DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.38-50

УДК 517.938

Сопряжение диффеоморфизмов Смейла-Виеториса посредством сопряжения эндоморфизмов

© **Н. В. Исаенкова** [1], **Е. В. Жужома** [2]

Аннотация. В статье установлена взаимосвязь между сопряжением диффеоморфизмов Смейла-Виеториса и сопряжением соответствующих неособых эндоморфизмов окружности. Именно, получено необходимое условие сопряженности ограничений диффеоморфизмов Смейла-Виеториса на базовых многообразиях. Показано, что одним из необходимых условий сопряженности рассматриваемого класса диффеоморфизмов является сопряженность соответствующих эндоморфизмов окружности. В работе также доказана техническая теорема, в которой получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма на базовых многообразиях, переводящего орбиты одного диффеоморфизма Смейла-Виеториса в орбиты другого диффеоморфизма с наличием коммутативной диаграммы отображений. Совместно с первым результатом все это дает частичное решение задачи топологической эквивалентности. В дальнейшем материалы данной статьи могут понадобиться для получения инвариантов сопряженности диффеоморфизмов рассматриваемого класса на базовых многообразиях.

Ключевые слова: сопряженность, коммутативная диаграмма, топологическая эквивалентность, соленоид, неособый эндоморфизм.

1. Введение

Установление топологической классификации является одной из основных задач теории динамических систем. При решении задачи классификации выделяется класс диффеоморфизмов, внутри которого сперва решается задача топологической эквивалентности (нахождение необходимых и достаточных условий существования гомеоморфизма многообразия, переводящего орбиты одного диффеоморфизма в орбиты другого диффеоморфизма, с наличием коммутативной диаграммы отображений) и задача реализации. При этом один из этапов состоит в описании возможных инвариантных множеств, определяющих динамику диффеоморфизмов из рассматриваемого класса. Благодаря работам Аносова Д.В., Плыкина Р.В., Смейла С. и др. было установлено, что даже у структурно устойчивых (грубых) диффеоморфизмов могут быть сложно устроенные с топологической точки зрения инвариантные множества. Одним из первых примеров таких множеств является соленоид.

В современную теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [1]. Он построил пример диффеоморфизма полнотория в себя и доказал, что данный диффеоморфизм имеет притягивающее инвариантное множество, гомеоморфное соленоиду с гиперболической структурой. Первым обобщением данного примера была конструкция Р. Вильямса,

[1] **Исаенкова Наталья Викторовна**, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, ФГКОУ ВО «Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское шоссе, д. 3, БОКС – 268), кандидат физико-математических наук, ORCID: http:// orcid.org/0000-0003-4880-3526, nisaenkova@mail.ru

[2] **Жужома Евгений Викторович**, профессор кафедры фундаментальной математики, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8682-7591, zhuzhoma@mail.ru

который рассматривал обобщенные соленоиды [2] - [4] и получил их внутреннюю классификацию. Это означает, что Вильямс получил необходимое и достаточное условие сопряженности ограничений двух диффеоморфизмов на их одномерные растягивающиеся аттракторы, гомеоморфные соленоиду. Отметим работы учеников Р. Вильямса, относящиеся к данному направлению [5], [6], [7].

Важный класс обобщенных соленоидов составляют одномерные растягивающиеся аттракторы на двумерных поверхностях. Внешняя классификация таких аттракторов произведена Плыкиным Р.В., Гринесом В.З. и их учениками [8]-[11]. Существенные результаты в этом направлении для потоков на плоскости и сфере получены в работах А.А.Андронова, Л.С.Понтрягина, Е.А.Леонтович, А.Г.Майера. Качественная теория динамических систем на двумерном торе разработана А.Пуанкаре и А.Данжуа. На двумерных многообразиях большего рода динамические системы с этой точки зрения рассматривались С.Х.Арансоном, В.З.Гринесом, М.М.Пейксото и др. [12], [13].

В статье [14] вводится и изучается класс диффеоморфизмов с инвариантными соленоидальными множествами, который включает в себя классический пример Смейла с соленоидальным растягивающимся аттрактором, а также производится описание всех возможных инвариантных (базисных) множеств. Из работ [15], [16] следует, что из внутренней классификации соленоидальных базисных множеств не следует внешняя классификация. Если рассматривать эту задачу в обратном порядке, то смысл становится более понятным, то есть из внешней классификации внутренняя классификация следует. Вильямсом получена только внутренняя классификация ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы, внешняя классификация соленоидальных базисных множеств, заданных на многообразиях размерности не менее трех, до настоящего времени изучена не полностью.

Главным результатом данной статьи является получение необходимого условия сопряженности ограничений диффеоморфизмов Смейла-Виеториса на базовых многообразиях, что представляет собой начальный этап решения задачи классификации. Одним из необходимых условий сопряженности рассматриваемого класса диффеоморфизмов является сопряженность соответствующих неособых эндоморфизмов окружности. Также здесь доказывается техническая теорема, где получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма на базовых многообразиях, которая понадобится в дальнейшем для изучения сопряженности диффеоморфизмов Смейла-Виеториса.

2. Необходимые определения и понятия

Напомним некоторые определения, и приведем необходимые для дальнейшего результаты. Пусть Λ, Λ' – инвариантные множества диффеоморфизмов f, f' соответственно. Если существует гомеоморфизм $\varphi : M \to M$ такой, что

$$\varphi(\Lambda) = \Lambda' \quad \text{и} \quad f'|_{\Lambda} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\Lambda'},$$

то говорят, что ограничения $f|_{\Lambda}$ и $f'|_{\Lambda'}$ *сопряжены*, или диффеоморфизмы f и f' *сопряжены на инвариантных множествах* Λ, Λ' соответственно. Если $\Lambda = NW(f)$, $\Lambda' = NW(f\prime)$, то f и f' называются Ω*-сопряженными.* Если $\Lambda = \Lambda' = M$, то f и f' называются *сопряженными.*

Согласно [14], диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого n-многообразия M^n является диффеоморфизмом *Смейла-Виеториса* (принадлежит классу SV), если существует вложенное в M^n *базовое многообразие* $\mathcal{B}^n = S^1 \times D^{n-1}$ такое, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^n} \overset{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^n \to F(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{B}^n$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид
$$F(t,z) = (g(t), w(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \tag{2.1}$$
где $g : S^1 \to S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^{n-1}} : \{t\} \times D^{n-1} \to \mathcal{B}^n$ является равномерно сжимающим C^1 вложением
$$\{t\} \times D^{n-1} \to int\left(\{g(t)\} \times D^{n-1}\right), \tag{2.2}$$
т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что
$$diam\ (F^k(\{t\} \times D^{n-1})) \leq C\lambda^k diam\ (\{t\} \times D^{n-1}),\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Соленоидом называется множество, которое можно представить в виде пересечения последовательности полноторий $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{B}_i \supset \ldots$, таких, что для любого $i \geq 1$ ось полнотория $\mathcal{B}_{i+1}$ обходит $n_i \geq 2$ раз ось полнотория $\mathcal{B}_i$, не образуя крюков. Соленоид является множеством канторовского типа (совершенным, нигде не плотным), с топологической размерностью равной единице, связным и вполне разрывным континуумом, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество.

Рассмотрим окружность S^1. Сюрьективное C^1 отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом* [17]. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$ [18]. Поскольку $d \geq 2$, то E_d является растягивающим эндоморфизмом ($g : S^1 \to S^1$ - *растягивающий* эндоморфизм, если $Dg > 1$). Шуб [17] классифицировал растягивающиеся эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов.

Неособые эндоморфизмы окружности образуют важный класс d-накрытий окружности. d*-накрытием* окружности S^1 называется сюрьективный локальный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$ степени $|d| \geq 2$, при этом прообраз каждой точки состоит из $|d| \in \mathbb{N}$ точек. В статье [19] сделана классификация d-накрытий окружности S^1 с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. В [19] показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до d-эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени d.

3. Доказательство основных результатов

Первым основным результатом данной статьи является необходимое условие существования гомеоморфизма, сопрягающего диффеоморфизмы Смейла-Виеториса F_1 и F_2 на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$. Показывается, что сопряженность диффеоморфизмов Смейла-Виеториса необходимо влечет сопряженность соответствующих эндоморфизмов.

Теорема 3.1. *Если диффеоморфизмы Смейла-Виеториса F_1 и F_2 сопряжены на базовых многообразиях $\mathcal{B}_1^n$ и $\mathcal{B}_2^n$, тогда существует гомеоморфизм*
$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus intF_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus intF_2(\mathcal{B}_2^n)$$
такой, что выполняются следующие условия:

- ψ_* *имеет вид:*
$$\psi_*(t,z) = (\psi(t), w_*(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \tag{3.1}$$

- $\psi : S^1 \to S^1$ *сопрягает эндоморфизмы* g_1 *и* g_2, *т.е. выполняются равенство*

$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из сопряженности F_1 и F_2 на базовых многообразиях следует, что существует гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{B}_1^n \to \mathcal{B}_2^n$ такой, что

$$F_2^n \circ \varphi = \varphi \circ F_1^n. \tag{3.3}$$

Возьмем некоторое $t \in S^1$ и рассмотрим устойчивое многообразие в точке $(t, z) \in \{t\} \times D^{n-1}$

$$W_1^s(t, z) = \{(t, z') \in \{t\} \times D^{n-1} : \lim_{j \to \infty} \rho(F_1^j(t, z), F_1^j(t, z')) \to 0\}.$$

Так как φ - гомеоморфизм, то $\rho(\varphi \circ F_1^n(t, z), \varphi \circ F_1^n(t, z')) \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно 3.3, получаем $\rho(F_2^n \circ \varphi(t, z), F_2^n \circ \varphi(t, z')) \to 0$. Тогда $\varphi(t, z') \in W_2^s(\varphi(t, z))$, где

$$W_2^s(\varphi(t, z)) = \{\varphi(t, z') : \lim_{j \to \infty} \rho(F_2^j(\varphi(t, z)), F_2^j(\varphi(t, z'))) \to 0\}.$$

Таким образом, точки $\varphi(t, z)$, $\varphi(t, z')$ принадлежат одному диску и отображение φ имеет вид $\varphi(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}$.

Используя вид диффеоморфизма F_1 и отображения φ, из $F_2 \circ \varphi = \varphi \circ F_1$ получим равенства $F_2(\psi(t), w_*(t, z)) = \varphi(g_1(t), w_1(t, z)) = (g_2 \circ \psi(t), w_*(t, z)) = (\psi \circ g_1(t), w_1(t, z))$. Значит, $g_2 \circ \psi(t) = \psi \circ g_1(t)$ и $\psi : S^1 \to S^1$ сопрягает эндоморфизмы g_1 и g_2. □

Рассмотрим теперь теорему, в которой получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма на базовых многообразиях, переводящего орбиты одного диффеоморфизма в орбиты другого диффеоморфизма с наличием коммутативной диаграммы отображений (совместно с теоремой 3.1. это дает частичное решение задачи топологической эквивалентности). Этот результат понадобится в дальнейшем для получения инвариантов сопряженности диффеоморфизмов класса SV на базовых многообразиях.

Теорема 3.2. *Диффеоморфизмы Смейла-Виеториса* F_1 *и* F_2 *сопряжены на базовых многообразиях* $\mathcal{B}_1^n$ *и* $\mathcal{B}_2^n$ *тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм*

$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus intF_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus intF_2(\mathcal{B}_2^n)$$

такой, что выполняются следующие условия:

- ψ_* *имеет вид:*

$$\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \tag{3.4}$$

- ψ_* *сопрягает* F_1 *и* F_2 *на границах базовых многообразий* $\partial\mathcal{B}_1^n$ *и* $\partial\mathcal{B}_2^n$,

- $\psi : S^1 \to S^1$ *сопрягает эндоморфизмы* g_1 *и* g_2, *т.е. выполняются равенство*

$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1. \tag{3.5}$$

Для того, чтобы доказать достаточное условие, построим сопрягающий гомеоморфизм для F_1 и F_2 на базовых многообразиях. Нетрудно показать, что пересечения для соответствующих диффеоморфизмов Смейла-Виеториса $\cap_{k\geq 0} F_i^k(\mathcal{B}_i^n) = Sol\ (F_i)$, где $i = 1, 2$ являются соленоидами. Соленоид обладает сложной динамикой, поэтому искомый гомеоморфизм строится отдельно на соленоидальных множествах таких диффеоморфизмов и на дополнении к соленоидам.

Сперва построим сопрягающий гомеоморфизм на базовых многообразиях без соленоида. Рассмотрим два диффеоморфизма $F_1 : \mathcal{B}_1^n \to \mathcal{B}_1^n$ и $F_2 : \mathcal{B}_2^n \to \mathcal{B}_2^n$, принадлежащих классу SV и удовлетворяющих условиям 2.1 - 2.3. Для определенности положим $F_1(t,z) = (g_1(t), w_1(t,z))$, и $F_2(t,z) = (g_2(t), w_2(t,z))$, $\quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}$.

Зададим произвольный гомеоморфизм $\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \mathrm{int} F_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus \mathrm{int} F_2(\mathcal{B}_2^n)$ такой, что выполняются следующие условия:

- ψ_* имеет вид:
$$\psi_*(t,z) = (\psi(t), w_*(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \tag{3.6}$$

- ψ_* сопрягает F_1 и F_2 на границах базовых многообразий $\partial\mathcal{B}_1^n$ и $\partial\mathcal{B}_2^n$,
$$\psi_* \circ F_1|_{\partial\mathcal{B}_1^n} = F_2 \circ \psi_*|_{\partial\mathcal{B}_1^n} \tag{3.7}$$

- $\psi : S^1 \to S^1$ сопрягает эндоморфизмы g_1 и g_2, т.е. выполняются равенство
$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1. \tag{3.8}$$

Рассмотрим множества $\cap_{k\geq 0} F_i^k(\mathcal{B}_i^n) = Sol\ (F_i)$, где $i = 1, 2$. Введем отображение $\psi_{*,e} : \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1) \to \mathcal{B}_2^n \setminus Sol\ (F_2)$, где $\forall x \in \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1)$ определяется в силу соотношения

$$\psi_{*,e}(x) = F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}(x). \tag{3.9}$$

Лемма 3.1.
$$\bigcup_{j\geq 0} F^j\left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right] = \mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F).$$

Доказательство. Лемма тривиальна для $j = 0$, где $\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n) = \mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)$. Для $j = 1$ имеем $\bigcup_{j\geq 0} F\left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right] = \left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right] \bigcup \left[F(\mathcal{B}^n) \setminus F^2(\mathcal{B}^n)\right]$.

Используя свойство этих множеств и определение соленоида, получаем

$\left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right] \bigcup \left[F(\mathcal{B}^n) \setminus F^2(\mathcal{B}^n)\right] = \mathcal{B}^n \setminus \left[F(\mathcal{B}^n) \cap F^2(\mathcal{B}^n)\right] = \mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)$.

Пусть по предположению индукции выполняется равенство $\bigcup_{j\geq 0} F^j\left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right] = \mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)$. Тогда, исходя из этого, первого шага индукции и свойства множеств, получаем $\bigcup_{j\geq 0} F^{j+1}\left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right] = F\left[\mathcal{B}^n \setminus F\left(\mathcal{B}^n\right)\right] \cup \left[\bigcup_{j\geq 1} F^{j+1}\left[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)\right]\right] = \left[F\left(\mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)\right)\right] \cup \left[\mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)\right] = \left[F(\mathcal{B}^n) \setminus Sol\ (F)\right] \cup \left[\mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)\right] = \left[F(\mathcal{B}^n) \cup \mathcal{B}^n\right] \setminus Sol\ (F) = \mathcal{B}^n \setminus Sol\ (F)$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2. *Отображение $\psi_{*,e}$ является гомеоморфизмом таким, что*

$$\psi_{*,e} \circ F_1(x) = F_2 \circ \psi_{*,e}(x).$$

Доказательство. Отображение $\psi_{*,e}$ является гомеоморфизмом, как композиция диффеоморфизмов Смейла-Виеториса F_1 и F_2 и гомеоморфизма ψ_*.

Докажем равенство $\psi_{*,e} \circ F_1^n(x) = F_2^n \circ \psi_{*,e}(x)$. Возьмем точку $x \in \mathrm{int} F_1(\mathcal{B}_1^n)$, существует такое натуральное число n, что $F_1^{-n}(x) \in \mathcal{B}_1^n \setminus \mathrm{int} F_1(\mathcal{B}_1^n)$. Согласно лемме 3.1. $F_1^{-n}(x) \in \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1)$. Гомеоморфизм $\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \mathrm{int} F_1(\mathcal{B}_1^n) \to \mathcal{B}_2^n \setminus \mathrm{int} F_2(\mathcal{B}_2^n)$ удовлетворяет условиям 3.6 и 3.8, тогда $\psi\left(F_1^{-n}(x)\right) \in \mathcal{B}_2^n \setminus Sol\ (F_2)$. Учитывая способ задания отображения $\psi_{*,e} = F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}$, получаем

$$\psi_{*,e} \circ F_1^n\left(F_1^{-n}(x)\right) = \psi_{*,e}(x) = F_2^n \circ \psi_{*,e}\left(F_1^{-n}(x)\right).$$

Таким образом, $\psi_{*,e} \circ F_1(x) = F_2 \circ \psi_{*,e}(x)$ и выполняется следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,e}} & \mathcal{B}_2^n \setminus Sol\ (F_2) \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 \\ \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,e}} & \mathcal{B}_2^n \setminus Sol\ (F_2) \end{array}.$$

Лемма доказана. □

Используя результаты статьи [14], рассмотрим символические модели ограничений диффеоморфизмов класса SV F_1 и F_2 на $Sol\ (F_1)$ и $Sol\ (F_2)$ соответственно. Возьмем точку $p \in Sol\ (F_1)$. Согласно лемме 3 статьи [14], существует последовательность замкнутых двумерных дисков $D_i = F_1^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ таких, что $p \in \cdots \subset D_i \subset \cdots \subset D_0$ и $p = \cap_{i \geq 0} D_i$, см. рис. 3.1.

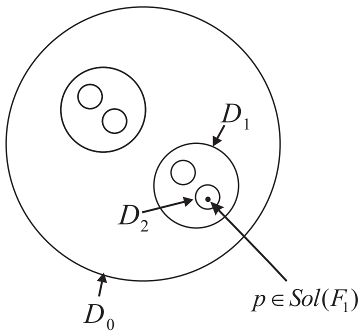

Рисунок **3.1**

Сечение соленоидального инвариантного множества

Определим отображение $\psi_{*,es} : Sol\ (F_1) \to Sol\ (F_2)$, где $\psi_{*,es}(p) = p'$, $p' \in Sol\ (F_2)$.

Пользуясь обозначениями и результатами статьи [14], рассмотрим $\prod_{g_1}$ как подмножество множества $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i = g_1(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Топология на $\prod_{g_1}$ индуцируется топологией на $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$. На $\prod_{g_1}$ определен гомеоморфизм $\hat{g}_1 : \prod_{g_1} \to \prod_{g_1}$, действующий по правилу

$$\hat{g}_1\left(\{t_0, \ldots, t_i, \ldots\}\right) = \{g_1(t_0), t_0, \ldots, t_i \ldots\}.$$

Пространство $\prod_{g_1}$ с отображением $\hat{g}_1$, следуя [4], называется *обратным пределом преобразования* g_1.

Аналогичным образом строится обратный предел для эндоморфизма g_2.

Напомним, что для каждого из соленоидов $Sol\ (F_1)$ и $Sol\ (F_2)$ введены отображения $\theta_j : Sol\ (F_j) \to \prod_{g_j}$ $j = 1, 2$ следующим образом $\theta_j(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}$.

Определим отображение $\overline{\psi} : \prod_{g_1} \to \prod_{g_2}$, положив

$$\overline{\psi}(\{t_0,t_1,\ldots,t_i,\ldots\}) = \{t_0^{'},t_1^{'},\ldots,t_i^{'},\ldots\},\ t_i^{'} = \psi(t_i),\ \forall i\geq 0. \tag{3.10}$$

где $\psi : S^1 \to S^1$ сопрягающий гомеоморфизм такой, что $g_2\circ\psi = \psi\circ g_1$.

Л е м м а 3.3. *Для отображения $\overline{\psi} : \prod_{g_1} \to \prod_{g_2}$ верны равенства*

$$t_i^{'} = g_2(t_{i+1}^{'}),\ \forall i\geq 0. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу задания отображения $\psi_{*,es}$ правила 3.10, леммы 3 статьи [14] и сопряженности эндоморфизмов g_1 и g_2 гомеоморфизмом ψ получаем

$$g_2(t_{i+1}^{'}) = g_2\left(\psi(t_{i+1})\right) = \psi\left(g_1(t_{i+1})\right) = \psi(t_i) = t_i^{'} \quad \Box.$$

Л е м м а 3.4. $\overline{\psi}$ *– взаимнооднозначное отображение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем инъективность отображения $\overline{\psi}$. Для этого возьмем две различные последовательности $\{t_i\}_0^\infty, \{t_i^{'}\}_0^\infty \in \prod_{g_1}$, т.е. существуют такие i, j, что $t_i \neq t_j$. Отсюда и способа задания отображения $\overline{\psi}$, где на каждой компоненте действует гомеоморфизм ψ следует, что $\psi(t_i)\neq\psi(t_j)$, т.е. образы этих последовательностей $\overline{\psi}\left(\{t_i\}_0^\infty\right) \neq \overline{\psi}\left(\{t_i^{'}\}_0^\infty\right)$.

Пусть $\{t_i\}_0^\infty = \{t_0^{'},t_1^{'},\ldots,t_i^{'},\ldots\} \in \prod_{g_2}$. Существует такая последовательность $\{t_1^{'},\ldots,t_i^{'},\ldots\}\in\prod_{g_1}$, что при действии отображения $\overline{\psi}$, с учетом равенства $t_0^{'} = g_2(t_1^{'})$ и в силу леммы 3.3. переходит в исходную $\overline{\psi}\left(\{t_1^{'},\ldots,t_i^{'},\ldots\}\right) = \{g_2(t_1^{'}),t_1^{'},\ldots,t_i^{'},\ldots\} = \{t_0^{'},t_1^{'},\ldots,t_i^{'},\ldots\}$. Это и доказывает сюръективность рассматриваемого отображения. $\Box$

Л е м м а 3.5. *Отображение $\overline{\psi}$ непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{r_0,\ldots,r_i,\ldots\}\in\prod_{g_1}$, и пусть U_ε – окрестность точки $\overline{\psi}\left(\{r_0,\ldots,r_i,\ldots\}\right) = \{\psi(r_0),\psi(r_1),\ldots,\psi(r_i)\ldots\}$. Согласно определению тихоновской топологии, не уменьшая общности, можно считать, что существуют некоторые $k\in\mathbb{Z}^+$ и сколь угодно малое $\varepsilon>0$ такие, что для любой точки $t=\{t_0,t_1,\ldots,t_i,\ldots\}\in U_\varepsilon$ выполняются неравенства: $|\psi(r_0)-\psi(t_0)|<\varepsilon,\quad |\psi(r_i)-\psi(t_i)|<\varepsilon$ для любого $i=1,\ldots,k-1$. Так как ψ непрерывно, то существует $\delta>0$ такое, что $|r_i-t_i|<\delta$ влечет $|\psi(r_i)-\psi(t_i))|<\varepsilon$ для любого $i=1,\ldots,k-1$.. Ясно что, можно считать $\delta\leq\varepsilon$. Зададим окрестность U_δ точки $\{r_0,\ldots,r_i,\ldots\}$, положив $t=\{t_0,t_1,\ldots,t_i,\ldots\}\in U_\delta$, если $|r_i-t_i|<\delta$ для любого $i=1,\ldots,k-1$. Тогда $\overline{\psi}\left(U_\delta\right)\subset U_\varepsilon$. $\Box$

Таким образом, отображение $\psi_{*,es} : Sol\ (F_1) \to Sol\ (F_2)$ можно представить в виде композиции гомеоморфизмом

$$\psi_{*,es} = \theta_2^{-1}\circ\overline{\psi}\circ\theta_1. \tag{3.12}$$

Л е м м а 3.6. *Отображение $\psi_{*,es}$ является гомеоморфизмом таким, что*

$$\psi_{*,es}\circ F_1(p) = F_2\circ\psi_{*,es}(p).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сперва инъективность отображения $\psi_{*,es}$.

Возьмем различные $p_1, p_2 \in Sol\ (F_1)$. Согласно лемме 3 статьи [14], каждой точке p_i, $i=1,2$, соответствует единственная последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i\in S^1$, и соответствующая последовательность замкнутых дисков $D_j^i = F_1^j(\{t_j^i\} \times D^{n-1})$ таких, что $p_i = \cap_{j\geq 0} D_j^i$. Поскольку $p_1 \neq p_2$ и диаметры дисков стремятся к нулю, то

$$D_1^1 = D_1^2, \ldots, D_{k-1}^1 = D_{k-1}^2, D_k^1 \neq D_k^2.$$

Поэтому $t_k^1 \neq t_k^2$ и, значит, $\theta_1(p_1) \neq \theta_1(p_2)$.

В силу леммы 3.4. различные последовательности $\theta_1(p_1) = (\{t_0^1, t_1^1, \ldots, t_i^1, \ldots\})$ и $\theta_1(p_2) = (\{t_0^2, t_1^2, \ldots, t_i^2, \ldots\})$, в которых существует k такое, что $t_k^1 \neq t_k^2$, перейдут в последовательности $\overline{\psi}(\theta_1(p_1)) = (\{\psi(t_0^1), \psi(t_1^1), \ldots, \psi(t_i^1), \ldots\})$, $\overline{\psi}(\theta_1(p_2)) = (\{\psi(t_0^2), \psi(t_1^2), \ldots, \psi(t_i^2), \ldots\})$, где $\psi(t_k^1) \neq \psi(t_k^2)$, т.е. $\overline{\psi}(\theta_1(p_1)) \neq \overline{\psi}(\theta_1(p_2))$.

С учетом способа задания 3.10 отображения $\overline{\psi}$, верны равенства

$$(\{\psi(t_0^1), \psi(t_1^1), \ldots, \psi(t_i^1), \ldots\}) = (\{t_0^{1'}, t_1^{1'}, \ldots, t_i^{1'}, \ldots\}),$$

$$(\{\psi(t_0^2), \psi(t_1^2), \ldots, \psi(t_i^2), \ldots\}) = (\{t_0^{2'}, t_1^{2'}, \ldots, t_i^{2'}, \ldots\}).$$

Из леммы 3.3. $t_i^{j'} = g_2(t_{i+1}^{j'})$, $j = 1, 2$ и условия (2.3) вытекает что

$$\{t_0^{j'}\} \times D^2 \supset F_2(\{t_1^{j'}\} \times D^{n-1}) \supset \ldots \supset F_2^i(\{t_i^{j'}\} \times D^{n-1}) \supset \ldots.$$

Более того, так как $diam\ (F_2^i(\{t_i^{j'}\} \times D^{n-1})) \to 0$ при $i \to \infty$ и $j = 1, 2$, то пересечения $\bigcap_{i\geq 0} F_2^i(\{t_i^{j'}\} \times D^{n-1})$ состоят ровно из одной точки $p_1^{'}, p_2^{'}$ соответственно. Из определения множества $Sol\ (F_2)$ следует, что $p_1^{'}, p_2^{'} \in Sol\ (F_2)$. Т.к. существует k для которого верно равенство $\psi(t_k^1) \neq \psi(t_k^2)$, то $p_1^{'} \neq p_2^{'}$ и, следовательно, $\theta_2^{-1}\left(\overline{\psi}(\theta_1(p_1))\right) \neq \theta_2^{-1}\left(\overline{\psi}(\theta_1(p_2))\right)$.

Докажем сюръективность отображения $\psi_{*,es}$. Возьмем $p^{'} \in Sol\ (F_2)$. Согласно лемме 3 статьи [14] определена единственная последовательность точек $(\{t_0^{'}, t_1^{'}, \ldots, t_i^{'}, \ldots\})$ такая, что $\theta_2(p^{'}) = (\{t_0^{'}, t_1^{'}, \ldots, t_i^{'}, \ldots\})$. В силу леммы 3.4. существует последовательность

$$(\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) = (\overline{\psi})^{-1}(\{t_0^{'}, t_1^{'}, \ldots, t_i^{'}, \ldots\}),$$

где $t_i^{'} = \psi(t_i)$. Из проведенных в предыдущем пункте рассуждений следует, что $\theta_1^{-1}(\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) = p$, $p \in Sol\ (F_1)$. Таким образом $\psi_{*,es}(p) = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1(p) = p^{'}$.

В силу леммы 3.5. и леммы 5 из [14], $\psi_{*,es}$ – непрерывное отображение, как композиция непрерывных отображений. Таким образом, $\psi_{*,es}$ – гомеоморфизм.

Докажем равенство $\psi_{*,es} \circ F_1(p) = F_2 \circ \psi_{*,es}(p)$, которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Sol\ (F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,es}} & Sol\ (F_2) \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 \\ Sol\ (F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,es}} & Sol\ (F_2) \end{array}.$$

Преобразуем левую часть равенства. Согласно лемме 5 статьи [14], отображение θ_1 является гомеоморфизмом таким, что $\theta_1 \circ f_1 = \widehat{g_1} \circ \theta_1$. Учитывая способ задания $\psi_{*,es}$ 3.12 и предыдущее равенство $\psi_{*,es} \circ F_1(p) = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1 \circ F_1(p) = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \widehat{g_1} \circ \theta_1(p)$. Действуя отображениями θ_1 и $\widehat{g_1}$, получаем $\theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \widehat{g_1} \circ \theta_1(p) = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \widehat{g_1}(\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi}(\{g_1(t_0), t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) = \theta_2^{-1}(\{\psi(g_1(t_0)), \psi(t_0), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_i), \ldots\})$.

В силу того, что ψ – сопрягающий гомеоморфизм g_1 и g_2, получаем $\theta_2^{-1}(\{\psi(g_1(t_0)), \psi(t_0), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_i), \ldots\}) = \theta_2^{-1}(\{g_2(\psi(t_0)), \psi(t_0), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_i), \ldots\}) = \theta_2^{-1} \circ \widehat{g_2}(\{\psi(t_0), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_i), \ldots\})$.

Аналогично, согласно лемме 5 из [14], существует отображение θ_2, являющееся гомеоморфизмом таким, что $\theta_2 \circ F_2 = \widehat{g_2} \circ \theta_2$. Преобразовав это равенство последовательным умножением на θ_2^{-1} сначала слева, а затем справа, получаем

$$F_2 \circ \theta_2^{-1} = \theta_2^{-1} \circ \widehat{g}_2. \tag{3.13}$$

Преобразуем теперь правую часть доказываемого равенства. Используя представление отображения $\psi_{*,es}$ в виде 3.12, правила действий отображений θ_1 и $\overline{\psi}$, имеем $F_2 \circ \psi_{*,es}(p) = F_2 \circ \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1(p) = F_2 \circ \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi}(\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) = F_2 \circ \theta_2^{-1}(\{\psi(t_0), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_i), \ldots\})$.

Согласно 3.13, $\psi_{*,es} \circ F_1(p) = F_2 \circ \psi_{*,es}(p)$. Лемма доказана.

□ В силу обозначений, введенных выше, определим отображение

$$\psi_{**}(p) = \begin{cases} F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}(p), & p \in \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1) \\ \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1(p), & p \in Sol\ (F_1) \end{cases}.$$

Лемма 3.7. *ψ_{**} – сопрягающий гомеоморфизм для F_1 и F_2 на базовых многообразиях такой, что*

$$\psi_{**} \circ F_1|_{\mathcal{B}_1^n} = F_2 \circ \psi_{**}|_{\mathcal{B}_1^n}.$$

Доказательство. ψ_{**} - взаимно однозначное отображение в силу лемм 3.2. и 3.7.

Для отображения $\psi_{*,e} = F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}$, действующего на дополнении к соленоидам на базовых многообразиях $\psi_{*,e} : \mathcal{B}_1^n \setminus Sol\ (F_1) \to \mathcal{B}_2^n \setminus Sol\ (F_2)$, непрерывность следует из композиции непрерывных отображений.

Рассмотрим t-сечение, где $t \in S^1$ - множество вида $\{t\} \times D^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} D_t^{n-1}$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с D^{n-1} посредством проекции $p_2 : S^1 \times D^{n-1} \to D^{n-1}$.

Гомеоморфизм ψ_* имеет вид $\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}$, где $\psi : S^1 \to S^1$ сопрягает эндоморфизмы g_1 и g_2, т.е. выполняются равенство $g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1$, тогда $g_2^n \circ \psi = \psi \circ g_1^n$. Из этого будет следовать, что гомеоморфизм ψ_* сохраняет дисковую структуру, т.е. переводит t-сечение в $\psi(t)$-сечение и верно равенство

$$\psi_* \left(D_{t_i}^{n-1} \setminus Sol\ (F_1)\right) = D_{\psi(t_i)}^{n-1} \setminus Sol\ (F_2). \tag{3.14}$$

Докажем непрерывность отображения $\psi_{*,es} : Sol\ (F_1) \to Sol\ (F_2)$, действующего по правилу $\psi_{*,es} = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1$.

Возьмем точку $p \in Sol\ (F_1)$. Согласно лемме 3 статьи [14] существует последовательность $(\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\}) \in \prod_{g_1}$ такая, что $\theta_1(p) = (\{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\})$. Тогда $\psi_{*,es}(p) = \theta_2^{-1}(\{t_0', t_1,' \ldots, t_i', \ldots\})$, где $t_i' = \psi(t_i)$.

Пусть U' окрестность точки $\theta_2(\psi_{*,es}(p)) = \{t_i'\}_0^\infty$, где $p \in Sol\ (F_1)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$. Согласно определению топологии на множестве $\prod_{g_2}$, можно считать $U' = \{\{x_i'\}_0^\infty \in \prod_g : |x_i' - t_i'| < \varepsilon$, для $i = 0, \ \ldots, \ r\}$.

Так как для точки $\theta_2(\psi_{*,es}(p)) = \{t_0', t_1,' \ldots, t_i', \ldots\}$ в ее окрестности U', заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j}' = g_2^j(t_r')$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение g_2 непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r' - t_r'| < \delta$ влечет $|x_i' - t_i'| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \ \ldots, \ r - 1$.

Введем обозначение $D_{t,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} [t - \delta, t + \delta] \times D_t^{n-1}$, где D_t^{n-1} - t-сечение, $t \in S^1$. Пусть U окрестность точки $p \in Sol\ (F_1)$. Тогда для любой точки $q \in U(p) \cap Sol\ (F_1)$, в силу леммы 3 статьи [14], $\theta_1(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \prod_{g_1}$ и

$$q = \bigcap_{i \geq 0} F_1^i(D_{x_i}^{n-1}) = D_{x_0}^{n-1} \cap F_1(D_{x_1}^{n-1}) \cap F_1^2(D_{x_2}^{n-1}) \cap \ldots. \tag{3.15}$$

Тогда для точки $\psi_{*,es}(q) = \theta_2^{-1}(\{x_0', x_1,' \ldots, x_i', \ldots\})$, где $x_i' = \psi(x_i)$, в силу равенства 3.14 выполняется

$$\psi_{*,es}(q) = \bigcap_{i \geq 0} F_2^i(D^{n-1}_{\psi(x_i)}) = D^{n-1}_{\psi(x_0)} \cap F_2(D^{n-1}_{\psi(x_1)}) \cap F_2^2(D^{n-1}_{\psi(x_2)}) \cap \ldots .$$

Диффеоморфизм F_1 имеет вид $F_1(t,z) = (g_1(t), w_1(t,z))$, где $g_1 : S^1 \to S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$. Существует $\delta_r > 0$, $\delta_r \leq \ldots \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \varepsilon$ такое, что $F_1^r\left(D^{n-1}_{t_r^1,\delta_r}\right) \cap F_1^r\left(D^{n-1}_{t_r^2,\delta_r}\right) \cap \ldots \cap F_1^r\left(D^{n-1}_{t_1^d,\delta_r}\right) = \emptyset$. Тогда точка $q \in F_1^r\left(D^{n-1}_{t_r,\delta_r}\right) \subset \ldots \subset F_1^2\left(D^{n-1}_{t_2,\delta_2}\right) \subset F_1\left(D^{n-1}_{t_1,\delta_1}\right) \subset F_1\left(D^{n-1}_{t_0,\varepsilon}\right)$. Так как $q \in U(p) \cap Sol\ (F_1)$, то $q \in D^{n-1}_{x_0} \cap F_1(D^{n-1}_{x_1}) \cap F_1^2(D^{n-1}_{x_2}) \cap \ldots \cap F_1^r(D^{n-1}_{x_r}) \cap F_1^r\left(D^{n-1}_{t_r,\delta_r}\right)$. Значит, $F_1^r(D^{n-1}_{x_r}) \cap F_1^r\left(D^{n-1}_{t_r,\delta_r}\right) \neq \emptyset$, $D^{n-1}_{x_r} \cap D^{n-1}_{t_r,\delta_r} \neq \emptyset$ и $|x_r - t_r| < \delta_r$. Поскольку g_1 равномерно непрерывное отображение, получаем неравенства $|g_1(x_r) - g_1(t_r)| < \varepsilon$, $|g_1^2(x_r) - g_1^2(t_r)| < \varepsilon$, $\ldots$, $|g_1^r(x_r) - g_1^r(t_r)| < \varepsilon$, т.е. $|x_{r-1} - t_{r-1}| < \varepsilon$, $|x_{r-2} - t_{r-2}| < \varepsilon$, $\ldots$, $|x_0 - t_0| < \varepsilon$.

Из 3.15 для точки $\psi_{*,es}(q) = \theta_2^{-1}(\{x_0', x_1,' \ldots, x_i', \ldots\})$, где $x_i' = \psi(x_i)$, и в силу равенства 3.14 выполняется

$$\psi_{*,es}(q) = \bigcap_{i \geq 0} F_2^i(D^{n-1}_{\psi(x_i)}) = D^{n-1}_{\psi(x_0)} \cap F_2(D^{n-1}_{\psi(x_1)}) \cap F_2^2(D^{n-1}_{\psi(x_2)}) \cap \ldots .$$

Так как отображение отображение $\overline{\psi}$ непрерывно, см. лемму 3.5., тогда $|x'_{r-1} - t'_{r-1}| < \varepsilon$, $|x'_{r-2} - t'_{r-2}| < \varepsilon$, $\ldots$, $|x'_0 - t'_0| < \varepsilon$. Итак, $\psi_{*,es}(q) \in U'(\psi_{*,es}(p))$ для любой точки $q \in U(p)$. Следовательно, $\psi_{*,es}$ – непрерывное отображение. $\psi^{-1}_{*,es}$ – непрерывное отображение, как прообраз непрерывного отображения на компакте. Таким образом, $\psi_{*,es}$ – гомеоморфизм.

Наличие коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1^n & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{B}_1^n \\ \downarrow \psi_{**} & & \downarrow \psi_{**} \\ \mathcal{B}_2^n & \xrightarrow{F_2} & \mathcal{B}_2^n \end{array}$$

следует из лемм 3.2., 3.7. и условия 3.7 для гомеоморфизма ψ_* о сопряжении F_1 и F_2 на границах базовых многообразий $\partial\mathcal{B}_1^n$ и $\partial\mathcal{B}_2^n$. $\square$

Благодарности. Первый автор (Н. В. Исаенкова) благодарит РФФИ (проект 15-01-03687-а) за финансовую поддержку. Второй автор (Е. В. Жужома) благодарит РНФ, проект 17-11-01041, за финансовую поддержку. Утверждение о необходимом условии существования сопряжения диффеоморфизмов Смейла-Виеториса (Теорема 3.1), леммы 3.1-3.4 доказаны в рамках поддержки РФФИ (проекты 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а) и программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект 90). Утверждение о достаточных условиях существования сопряжения диффеоморфизмов Смейла-Виеториса с помощью сопряжений соответствующих эндоморфизмов (Теорема 3.2), леммы 3.5-3.7 доказаны в рамках поддержки РНФ, проект 17-11-01041.

Список литературы

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.

2. R.F. Williams, “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473-487.

3. R.F. Williams, “Classification of subshifts of finite type”, *Annals of Math.*, **9** (1973), 120-153.

4. R.F. Williams, “Expanding attractors”, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

5. L. Block, “Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403-413.

6. F. Farrell, L. Jones, “New attractors in hyperbolic dynamics”, *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980), 107-133.

7. J. Gibbons, “One-dimensional basic set in the three-sphere”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 163-178.

8. В.З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах, 1”, *Труды ММО*, **32** (1975), 35-60.

9. В.З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах, 2”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243-252.

10. В.З. Гринес, “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57-94.

11. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, “О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n-мерном торе”, *Успехи мат. наук*, **34**:4 (1979), 185-186.

12. С.Х. Арансон, В.З. Гринес, “О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные уловия топологической эквивалентности транзитивных систем)”, *Матем. сб.*, **90**:132:3 (1973), 372-402.

13. В.З. Гринес, “О топологической эквивалентности одномерных базисных множеств диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *УМН*, **180**:6 (1974), 163-164.

14. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47-68.

15. C. Robinson, R. Williams, “Classification of expanding attractors: an example”, *Topology*, **15** (1976), 321-323.

16. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов”, *Матем. зам.*, **86**:3 (2009), 360–370.

17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.

18. Z. Nitecki, “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.

19. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, “Классификация накрытий окружности”, *Труды МИАН. Российская академия наук*, **3** (2012), 96-101.

Поступила 10.03.2017

MSC2010 37D20, 37G30

Conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms using a conjugacy of endomorphisms

© **N. V. Isaenkova** [3], **E. V. Zhuzhoma** [4]

Abstract. In the paper one gets the connection between a conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms and corresponding nonsingular circle endomorphisms conjugacy. To be precise, one gets the necessary condition for a conjugacy of the restriction of Smale-Vietoris diffeomorphism on basic manifolds. It is shown that a necessary condition for a conjugacy of the diffeomorphisms' class under consideration is a conjugacy of corresponding circle endomorphisms. In the paper the technical theorem is also proved that contains some sufficient conditions of the existence of homeomorphism on basic manifolds that takes the orbits of Smale-Vietoris diffeomorphism to the orbits of another diffeomorphism with a commutative diagram of mappings. Together with the first result it gives the particular solution of the topological equivalence problem. Later on, the results of this paper may be useful to find invariants of conjugacy for diffeomorphisms of the class under consideration on basic manifolds.

Key Words: conjugacy, commutative diagram, topological equivalence, solenoid, nonsingular endomorphism.

References

1. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.
2. R.F. Williams, "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6** (1967), 473-487.
3. R.F. Williams, "Classification of subshifts of finite type", *Annals of Math.*, **9** (1973), 120-153.
4. R.F. Williams, "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.
5. L. Block, "Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403-413.
6. F. Farrell, L. Jones, "New attractors in hyperbolic dynamics", *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980), 107-133.
7. J. Gibbons, "One-dimensional basic set in the three-sphere", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 163-178.
8. V.Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic sets, 1", *Transactions of the Moscow mathematical society*, **32** (1975), 35-60.
9. V.Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic sets, 2", *Transactions of the Moscow mathematical society*, **34** (1977), 243-252.

[3] **Nataliya V. Isaenkova**, Professor of department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation (3 Ankudinovskoe Shosse, Nizhni Novgorod, 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4880-3526, nisaenkova@mail.ru

[4] **Evgeny V. Zhuzhoma**, Professor of department of Fundamental Mathematics, National research University "Higher school of Economics" (25/12 Bolshaya Pecherskaya, Nizhni Novgorod, 603005, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8682-7591, zhuzhoma@mail.ru

10. V.Z. Grines, "On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers", *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 537–569.

11. V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, "On the topological classification of orientable attractors on an n-dimensional torus", *Russian Math. Surveys*, **34**:4 (1979), 163–164.

12. S.Kh. Aranson, V.Z. Grines, "On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of transitive dynamical systems)", *Math. USSR-Sb.*, **19**:3 (1973), 365–393.

13. V.Z. Grines, "On the topological equivalence of one-dimensional basic sets diffeomorphisms on two-dimensional manifolds", *Successes of mathematical Sciences*, **180**:6 (1974), 163-164.

14. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, "Zero-dimensional solenoidal base sets", *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 351–372.

15. C. Robinson, R. Williams, "Classification of expanding attractors: an example", *Topology*, **15** (1976), 321-323.

16. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova N.V., "On classification of one-dimensional expanding attractors", *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 333–341.

17. M. Shub, "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.

18. Z. Nitecki, "Nonsingular endomorphisms of the circle", *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.

19. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, "Classification of coverings of the circle", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **3** (2012), 88–93.

Submitted 10.03.2017