве $D^r[\tau, \tau+\delta^0]$, то решение x задачи (2.5), заданное на $[a, \tau]$, является продолжаемым.

3. Устойчивость уравнений с авторегулируемым запаздыванием

Изучение асимптотических свойств уравнения (1.1) вызвано многочисленными прикладными задачами. Например, К.Л. Кук [5] исследовал проблему устойчивости уравнения

$$\dot{x}(t) = -ax(t - r(x(t))),$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } \xi < 0, \quad x(0) = \alpha,$$

описывающего модель инфекционных заболеваний с постоянным иммунитетом, где $x(t)$ — количество источников инфекции, a — коэффициент, определяющий размерность контактов, и $h(t, x(t)) = t - r(x(t))$ — инкубационный период.

Разнообразные признаки устойчивости тривиального решения, полученные для подобных уравнений [4], [7], [8], исходят из априорного предположения, что соответствующая задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима при всех достаточно малых $|\alpha|$. При $\alpha = \varphi(a)$ (а именно такой случай рассматривают авторы упомянутых работ) в силу леммы 2.1 для данной задачи Коши имеют место теоремы о локальной разрешимости и продолжаемости решения. Однако, без условия непрерывной стыковки: $x(0) = \varphi(a)$ признаки упомянутых работ не гарантируют существования решения на $[0, \infty)$ и, таким образом, носят априорный характер.

Вывод: вопросы разрешимости и устойчивости уравнений с авторегулируемым запаздыванием следует изучать в тесной связи друг с другом.

Будем рассматривать уравнение

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_0 x\} \tag{3.1}$$

в следующих предположениях: $\mathcal{L} : D_{loc} \to L_{loc}$ — линейный вольтерров оператор; оператор $\mathcal{H}_0 \stackrel{def}{=} \mathcal{H}_\varphi : C_{loc} \to L_{loc}$ определяется равенством (2.2) при $\varphi(\xi) \equiv 0$, $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$; оператор Немыцкого $\mathcal{N}_h : \mathbb{C} \to L^\infty$, порожденный функцией $h(t,x)$, непрерывен; существуют такие $\delta^0 > 0$, $\Delta > 0$, что $0 \le t - h_i(t,x) \le \Delta$ при почти всех $t \ge a$ и при всех $x \in [-\delta^0, \delta^0]$, $i = 1, ..., n$; оператор $\Phi : C_{loc} \times L_{loc} \to L_{loc}$ вольтерров и $\Phi\{0,0\} = 0$.

Прежде чем исследовать (локально) $(B,V)-$ устойчивость уравнения (3.1) (см., например, [53], [50][§5.3], [14][§2.3], [55][§5.2], [29], [30], [31], [58][2.4], [32], [33], [56][гл. III, §4], [57][с. 370]) необходимо выяснить условия действия и непрерывности оператора $\mathcal{H}_0 : \mathbb{C} \to B$. Одно из затруднений здесь состоит в выборе пространства B. Ведь в наиболее естественном случае $B = L^\infty$ оператор $\mathcal{H}_0 : \mathbb{C} \to B$ непрерывен только при очень жестких условиях (см. замечание 2.1); если же $B = L^p$, $1 \le p < \infty$, то действие оператора $\mathcal{H}_0$ из пространства $\mathbb{C}$ в пространство B нарушается для самых простых $h(t,x)$.

Лемма 3.1. *([28]) Пусть для всех элементов x множества $\Omega \subset \{x \in \mathbb{C} : \|x\|_{\mathbb{C}} \le \delta^0\}$ выполнено условие:*

$$\mathrm{mes}\{t \in [a, a+\Delta] : h(t, x(t)) = a\} = 0.$$

Тогда на этом множестве оператор $\mathcal{H}_0$ непрерывно действует из пространства $\mathbb{C}$ в пространство $\mathbb{B}^p_\gamma$ функций $z : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$z(t) = \begin{cases} u(t), \quad t \in [a, a+\Delta], & \displaystyle\int_a^{a+\Delta} |u(s)|^p ds < \infty, \quad 1 \le p < \infty; \\ \nu(t), \quad t \in (a+\Delta, \infty), & \displaystyle\operatorname*{vrai\,sup}_{t > a+\Delta} |\nu(t)| e^{\gamma t} < \infty, \quad \gamma > 0; \end{cases}$$

с нормой $\|z\|_{\mathbb{B}^p_\gamma} = \|u\|_{L^p[a,a+\Delta]} + \|\nu\|_{L^\infty_\gamma(a+\Delta,\infty)}$.

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция $h = \mathrm{col}\{h_1, ..., h_n\} : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $(\mathcal{P}_\Delta)$, если существуют такие постоянные Δ, δ_1, k_1, $k_2 > 0$, что выполняются неравенства:*

$$|h_i(t^1, x) - h_i(t^2, x)| \ge k \cdot |t^1 - t^2|, \quad i = 1, ..., n,$$

при почти всех t^1, $t^2 \in [a, a+\Delta]$ и при всех $|x| \le \delta_1$;

$$|h(t, x^1) - h(t, x^2)| \le k_2 \cdot |x^1 - x^2|$$

при почти всех $t \ge a$ и при всех $|x^i| \le \delta_1$, $i = 1, 2$.

Лемма 3.2. *([28]) Пусть функция $h(t,x)$ непрерывна по обоим аргументам и удовлетворяет условию $(\mathcal{P}_\Delta)$. Тогда существуют такие постоянные $\delta > 0$, $q > 0$, $l > 0$, $\gamma > 0$, что для любых $x^i \in \mathbb{C}_\gamma$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих условиям:*

$$\|x^i\|_{\mathbb{C}_\gamma} < \delta, \quad x^i \in \mathrm{Lip}(q, [a, a+\Delta]),$$

выполняется неравенство:

$$\|\mathcal{H}_0 x^1 - \mathcal{H}_0 x^2\|_{\mathbb{B}^1_\gamma} \le l \cdot \|x^1 - x^2\|_{C_\gamma},$$

где $\mathbb{B}_\gamma^1$ *— банахово пространство функций* $z:[a,\infty)\to\mathbb{R}^n$ *, представимых в виде:*

$$z(t)=\begin{cases}u(t), & t\in[a,a+\Delta],\\ \nu(t), & t>a+\Delta;\end{cases}$$

$$u\in B_1=L^1[a,a+\Delta],\quad \nu\in B_2=L_\gamma^\infty(a+\Delta,\infty).$$

Теорема 3.1. *([28]) Пусть линейное уравнение* $\mathcal{L}x=f$ $(\mathbb{B}_\gamma^1,\mathbb{D}_\gamma)$*— устойчиво, где* $\mathbb{B}_\gamma^1$ *— банахово пространство, определенное в лемме 3.2. Пусть также оператор* $\Phi:\mathbb{C}_\gamma\times\mathbb{B}_\gamma^1\to\mathbb{B}_\gamma^1$ *обладает свойством:* $\Phi\{0,0\}=0$ *и для любого* $k>0$ *найдется такое* $\delta>0$ *, что*

$$\|\Phi\{u^1,\nu^1\}-\Phi\{u^2,\nu^2\}\|_{\mathbb{B}_\gamma^1}\le k(\|u^1-u^2\|_{\mathbb{C}_\gamma}+\|\nu^1-\nu^2\|_{\mathbb{B}_\gamma^1})$$

при $\|u^i\|_{\mathbb{C}_\gamma}\le\delta$ *,* $\|\nu^i\|_{\mathbb{B}_\gamma^1}\le\delta$ *,* $i=1,2$ *; пусть, наконец, функция* $h:[a,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию* $(\mathcal{P}_\Delta)$ *. Тогда уравнение (3.1) локально* $(\mathbb{B}_\gamma^1,\mathbb{D}_\gamma)$*— устойчиво в окрестности тривиального решения.*

Замечание 3.1. *Так как пространство* $L_\gamma^\infty[a,a+\Delta]$ *непрерывно вложено в пространство* $L^1[a,a+\Delta](\|x\|_{L^1[a,a+\Delta]}\le\exp(-\gamma a)\,[1-\exp(-\gamma\Delta)]/\gamma\,\|x\|_{L_\gamma^\infty[a,a+\Delta]}$ *, то и пространство* L_γ^∞ *непрерывно вложено в пространство* $\mathbb{B}_\gamma^1$*. Следовательно,* $(\mathbb{B}_\gamma^1,\mathbb{D}_\gamma)$ *-устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x=f$ *влечет* $(L_\gamma^\infty,\mathbb{D}_\gamma)$ *-устойчивость этого уравнения.*

Естественным образом возникает вопрос о связи $(\mathbb{B},\mathbb{V})$-устойчивости с классическими понятиями устойчивости по Ляпунову, а также асимптотической и экспоненциальной устойчивостью. Однако, для уравнения с авторегулируемым запаздыванием введение, например, понятия устойчивости по Ляпунову, как непрерывной зависимости решения задачи Коши

$$\mathcal{L}x=\Phi\{x,\mathcal{H}_\varphi x\},\quad x(a)=\alpha \tag{3.2}$$

от α и φ, сопряжено с определенными трудностями. Дело в том, что известные утверждения о существовании и единственности решения уравнений с авторегулируемым запаздыванием существенно используют некоторые ограничения на φ (условие Липшица — у Р. Драйвера [3], условие Осгуда — у Л.А. Животовского [9]). Малые возмущения в равномерной метрике начальной функции φ могут привести к утрате единственности решения задачи (3.2). В этой ситуации представляются возможными два выхода:

1) рассматривать возмущения φ в более сильной, чем равномерная, метрике.

2) исключить из определения устойчивости по Ляпунову (асимптотической, экспоненциальной) требование единственности решения задачи (3.2) при малых возмущениях φ.

Второй путь нам кажется более естественным.

Итак, пусть, по-прежнему, $0\le t-h_i(t,x)\le\Delta$, $i=1,...,n$, при почти всех $t\ge a$ и при всех $|x|\le\delta^0$, где δ^0,Δ — некоторые положительные постоянные.

Определение 3.2. *Тривиальное решение уравнения (3.1) назовем устойчивым по Ляпунову, если для всякого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *, что задача (3.2) имеет хотя бы одно решение, как только* $|\alpha|<\delta$ *,* $\sup\limits_{t\in(-\Delta,0)}|\varphi(t)|<\delta$ *, и для каждого такого решения* x *выполняется неравенство:* $\sup\limits_{t\ge0}|x(t)|<\varepsilon$ *. Если при этом* $\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)|=0$ *для всех* x *, то тривиальное решение назовем асимптотически устойчивым. Если, кроме того, существуют такие* $\gamma>0$ *,* $\mathcal{N}_{\alpha,\varphi}>0$ *, что* $|x(t)|\le\mathcal{N}_{\alpha,\varphi}\cdot\exp(-\gamma t)$ *для всех* x *, то тривиальное решение будем называть экспоненциально устойчивым.*

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.2. *([28]) Пусть уравнение $\mathcal{L}x = f$ $(L^\infty, \mathbb{D})$-устойчиво, $((L_0^\infty, \mathbb{D}_0)$-устойчиво, $(L_\gamma^\infty, \mathbb{D}_\gamma)$-устойчиво, $\gamma > 0$); оператор $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, где $\mathbb{V} = \mathbb{C}$, $\mathbb{B} = L^\infty$ ($\mathbb{V} = \mathbb{C}_0$, $\mathbb{B} = L_0^\infty$; $\mathbb{V} = \mathbb{C}_\gamma$, $\mathbb{B} = L_\gamma^\infty$) обладает свойством: $\Phi\{0,0\} = 0$ и для любого $k > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что справедливо неравенство:*

$$\|\Phi\{u, \nu\}\|_{\mathbb{B}} \leq k(\|u\|_{\mathbb{V}} + \|\nu\|_{\mathbb{B}})$$

при всех $u \in \mathbb{V}$, $\nu \in \mathbb{B}$, $\|u\|_{\mathbb{V}} \leq \delta$, $\|\nu\|_{\mathbb{B}} \leq \delta$.

Пусть также функция $h : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $(\mathcal{P}_\Delta)$. Тогда тривиальное решение уравнения (3.1) устойчиво по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально).

З а м е ч а н и е 3.2. *Теоремы 3.1 и 3.2 являются дальнейшим развитием теорем 5.2.2, 5.2.4 и 5.2.5 из книги* [55], *см. также статьи* [53], [54].

4. Признаки устойчивости одного класса “псевдолинейных” уравнений с авторегулируемым запаздыванием

Общая теория устойчивости, изложенная в пункте третьем, хотя и охватывает значительный класс уравнений с авторегулируемым запаздыванием, применительно к конкретному типу уравнений, иногда оказывается не достаточно эффективной. Пытаясь восполнить этот пробел, настоящий пункт четвертый мы посвящаем получению эффективных признаков той или иной устойчивости некоторых классов исследуемых уравнений, используя специальные приемы. При этом формулируемые признаки мы, по возможности, будем сравнивать с результатами работ, в которых подобные уравнения уже изучались.

Рассмотрим скалярное уравнение:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = -\sum_{k=1}^{m} b_k (H_\varphi^k x)(t), \quad t \geq 0, \tag{4.1$^\varphi$}$$

в котором операторы $H_\varphi^k : C_{loc} \to L_{loc}$ определяются равенствами:

$$(H_\varphi^k x)(t) = \begin{cases} x[h_k(t, x(t))], & \text{при } h_k(t, x(t)) \geq 0, \\ \varphi[h_k(t, x(t))], & \text{при } h_k(t, x(t)) < 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где функции $h_k : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Каратеодори, и существуют константы $\omega > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $0 \leq t - h_k(t, x) \leq \omega$ при $|x| \leq \delta_0$ и при почти всех $t \geq 0$; функция $\varphi : [-\omega, 0) \to \mathbb{R}$ непрерывна; $b_k \geq 0$.

Через (4.1^0) будем обозначать уравнение (4.1^φ) при $\varphi \equiv 0$; $b = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k$.

Л е м м а 4.1. *([28]) Для задачи*

$$\dot{x}(t) + ax(t) = -\sum_{k=1}^{m} b_k (H_\varphi^k x)(t) + \psi(t), \quad t \in [0, \infty), \quad x(0) = \alpha$$

при $\psi \in L^\infty$ справедлива следующая априорная оценка решений на отрезке $[0, \omega]$:

$$|x(t)| \leq (|\alpha| + b\omega \sup_{s \in [-\omega, 0)} |\varphi(s)| + \omega \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [0, \omega]} |\psi(s)|) \exp(|a| + b)t.$$

Прежде чем формулировать основное утверждение, введем в рассмотрение класс $\mathcal{G}^{\omega}_{a,b}$ всех линейных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + ax(t) = -\sum_{k=1}^{m} b_k x(g_k(t)), \quad t \geq \omega, \\ x(\xi) = 0, \quad \text{если } \xi < \omega, \end{gathered} \tag{4.3}$$

в которых запаздывания $t - g_k(t)$ измеримы и уловлетворяют неравенствам $0 \leq t - g_k(t) \leq \omega$, $k = 1, .., m$. В работе [41] В.В. Малыгиной показано, что задача устойчивости любого уравнения (4.3) из класса $\mathcal{G}^{\omega}_{a,b}$ сводится к такой же задаче для некоторого так называемого “test-уравнения”. В той же работе построена область $\mathcal{D}$ устойчивости для test-уравнения в терминах параметров a, b, ω и получены эффективные признаки той или иной устойчивости уравнений (4.3).

Т е о р е м а 4.1. *([28]) Пусть функции $h_k(t,x)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{P}_\omega)$ (см. определение 3.1). Если точка $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \overline{\mathcal{D}}$, то тривиальное решение уравнения (4.1^0) устойчиво по Ляпунову. Если $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \mathcal{D}$, то тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво, где устойчивость по Ляпунову и экспоненциальная устойчивость понимаются в смысле определения 3.2.*

З а м е ч а н и е 4.1. *Уравнение*

$$\dot{x}(t) = -bx(t - r(t, x(t))), \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

описывающее модель инфекционных заболеваний [43], [5], [7], *является частным случаем уравнения (4.1$^\varphi$). В предложении непрерывной стыковки: $x(0) = \varphi(0)$ К.Л. Кук, Дж.А. Йорк получили достаточное условие асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (4.4): $b\omega < 3/2$, где ω — такая постоянная, что $0 \leq r(t,x) \leq \omega$ при всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.*

Наша теорема дает то же условие экспоненциальной устойчивости тривиального решения уравнения (4.1^0). При этом мы ослабляем ограничения на функцию $r(t,x)$ и заменяем требование непрерывной стыковки условием $(\mathcal{P}_\omega)$.

Исследуем, наконец, вопрос о $(\mathbb{B}, \mathbb{V})-$ устойчивости тривиального решения уравнения (4.1^0). Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) + ax(t) = -\sum_{k=1}^{m} b_k (H_0^k x)(t) + \psi(t), \quad x(0) = \alpha,$$

где операторы $H_0^k : C \to L_{loc}$ определяются равенствами (4.2) при $\varphi \equiv 0$.

Т е о р е м а 4.2. *([28]) Пусть функции $h_k(t,x)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{P}_\omega)$. Если точка $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \mathcal{D}$, то существует постоянная $\gamma_0 > 0$ такая, что тривиальное решение уравнения (4.1^0) $(L^\infty_\gamma, \ \mathbb{C}_\gamma)-$ устойчиво для всех $\gamma \in [0, \gamma_0)$.*

5. Теоремы о первом приближении для скалярных автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием

Теоремы из пункта три об устойчивости по внешнему виду хотя и напоминает известные теоремы Ляпунова о первом приближении [56], [57], [38], однако, в действительности существенно отличаются от последних. Теоремы Ляпунова для обыкновенных дифференциальных [56], [57] или функционально-дифференциальных [38] уравнений дают методику исследования устойчивости: с помощью линеаризации нелинейной части уравнения вопрос об устойчивости нелинейного уравнения сводится к вопросу об устойчивости линейного уравнения, для которого уже доказаны эффективные признаки устойчивости. В нашем случае не удается линеаризовать нелинейные части уравнений, а потому вышеупомянутая методика здесь не применима. В этом параграфе заменяя процесс линеаризации уравнения его, так сказать, "псевдолинеаризацией", а также используя результаты пункта четвертого, мы получили некоторые аналоги теорем о первом приближении для скалярных, автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием.

Рассмотрим, наконец, аналогичные уравнения с авторегулируемым запаздыванием:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x(t), x[h_1(t, x(t))], ..., x[h_m(t, x(t))]), t \geq 0, \\ x(\xi) = 0, \quad \xi < 0, \end{gathered} \tag{5.1}$$

предполагая, что функции $h_k : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Каратеодори и неравенствам $0 \leq t - h_k(t, x) \leq \omega$ при всех $|x| \leq \delta_0$ и при почти всех $t \geq 0$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число; функция $f(u^0, u^1, ..., u^m)$ в некоторой окрестности точки $(0, ..., 0)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам и $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

Введем обозначения

$$a = -\frac{\partial f(0, ..., 0)}{\partial u^0}, \quad b_k = -\frac{\partial f(0, ..., 0)}{\partial u^k}, \quad k = 1, ..., m.$$

Тогда уравнение (5.1) можно переписать в виде:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k (H_0^k x)(t) = f^*(x(t), (H_0^1 x)(t), ..., (H_0^m x)(t)),$$

где функция $f^*(u^0, u^1, ..., u^m)$ обладает свойством:

$$f^*(0, 0, ..., 0) = \frac{\partial f^*(0, 0, ..., 0)}{\partial u^k} = 0, \quad k = 0, ..., m.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. ([28]) *Пусть точка $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \mathcal{D}$, а функции $h_k(t, x)$, $k = 1, ..., m$, удовлетворяет условию $(\mathcal{P}_\omega)$, Тогда тривиальное решение уравнения (5.1) экспоненциально устойчиво и локально $(L_\gamma^\infty, \mathbb{C}_\gamma)$-устойчиво при $0 \leq \gamma < \gamma_0$, где $\gamma_0 > 0$ — некоторое число.*

Список литературы

1. Л.Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971, 296 с.

2. А. Д. Мышкис, "О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом", *Успехи мат. наук*, **32**:2 (1977), 173–202.

3. R. D. Driver, “Existence theory for a delay-differential system”, *Contribut. to Different. Equat.*, **1**:1 (1963), 317–336.

4. K. L. Cooke, “Functional differential equations close to differential equations”, *Bul. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 285–288.

5. K. L. Cooke, “Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **19** (1967), 160–179.

6. B. Stefan, “Asymptotic of a functional differential equation with bounded lag”, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 272–279.

7. J. A. Yorke, “Asymptotic stability for one-dimensional differential-delay equations”, *J. Different. Equat.*, **7**:1 (1970), 189–202.

8. T. Yoneyama, “On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **125**:1 (1987), 161–173.

9. Л. А. Живогтовский, “О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения и его производной”, *Дифференц. уравнения*, **5**:5 (1969), 880–889.

10. В. П. Рудаков, “К вопросу о существовании решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения”, *Дифференц. уравнения*, **8**:11 (1971), 2013–2018.

11. М. Б. Ермолаев, “О разрешимости задачи Коши для некоторого класса уравнений с отклонением, зависящим от неизвестной функции”, *Изв. вузов. Математика*, 1993, № 5 (372), 46–49.

12. М. Б. Ермолаев, “Об устойчивости уравнений с запаздыванием, зависящим от неизвестной функции”, *Изв. вузов. Математика*, 1994, № 6 (385), 60–63.

13. N. V. Azbelev, *Recent trends in the theory of nonlinear functional differential equations*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts. Editor V. Lakshmikantham (Tampa, Florida, August 19-26, 1992), Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1996, 1807–1814.

14. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально–дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М.; Ижевск, 2002, 384 с.

15. М. Е. Драхлин, “О некоторых топологических свойствах одного интегрального оператора”, *Дифференц. уравнения*, **8**:4 (1972), 721–724.

16. М. Е. Драхлин, “О нелинейном операторе внутренней суперпозиции в пространстве измеримых функций”, *Краевые задачи*, Пермь, 1982, 157–161.

17. М. Е. Драхлин, Т. К. Плышевская, “Существование, единственность и сходимость последовательных приближений для дифференциальных уравнений с запаздыванием”, *Дифференц. уравнения*, **9**:9 (1973), 1583–1592.

18. А. И. Булгаков, В. П. Максимов, “Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами”, *Дифференц. уравнения*, **17**:8 (1981), 1362–1374.

19. В. П. Максимов, “Разрешимость некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений с отклонением аргумента, зависящим от решения”, *Краевые задачи*, Пермь, 1982, 6–9.

20. В. П. Максимов, “Разрешимость уравнений с локально-вольтерровыми операторами”, *Краевые задачи*, Пермь, 1984, 12–15.

21. Е. С. Жуковский, “К вопросу об уравнений с запаздыванием, зависящим от неизвестной функции”, *Краевые задачи*, Пермь, 1982, 9–12.

22. Е. С. Жуковский, “О дифференциальных неравенствах и оценках решений одного функционально-дифференциального уравнения”, *Краевые задачи*, Пермь, 1983, 22–24.

23. С. А. Гусаренко, “О функционально-дифференциальных уравнений с нелинейным оператором суперпозиции”, *Краевые задачи*, Пермь, 1984, 68–72.

24. С. А. Гусаренко, “О продолжаемости решений функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции”, *Дифференц. уравнения*, **21**:12 (1985), 2171–2173.

25. С. А. Гусаренко, “О нелинейном операторе внутренней суперпозиции”, *Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика*, Пермь, 1994, 51–54.

26. С. А. Гусаренко, Е. С. Жуковский, В. П. Максимов, “К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами”, *Докл. АН СССР*, **287**:2 (1986), 268–272.

27. Н. В. Азбелев, М. Б. Ермолаев, В. В. Малыгина, “Устойчивость одного класса существенно нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом”, *Успехи мат. наук*, **49**:4 (298) (1994), 94.

28. М. Б. Ермолаев, *Устойчивость решений некоторых классов существенно нелинейных функционально-дифференциальных уравнений*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Пермь, 1995, 104 с.

29. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Функционально-дифференциальные уравнения и теория устойчивости уравнений с последействием”, *Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения (специальный выпуск)*, Пермь, 2002, 52–69.

30. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Современная теория устойчивости уравнений с последействием: обзор идей и результатов”, *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, ред. В.А. Треногин, А.Ф. Филиппов, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 289–304.

31. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Современная теория функционально-дифференциальных уравнений и некоторые прикладные задачи”, *Оптимизация, управление, интеллект*, **2**:10 (2005), 289–304.

32. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов, “Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2009, № 1, 3–23.

33. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, “Theory of functional differential equations and applications”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.

34. F. Hartung, J. Turi, *Linearized stability in functional differential equations with state-dependent delays*, Proceedings of the International Dynamical Systems and Differential Equation (May 18 - 21, 2000, Atlanta, USA), Added volume Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2000, 416–425.

35. A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, E. Litsyn, “On equations with delay depending on solution”, *Nonlinear Analysis*, **49** (2002), 689–701.

36. I. Győri, F. Hartung, “Exponential stability of a state-dependent delay system”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**:4 (2007), 773–791.

37. А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, 2-е изд., Наука, М., 1972, 352 с.

38. Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984, 421 с.

39. В. В. Малыгина, “Об экспоненциальной оценке функции Коши”, *Дифференц. уравнения*, **28**:6 (1992), 1082–1084.

40. В. В. Малыгина, “Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом”, *Дифференц. уравнения*, **28**:10 (1992), 1716–1723.

41. В. В. Малыгина, “Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием”, *Изв. вузов. Математика*, 1993 (372), № 5, 72–85.

42. T. Amemiya, “On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1-st order”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **142**:1 (1989), 13–25.

43. K. L. Cooke, *Functional differential systems: some models and parturbation problems*, Int. Symp. Diff. Equat. Dynamic. Systems, New York: Acad. Press, 1965, 165–183.

44. Р. Д. Драйвер, *Топологии для уравнений нейтрального типа и классическая электродинамика*, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (Киев, 23–26 сентября 1975 г.), : Наукова думка, Киев, 1977, 113–127.

45. S. P. Travis, “A one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics”, *SIAM J. Appl. Math.*, **28** (1975), 611–632.

46. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, “Об одном классе уравнений, возникающих в проблеме тяготения электрических заряженных тел с учетом запаздывания сил взаимодействия”, *Гравитация и объединение фундаментальных полей*, Наукова думка, Киев, 1982.

47. R. D. Driver, *A functional-differential system of neutral type arising in a two body problem of classical electrodynamics*, Internat. Sympos. Nonlinear Diffent. Equat. and Nonlinear Mechanics (Colorado Springer, 1961), New York, London: Acad. Press, 1963, 474–484.

48. Ю. С. Колесов, Д. И. Швитра, “Математическое моделирование процесса горения в камере жидкостного ракетного двигателя”, *Литовский матем. сб.*, **15**:4 (1975).

49. С. А. Гусаренко, *Функционально-дифференциальные уравнения с вольтерровыми операторами*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Пермь, 1987, 130 с.

50. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1991, 280 с.

51. В. П. Максимов, *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды*, Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, Пермь, 1967, 306 с.

52. Е. С. Жуковский, *Операторные неравенства и функционально-дифференциальные уравнения*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Пермь, 1983, 133 с.

53. Н. В. Азбелев, М. Б. Ермолаев, П. М. Симонов, “К вопросу об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению”, *Изв. вузов. Математика*, 1995, № 10 (401), 3–9.

54. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. II”, *Изв. вузов. Математика*, 2000, № 4 (455), 3–13.

55. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными*, Изд-во Перм. ун-та, Пермь, 2001, 230 с.

56. Е. А. Барбашин, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 224 с.

57. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости: Учеб. пособие*, 2-е изд., Изд-во Моск. ун-та, М., 1998, 480 с.

58. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, eds. Ravi P. Agarwal and Donal O’Regan, Hindawi Publishing Corporation, New York, Cairo, 2007, IX + 314 p.

Поступила 8.04.2017

MSC2010 34K20, 34K25

The tests of the stability of one class of autonomous differential “pseudo-linear” equations of the first order with autoregulated delay

© **M. B. Ermolaev**[3] **P. M. Simonov**[4]

Abstract. In the article effective tests of exponential stability are obtained for some classes of autonomous differential equations of first order with autoregulated delay. An overview of works on this topic from the cities of Perm and Ivanovo is made. The criteria of S.A. Gusarenko (on the continuity of the operator with autoregulated delay) and of V.P. Maksimov (on the complete continuity of the operator with autoregulated delay) are given. Sufficient conditions for the existence and continuability of solutions are formulated. Theorems on stability of the system due to its first approximation are given, too. These propositions are based on theorems from the book and from the articles N.V. Azbelev and P.M. Simonov. Theorems on stability in the first approximation, although resembling the well-known Lyapunov's theorems, in reality differ significantly from the latter. Lyapunov's theorems for ordinary differential or functional differential equations give a technique for investigating stability. By means of linearization, the question of the nonlinear equation's stability reduces to the question of linear equation's stability. For this problem effective stability criteria are already proved. In our case it is not possible to linearize the nonlinear parts of the equations, and therefore the above technique is not applicable here. In the article, replacing the process of linearization with “pseudo-linearization”, and also using the results of V.V. Malygina, we obtained some analogues of theorems on the first approximation for scalar, autonomous equations with autoregulated delay. The main conclusions obtained on the basis of this idea can be formalized as follows: autonomous differential equations with autoregulated delay have stability properties similar to the properties of corresponding equations with concentrated delay.

Key Words: autonomous differential equations with autoregulated delay, stability, nonlinear operator of inner superposition, Lyapunov's theorem about stability in the first approximation, contraction operator, fixed point of the operator, admissibility of pairs of spaces.

References

1. L.E. Els'golts, S. B. Norkin, *Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory differential equations with a deviating argument]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 296 p.
2. A. D. Myshkis, “[On some problems in the theory of differential equations with a deviating argument]”, *Uspekhi matematicheskikh nauk*, **32**:2 (1977), 173–202 (In Russ.).
3. R. D. Driver, “Existence theory for a delay-differential system”, *Contribut. to Different. Equat.*, **1**:1 (1963), 317–336.
4. K. L. Cooke, “Functional differential equations close to differential equations”, *Bul. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 285–288.

[3] **Mikhail B. Ermolaev**, Acting Head of the Department of Economics and Finance, Professor of the Department of Economics and Finance, Ivanovo State University of Chemical Technology (7 Sheremetevsky Avenue, Ivanovo 153000, Ivanovo region, Russia), DSc of Economics, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0217-3821, ermol-mb@mail.ru

[4] **Pyotr M. Simonov**, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University (15 Bukirev Str., Perm 614990, Perm region, Russia), DSc (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6357-662X, simpm@mail.ru

5. K. L. Cooke, “Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **19** (1967), 160–179.

6. B. Stefan, “Asymptotic of a functional differential equation with bounded lag”, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 272–279.

7. J. A. Yorke, “Asymptotic stability for one-dimensional differential-delay equations”, *J. Different. Equat.*, **7**:1 (1970), 189–202.

8. T. Yoneyama, “On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **125**:1 (1987), 161–173.

9. L. A. Zhivotovsky, “[On the existence and uniqueness of solutions differential equations with a delay that depends on the solution u its derivative]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **5**:5 (1969), 880–889 (In Russ.).

10. V. P. Rudakov, “[To the question of the existence of solutions differential equations with delay depending on the solution]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **8**:11 (1971), 2013–2018 (In Russ.).

11. M. B. Ermolaev, “[On the solvability of the Cauchy problem for a certain class equations with a deviation that depends on the unknown function]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **5 (372)** (1993), 46–49 (In Russ.).

12. M. B. Ermolaev, “[On the stability of equations with delay depending on from an unknown function]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **6 (385)** (1994), 60–63 (In Russ.).

13. N. V. Azbelev, *Recent trends in the theory of nonlinear functional differential equations*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts. Editor V. Lakshmikantham (Tampa, Florida, August 19-26, 1992), Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1996, 1807–1814.

14. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rahkmatullina, *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya [Elements of the modern theory of functional differential equations. Methods and applications]*, Institute of Computer Research, Moscow and Izhevsk, 2002 (In Russ.), 384 p.

15. M. E. Drakhlin, “[On some topological properties of one integral operator]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **8**:4 (1972), 721–724 (In Russ.).

16. M. E. Drakhlin, “[On a nonlinear operator of inner superposition in the space of measurable functions]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1982, 157–161 (In Russ.).

17. M. E. Drakhlin, T. K. Plyshevskay, “[Existence, uniqueness and the convergence of successive approximations for differential equations with delay]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **9**:9 (1973), 1583–1592 (In Russ.).

18. A. I. Bulgakov, V. P. Maksimov, “[Functional and functional differential inclusions with Volterra operators]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **17**:8 (1981), 1362–1374 (In Russ.).

19. V. P. Maksimov, “[The solvability of certain boundary value problems for differential equations with deviation of the argument, depending on the solutions]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1982, 6–9 (In Russ.).

20. V. P. Maksimov, “[The solvability of the equations with locally Volterra operators]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1984, 12–15 (In Russ.).

21. E. S. Zhukovsky, “[On the problem of equations with delay depending on the unknown function]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1982, 9–12 (In Russ.).

22. E. S. Zhukovsky, “[On differential inequalities and estimates solutions of a functional differential equation]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1983, 22–24 (In Russ.).

23. S. A. Gusarenko, “[On functional differential equations with a nonlinear superposition operator]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1984, 68–72 (In Russ.).

24. S. A. Gusarenko, “[On the continuability of solutions of functional differential equations with a delay that depends on the desired function]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **21**:12 (1985), 2171–2173 (In Russ.).

25. S. A. Gusarenko, “[On a nonlinear inner operator superpositions]”, *Vestnik PGTU. Matematika i prikladnaya matematika [Bulletin of PSTU. Mathematics and Applied Mathematics]*, Perm, 1994, 51–54 (In Russ.).

26. S. A. Gusarenko, E. S. Zhukovsky, V. P. Maksimov, “[Towards a theory functional differential equations with locally Volterra operators]”, *Doklady AN SSSR*, **287**:2 (1986), 268–272 (In Russ.).

27. N. V. Azbelev, M. B. Ermolaev, V. V. Malygina, “[Stability of a class of essentially nonlinear equations with retarded argument]”, *Uspekhi matematicheskikh nauk*, **49**:4 (298) (1994), 94 (In Russ.).

28. M. B. Ermolaev, *Ustoychivost' resheniy nekotorykh klassov sushchestvenno nelineynykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Stability of solutions of certain classes of essentially nonlinear functional differential equations]*, Diss. … kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci.diss.], Perm, 1995 (In Russ.), 104 p.

29. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, “[Functional differential equations and the stability theory of equations with aftereffect]”, *Vestnik PGTU. Funktsional'no-differentsial'nyye uravneniya (spetsial'nyy vypusk) [Bulletin of PSTU. Functional differential equations (special edition)]*, Perm, 2002, 52–69 (In Russ.).

30. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, “[The modern theory of the stability of equations with aftereffect: a review of ideas and results]”, *Nelineynyy analiz i nelineynyye differentsial'nyye uravneniya [Nonlinear analysis and nonlinear differential equations]*, eds. V.A. Trenogin, A.F. Filippov, FIZMATLIT, Moscow, 2003, 289–304 (In Russ.).

31. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, “[The modern theory of functional differential equations and some applied problems]”, *Optimizatsiya, upravleniye, intellekt [Optimization, control, intellect]*, **2**:10 (2005), 289–304 (In Russ.).

32. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, “[Functional differential equations and their applications]”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki [Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science]*, **1** (2009), 3–23 (In Russ.).

33. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Theory of functional differential equations and applications", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.

34. F. Hartung, J. Turi, *Linearized stability in functional differential equations with state-dependent delays*, Proceedings of the International Dynamical Systems and Differential Equation (May 18 - 21, 2000, Atlanta, USA), Added volume Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2000, 416–425.

35. A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, E. Litsyn, "On equations with delay depending on solution", *Nonlinear Analysis*, **49** (2002), 689–701.

36. I. Győri, F. Hartung, "Exponential stability of a state-dependent delay system", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**:4 (2007), 773–791.

37. A. D. Myshkis, *Lineynyye differentsial'nyye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom [Linear differential equations with retarded argument]*, 2nd edition, Nauka Publ., Moscow (In Russ.), 352 p.

38. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Theory of functional differential equations]*, World, Moscow, 1984 (In Russ.), 421 p.

39. V. V. Malygina, "[On an exponential estimate of the Cauchy function]", *Differentsial'nyye uravneniya*, **28**:6 (1992), 1082–1084 (In Russ.).

40. V. V. Malygina, "[Some tests of the stability of the equations with retarded argument]", *Differentsial'nyye uravneniya*, **28**:10 (1992), 1716–1723 (In Russ.).

41. V. V. Malygina, "[On the stability of solutions of certain linear differential equations with aftereffect]", *Izvestiya vuzov. Matematika*, **5** (1993 (372)), 72–85 (In Russ.).

42. T. Amemiya, "On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1-st order", *J. Math. Anal. and Appl.*, **142**:1 (1989), 13–25.

43. K. L. Cooke, *Functional differential systems: some models and parturbation problems*, Int. Symp. Diff. Equat. Dynamic. Systems, New York: Acad. Press, 1965, 165–183.

44. R. D. Driver, *[Topologies for equations of neutral type and classical electrodynamics]*, Differentsial'nyye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom [Differential equations with deviating argument] (Kiev, September 23-26, 1975), Scientific thought, Kiev, 1977, 113–127 (In Russ.).

45. S. P. Travis, "A one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics", *SIAM J. Appl. Math.*, **28** (1975), 611–632.

46. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, "[On a class of equations arising in the problem of gravitation of electrically charged bodies with allowance for the retardation of the interaction forces]", *Gravitatsiya i ob'yedineniye fundamental'nykh poley [Gravitation and the union of fundamental fields]*, Scientific thought, Kiev, 1982 (In Russ.).

47. R. D. Driver, *A functional-differential system of neutral type arising in a two body problem of classical electrodynamics*, Internat. Sympos. Nonlinear Diffent. Equat. and Nonlinear Mechanics (Colorado Springer, 1961), New York, London: Acad. Press, 1963, 474–484.

48. Yu. S. Kolesov, D. I. Shvitra, “[Mathematical modeling combustion process in the chamber of a liquid rocket engine]”, *Litovskiy matem. sbornik [Lithuanian Math. Collection]*, **15**:4 (1975) (In Russ.).

49. S. A. Gusarenko, *Funktsional’no-differentsial’nyye uravneniya s vol’terrovymi operatorami [Functional differential equations with Volterra operators]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci.diss.], Perm, 1987 (In Russ.), 130 c.

50. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rahkmatullina, *Vvedeniye v teoriyu funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy [Introduction to the theory functional differential equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russ.), 280 p.

51. V. P. Maksimov, *Voprosy obshchey teorii funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy. Izbrannyye trudy [Questions of the general theory of functional differential equations. Selected Works]*, Perm St. Univ. Publ., Perm Soc. Inst. Publ., Prikamsky Modern Soc. and Hum. College Publ., Perm, 1967 (In Russ.), 306 p.

52. E. S. Zhukovsky, *Operatornyye neravenstva i funktsional’no-differentsial’nyye uravneniya [Operator inequalities and Functional differential equations]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci.diss.], Perm, 1983 (In Russ.), 133 p.

53. N. V. Azbelev, M. B. Ermolaev, P. M. Simonov, “[On the question of the stability of functional differential equations in the first approximation]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **10 (401)** (1995), 3–9 (In Russ.).

54. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, “[Stability of equations with retarded argument. II]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **4 (455)** (2000), 3–13 (In Russ.).

55. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, *Ustoychivost’ resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi [Stability of solutions of equations with ordinary derivatives]*, Perm St. Univ. Publ., Perm, 2001 (In Russ.), 230 p.

56. E. A. Barbashin, *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti [Introduction to the theory of stability]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 224 p.

57. B. P. Demidovich, *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]*, Moscow St. Univ. Publ., Moscow, 1998 (In Russ.), 480 p.

58. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, eds. Ravi P. Agarwal and Donal O’Regan, Hindawi Publishing Corporation, New York, Cairo, 2007, IX + 314 p.

Submitted 8.04.2017