DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.19-29

УДК 514.7

О слоениях с трансверсальной линейной связностью

© **А. Ю. Долгоносова** [1]

Аннотация. Предметом данной статьи является обзор недавних результатов о слоениях с трансверсальной линейной связностью, полученных автором совместно с Н.И. Жуковой, и сопоставление их с результатами других авторов. Обзор состоит из трех частей. Первая часть посвящена группам автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью в категории слоений. Во второй части изложены результаты об эквивалентности различных подходов к понятию полноты для исследуемого класса слоений. В третьей части представлены теоремы о псевдоримановых слоениях, образующих важный класс слоений с трансверсальной линейной связностью. В частности, изложены результаты о графиках псевдоримановых слоений, которые содержат всю информацию о слоениях.

Ключевые слова: слоение, линейная связность, псевдориманово слоение, график слоения, бесконечномерная группа Ли, связность Эресмана.

1. Введение

Понятие слоения было введено французским математиком П. Пенлеве в конце 19 века как инструмент глобального анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая теория слоений была сформирована в 40-х годах 20-ого века на стыке дифференциальной геометрии, топологии и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Классические работы по теории слоений принадлежат Ш. Эресману, Ж. Рибу, а также А. Хевлигеру и Э. Жису. Значительный вклад в развитие геометрической теории слоении внесли И. Тамура, Р. Герман, Т. Инаба, П. Молино, С.П. Новиков, Ф. Тондеур, Б. Рейнхарт и П. Швейцер. Теория слоений нашла применение в теории оптимального управления, в теории динамических систем, в аналитической механике, в симплектической и контактной геометриях и других областях математики.

Исследованию слоений, согласованных с геометрическими структурами, посвящены многочисленные работы различных авторов таких, как Б. Рейнхарт, П. Молино, Ф. Тондеур, Ф. Камбер, Р. Волак, А. Бежанку и Х. Фарран, Л. Конлон, В.В. Ровенский, Х. Альварус Лопес, П. Вальчак, Н.И. Жукова и другие. В исследовании различных структур на слоеных многообразиях центральное место занимают слоения с трансверсальными структурами.

Слоения произвольной коразмерности на гладких многообразиях, допускающие в качестве трансверсальной структуры линейную связность, называются слоениями с трансверсальной линейной связностью (Определение 2.1.). Слоения с трансверсальной линейной связностью включают в себя трансверсально аффинные слоения, а также псевдоримановы, лоренцевы и римановы слоения.

Целью данной статьи является обзор недавних результатов о слоениях с трансверсальной линейной связностью, полученных автором совместно с Н.И. Жуковой, и сопоставление их с известными достижениями других авторов.

[1] **Долгоносова Анна Юрьевна**, старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, стажер-исследователь лаборатории ТМД, Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большкая Печерская, д. 25/12.), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0656-6374, annadolgonosova@gmail.com

По существу, работа состоит из трех частей. Первая часть посвящена результатам о группе автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью в категории слоений. Во второй части изложены результаты об эквивалентности различных подходов к понятию полноты для исследуемого класса слоений. В третьей части представлены теоремы о псевдоримановых слоениях, образующих значимый подкласс слоений с трансверсальной линейной связностью.

2. Слоение с трансверсальной линейной связностью и ассоциированное расслоение трансверсальных реперов

Напомним понятие слоения с трансверсальной линейной связностью. Пусть N — q-мерное многообразие и M — гладкое n-мерное многообразие, где $0 < q < n$. N*-коциклом* называется множество $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Семейство $\{U_i, i \in J\}$ образует открытое покрытие многообразия M.
2. Отображения $f_i : U_i \to N$ в N являются субмерсиями со связными слоями.
3. Если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$, тогда определен диффеоморфизм

$$k_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$$

такой, что: $f_i = k_{ij} \circ f_j$.

Компоненты линейной связности всех субмерсий p_j из максимального (по включению) N-коцикла $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$ образуют базу некоторой новой топологии Ω на M. Компоненты линейной связности топологического пространства (M, Ω) образуют разбиение $F = \{L\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ многообразия M, которое называется слоением, заданным указанным коциклом, а L_α, $\alpha \in A$, называются слоями этого слоения.

Пусть $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$ и $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$ — многообразия линейной связности, где $\nabla^{(1)}$ и $\nabla^{(2)}$ — операторы ковариантного дифференцирования. Напомним, что диффеоморфизм $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ называется изоморфизмом многообразий линейной связности $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$ и $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$, если он удовлетворяет равенству $f_*(\nabla^{(1)}_X Y) = \nabla^{(2)}_{f_*X} f_*Y$ для любых гладких векторных полей X и Y на $M^{(1)}$.

Определение 2.1. *Пусть (M, F) — слоение, заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$. Слоение (M, F) называется слоением с трансверсальной линейной связностью, если на N задана такая линейная связность ∇^N, что каждый локальный диффеоморфизм k_{ij} является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных на открытых подмножествах $f_i(U_i \cap U_j)$ и $f_j(U_i \cap U_j)$ в N.*

Конструкция слоеного расслоения используется многими авторами при исследовании слоений.

Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом, и $H = GL(q; R)$ — группа Ли невырожденных q-мерных матриц. Тогда определены:

1) главное H-расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$;

2) H-инвариантное слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, слои которого посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M, F).

Это расслоение обозначается через $\mathcal{R}(M, H)$, а слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется поднятым.

H-связностью в главном H-расслоении $\mathcal{R}(M, H)$ над n-мерным многообразием M называется n-мерное H-инвариантное распределение Q на $\mathcal{R}$, трансверсальное слоям расслоения.

Обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли группы Ли H. Напомним, что H-связность Q в H-расслоении $\mathcal{R}(M,H)$, где $H = GL(q,\mathbb{R})$, называется *трансверсально проектируемой* [1], если $\mathfrak{h}$-значная 1-форма связности ω удовлетворяет условиям:

$$i_X(\omega) = 0, \qquad i_X(d\omega) = 0 \tag{2.1}$$

для любого гладкого векторного поля, касательного к поднятому слоению.

В [2] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть (M,F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N,∇^N)-коциклом. Тогда существуют:*

1) слоеное расслоение $\mathcal{R}(M,H)$ с поднятым слоением $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, которое является e-слоением;

2) трансверсально проектируемая H-связность Q на $\mathcal{R}$, причем ее форма связности ω удовлетворяет условиям (2.1).

Определение 2.2. *Главное H-расслоение $\mathcal{R}(M,H)$, удовлетворяющее Предложению 2.1., называется слоеным расслоением трансверсальных реперов для слоения (M,F) с трансверсальной линейной связностью.*

Подчеркнем, что задание слоения (M,F) с трансверсальной линейной связностью эквивалентно заданию трансверсально проектируемой H-связности в расслоении трансверсальных реперов над M.

3. Группы автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью

В любой категории с каждым объектом ассоциируется группа его автоморфизмов. Одной из важных математических задач является исследование группы автоморфизмов объекта в заданной категории и нахождение условий, при которых эта группа допускает структуру группы Ли (см., например, введение в монографии Ш. Кобаяси [3]).

Через $\mathcal{F}ol$ мы обозначаем категорию слоений, объектами которой являются гладкие слоения, а морфизмами двух слоений — гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого слоения. Для простоты гладкость понимается класса C^∞, как это принято в дифференциальной геометрии, хотя фактически для выполнения всех результатов данной работы достаточно гладкости класса C^2.

При исследовании слоений с трансверсальными структурами рассматривается категория $\mathcal{F}ol^T$, в которой изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и трансверсальную геометрическую структуру. К таким работам относятся, в частности, статьи И. В. Белько [4], Дж. А. Лесли [5] и Н.И. Жуковой [6].

Дж. Хано и А. Моримота доказали, что группа всех аффинных преобразований аффинной связности есть конечномерная группа Ли. Ранее эта теорема была доказана К. Номидзу при дополнительном предположении полноты аффинной связности. Поэтому для указанной выше категории слоений $\mathcal{F}ol^T$ И. В. Белько в [4] поставил вопрос о существовании структуры конечномерной группы Ли в группе базовых автоморфизмов трансверсально проектируемых линейных связностей на слоеном многообразии, где группой базовых автоморфизмов называется факторгруппа всех автоморфизмов по нормальной подгруппе автоморфизмов, сохраняющих каждый слой слоения. Первые результаты такого рода были получены Дж. А. Лесли [5]. Для слоений с трансверсальной жесткой геометрией

Н.И. Жуковой [6] введен инвариант — структурная алгебра Ли и доказано, что равенство нулю этого инварианта является достаточным условием для того, чтобы группа базовых автоморфизмов допускала структуру конечномерной группой Ли. В [6] найдены также топологические достаточные условия для того, чтобы указанная группа была конечномерной группой Ли и получены некоторые точные оценки размерности этой группы. Так как слоения с трансверсальной линейной связностью входят в класс слоений с жесткими трансверсальными геометриями, то результаты статьи [6] верны и для них.

В отличие от предыдущих работ далее в этом разделе мы рассматриваем категорию гладких слоений $\mathcal{F}ol$, где изоморфизмы "не замечают"дополнительную трансверсальную структуру. При такой постановке задачи группы автоморфизмов гладких многообразий и слоений являются бесконечномерными многообразиями. При этом важно знать, на каких пространствах моделируются такие многообразия.

Например, Р. Пале́ [7] была введена гладкая структура на множестве $C^{\infty}(M', M)$ гладких отображений $M' \to M$ компактных многообразий M' и M. В качестве модельного пространства им был взят индуктивный предел гильбертовых пространств. Группа диффеоморфизмов $Diff(M)$ компактного многообразия M была исследована многими авторами. Дж. А. Лесли и Х. Омори ввели структуру бесконечномерных многообразий на $Diff(M)$, моделируемых на пространствах Фреше и на индуктивных пределах гильбертовых пространств, соответственно.

В случае некомпактного многообразия M применение FD-топологии позволило П. Михору [8] ввести гладкую структуру на $Diff(M)$, моделируемую на LF-пространствах, т.е., на индуктивных пределах пространств Фреше. Далее группа диффеоморфизмов многообразия M с FD-топологией обозначается через $\mathcal{D}(M)$.

Пусть (M, F) — произвольное гладкое слоение с трансверсальной линейной связностью. Объектом дальнейшего исследования является подгруппа $\mathcal{D}(M, F)$ группы $\mathcal{D}(M)$, элементами которой являются автоморфизмы слоения (M, F) в категории слоений $\mathcal{F}ol$.

Для того, чтобы ввести структуру гладкого бесконечномерного многообразия, моделируемого на LF-пространствах, в группе $\mathcal{D}(M)$, П. Михор [8] предложил конструкцию локальной добавки. Е. Масиас-Виргос и Е. Санмартин [9] адаптировали этот метод к слоениям. Они ввели и применили локальные слоеные добавки в исследовании групп автоморфизмов римановых слоений.

В работе автора и Н.И. Жуковой [2] доказана следующая теорема, которая обобщает результаты Е. Масиас-Виргоса и Е. Санмартин для римановых слоений [9] на слоения с трансверсальной линейной связностью.

Теорема 3.1. *Пусть (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M. Тогда группа автоморфизмов $\mathcal{D}(M, F)$ слоения (M, F) в категории слоений $\mathcal{F}ol$ допускает структуру бесконечномерной группы Ли, моделируемой на LF-пространствах.*

Для того, чтобы рассказать о методе доказательства Теоремы 3.1., напомним следующее понятие.

Определение 3.1. *Распределение на многообразии линейной связности называется геодезически инвариантным, если каждая геодезическая объемлющего пространства, касающаяся этого распределения в одной точке, касается его в каждой своей точке* [10].

Нами доказано следующее утверждение ([2], Теорема 4.1).

Теорема 3.2. *Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью и $\mathfrak{M}$ — q-мерное распределение, трансверсальное слоению (M, F). Тогда на многообразии M существует трансверсально проектируемая линейная связность $\nabla^{\mathfrak{M}}$, относительно которой оба распределения $\mathfrak{M}$ и TF являются вполне геодезическими.*

Для построения специальной линейной связности $\nabla^{\mathfrak{M}}$, удовлетворяющей Теореме 3.2., нами была использована конструкция слоеного расслоения трансверсальных реперов. Мы применили также результаты Уиломора и Уокера [11] о существовании линейной связности без кручения на многообразии M, относительно которой слоение (M, F) параллельно.

Применение Теоремы 13 и Следствия 14 из [9] позволило нам свести доказательство Теоремы 3.1. к построению слоеной локальной добавки для (M, F). Благодаря использованию специальной связности $\nabla^{\mathfrak{M}}$ наша конструкция слоеной адаптированной локальной добавки значительно проще, чем аналогичная конструкция для римановых слоений, используемая Масиас-Вигосом и Е. Санмартин в ([9]).

Замечание 3.1. *Так как псевдоримановы слоения, и в частности, лоренцевы слоения, принадлежат классу слоений с трансверсальной линейной связностью, то Теоремы 3.1. и 3.2. верны и для них.*

4. Полнота слоений с трансверсальной линейной связностью

Согласно известной теореме Хопфа — Ринова для риманова многообразия, понятие геодезической полноты эквивалентно полноте метрического пространства, метрика которого определяется с помощью функционала длины. Следовательно, любое компактное риманово многообразие является полным.

В работе [12] построены примеры компактных аффинных многообразий, не являющихся полными. Это иллюстрирует существенное отличие геодезической полноты многообразий аффинной связности от полноты римановых многообразий.

Р.А. Волак в [13] поставил вопрос об эквивалентности различных определений полноты для трансверсально аффинных слоений. Мы исследуем этот вопрос в классе слоений с трансверсальной линейной связностью.

В отличие от римановых слоений на компактных многообразиях, слоения с трансверсальной линейной связностью на компактных многообразиях не всегда являются геодезически полными.

Обозначим через $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ полупрямое произведение группы $H = GL(q, \mathbb{R})$ и векторной группы $\mathbb{R}^q$. Группу G можно интерпретировать как группу всех аффинных преобразований $Aff(A^q)$ q-мерного аффинного пространства A^q, а $H = GL(q, \mathbb{R})$ как стационарную подгруппу аффинной группы $Aff(A^q)$ в некоторой точке. Как известно, слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью можно рассматривать как картаново слоение с трансверсальной картановой геометрией типа (G, H) [14].

Определение 4.1. *Сохраним обозначения, введенные в разделе 2. Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсально проектируемой линейной связностью и $\mathcal{R}(M, H)$ — ассоциированное расслоение трансверсальных реперов. Пусть $\mathfrak{M}$ — фиксированное q-мерное распределение, трансверсальное слоению (M, F).*

Слоение (M, F) называется $\mathfrak{M}$-полным, если любое векторное поле X такое, что $X|_u \in \mathfrak{M}_u \ \forall u \in \mathcal{R}$ и $\omega(X) = const$, является полным.

Слоение (M, F) называется полным, если существует трансверсальное распределение $\mathfrak{M}$, относительно которого оно является $\mathfrak{M}$-полным.

В работе [15] доказана следующая теорема об эквивалентности различных подходов к определению полноты для исследуемого класса слоений.

Теорема 4.1. *Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$ Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1. *Слоение (M, F), рассматриваемое как картаново, является полным.*
2. *Слоение (M, F) полное в смысле определения 4.1.*
3. *На M существует трансверсальное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ и линейная связность ∇ такие, что:*

1) *каждая субмерсия f_i является аффинным отображением;*

2) *распределения $\mathfrak{M}$ и TF геодезически инвариантны;*

3) *канонический параметр на каждой максимальной геодезической, касающейся распределения $\mathfrak{M}$, изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.*

Заметим, что слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, является трансверсально аффинным слоением тогда и только тогда, когда кривизна и кручение линейной связности ∇^N равны нулю.

В [15] получено следующее необходимое условие полноты трансверсально аффинных слоений, которое, вообще говоря, не является достаточным.

Теорема 4.2. *Пусть (M, F) — трансверсально аффинное слоение произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии. Тогда из выполнения любого из трех эквивалентных условий полноты в Теореме 4.1. вытекает выполнение следующих двух независимых условий:*

(i) *существует связность Эресмана для слоения (M, F);*

(ii) *индуцированное слоение на универсальном накрывающем многообразии $\widetilde{M}$ образовано слоями субмерсии $r : \widetilde{M} \to A^q$ на аффинное пространство A^q.*

В [15] построены примеры, показывающие независимость условий (i) и (ii) в Теореме 4.2.

5. Геометрия псевдоримановых слоений

Римановы слоения, образующие подкласс слоений с трансверсальной линейной связностью, естественным образом возникают при изучении расслоений, слои которых являются поверхностями уровня, Они имеют большое прикладное значение в теории оптимального управления и в теории динамических систем. Римановы слоения являются наиболее глубоко изученными среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Впервые понятие риманова слоения появилось в работе Рейнхарта. Исследованию римановых слоений посвящены многочисленные работы ряда математиков таких, как П. Молино, А. Хефлигер, Э. Жис, Ф.Тондеур, Р. Герман, Е. Салем, И. Карьер, и многих других (см. [1] и ссылки там).

Задачу о нахождении критерия римановости слоения поставил Р.А. Волак в [16]. Он изучал компактные слоения, то есть, слоения, все слои которых компактны, и доказал, что любое полное компактное G-слоение конечного типа, а также любое полное компактное слоение, допускающее трансверсальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка. является римановым. Н.И. Жукова распространила эти результаты на компактные картановы слоения. В [17] ею доказан критерий римановости для конформных слоений коразмерности $q \geq 3$.

По сравнению с римановыми, псевдоримановы слоения имеют значительно более сложную структуру. Это объясняется, в частности, тем, что псевдо-ортогональная группа является некомпактной в отличие от ортогональной группы.

Простые псевдоримановы слоения образованны слоями псевдоримановых субмерсий, введенных и исследованных в классических работах О'Нейла и А. Грея.

Псевдоримановы слоения представляют интерес для различных направлений исследований в теоретической физике.

Определение 5.1. *Если каждый слой гладкого слоения (M, F) на псевдоримановом многообразии (M, g), наделенный индуцированной метрикой, является псевдоримановым многообразием, и метрика g трансверсально проектируема, т.е. производная Ли $L_X g$ от g равна нулю для любых гладких векторных полей X, касательных к (M, F), то слоение (M, F) называется псевдоримановым.*

Следующий критерии псевдоримановости слоения на псевдоримановом многообразии доказан в [18].

Теорема 5.1. *Пусть (M, F) — гладкое слоение произвольной коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), $0 < q < n$. Тогда для того, чтобы (M, F) было псевдоримановым слоением, необходимо и достаточно, чтобы на слоях слоения индуцировалась псевдориманова метрика и q-мерное распределение D, ортогональное к TF, было геодезически инвариантным.*

Из Теоремы 5.1. вытекает аналогичный критерий для римановых слоений, принадлежащий Б. Рейнхарту, подробное доказательство которого изложено в монографии Молино [1]. Это доказательство существенно опирается на свойство геодезических римановых многообразий быть локально экстремалями функционала длины. Подчеркнем, что данное свойство не имеет аналога в псевдоримановой геометрии. Отметим, что доказательство Теоремы 5.1. существенно использует критерий А. Д. Льюиса [10] геодезической инвариантности распределения на многообразии аффинной связности.

Следствие 5.1. *Сюръективная субмерсия $p : M \to B$ псевдоримановых многообразий M и B является псевдоримановой тогда и только тогда, когда индуцируется псевдориманова метрика на слоях и любая геодезическая, ортогональная слоению в одной точке, остается ортогональной ему в каждой своей точке.*

В работе Н.И. Жуковой и К.И. Шеиной [19] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы слоение с трансверсальной линейной связностью являлось псевдоримановым слоением произвольной сигнатуры и, в частности, римановым слоением.

Понятие группоида голономии принадлежит Ш. Эресману. Позднее эквивалентная конструкция под названием графика слоения была предложена Х.Винкелнкемпером. График $G(F)$ слоения (M, F) несет в себе информацию о слоении (M, F) и о его группах голономии. Одно из фундаментальных понятий K-теории и некоммутативной геометрии, C^*-алгебра, строится на графике $G(F)$ [20].

Исследованию графиков псевдоримановых слоений посвящена работа [18], в которой доказана следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $G(F)$ — график псевдориманова слоения (M,F) на псевдоримановом многообразии (M,g) и $p_i : G(F) \to M$, $i=1,2$, — его канонические проекции. Тогда:*

1. *График $G(F)$ является хаусдорфовым $(2n-q)$-мерным многообразием и на нем существует единственная псевдориманова метрика d такая, что индуцированное слоение*
$$\mathbb{F} = \{\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) | L_\alpha \in F\}$$
на $(G(F),d)$ является псевдоримановым слоением, а p_i являются псевдоримановыми субмерсиями, причем слои субмерсий p_1 и p_2 ортогональны.

2. *Каждый слой $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$ индуцированного слоения изометричен псевдориманову фактор-многообразию $(\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha)/\Psi_\alpha$ произведения псевдоримановых многообразий $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha$, где $\mathcal{L}_\alpha$ — голономное псевдориманово накрывающее пространство для слоя L_α, по группе изометрий Ψ_α, изоморфной группам голономии $\Gamma(\mathbb{L}_\alpha)$ и $\Gamma(L_\alpha)$ слоев $L_\alpha \in F$ и $\mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{F}$, $p_i(\mathbb{L}_\alpha) = L_\alpha$.*

Как известно, график произвольного гладкого слоения (M,F) коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M является, вообще говоря, нехаусдорфовым гладким многообразием размерности $(2n-q)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00312) и программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ-Нижний Новгород в 2017 году (проект № 90).

Выражаю благодарность Н.И. Жуковой за научное руководство данной работой.

Список литературы

1. P. Molino, “Proprietes cohomologiques et proprietes topologiques des feuilletages a connexion transverse projetable”, *Topology*, **12**:12 (1973), 317–325.
2. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, “The automorphism groups of foliations with transverse linear connection”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.
3. S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
4. И. В. Белько, “Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением”, *Матем. сб.*, **117**:2 (1982), 181–195.
5. A. J. Leslie, “A remark on the group of automorphisms of a foliations having a dense leaf”, *J. Diff. Geom.*, **7** (1972), 597—601.
6. N. I. Zhukova, “Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms”, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia*, 2009, № 2, 14—35.
7. R. A. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, Benjamin, New-York, 1968.
8. P. Michor, “Manifolds of differentiable mappings”, *Shiva, Orpington*, 1980.

А. Ю. Долгоносова. О слоениях с трансверсальной линейной связностью

9. E. Macias-Virgos, E. Sanmartin, “Manifolds of maps in Riemannian foliations”, *Geometrial Dedicata*, 2000, № 79, 143–156.

10. A. D. Lewis, “Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics”, *Rep. Math. Phys.*, **42**:1–2 (1998), 135–164.

11. A. G. Walker, “Connexions for parallel distributions in the large]”, *Quart. J. Math*, **2**:6 (1955), 301–308.

12. D. Fried, W. Goldman, W. M Hirsh., “Afflne manilolds with nilpotent holonomy”, *Comment. Math. Helvetici*, 1981, № 56, 487–523.

13. R. A. Wolak, “Growth of leaves in transversely affine foliations”, *Proceedings of the American mathematical society*, **127**:7 (1999), 2167—2173.

14. Н. И. Жукова, “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, **256** (2012), 115–147.

15. Н. И. Жукова, А. Ю Долгоносова, “Эквивалентные подходы к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью”, *Труды Средневолжского математического общества*, **17**:4 (2015), 14–23.

16. R. A. Wolak, “Leaves of foliations with transverse G -srtuctures of finite type”, *Publications Matematiques*, 1989, № 33, 153–162.

17. Н. И. Жукова, “Аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений”, *Сиб. матем. журнал*, **52**:3 (2011), 555–574.

18. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, “Pseudo-Riemannian foliations and their graphs”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, № 1, - 12–25.

19. Н. И. Жукова, К. И. Шеина, “Критерий псевдоримановости слоения с трансверсальной линейной связностью”, *Труды Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 30–40.

20. A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, Boston, 1994.

Поступила 24.03.2017

MSC2010 57R30

On foliations with transverse linear connection

© **A. Yu. Dolgonosova** [2]

Abstract. The subject of this article is a review of the results on foliations with transversal linear connection obtained by the author together with N.I. Zhukova, and their comparison with the results of other authors. The work consists of three parts. The first part focuses on automorphism groups of foliations with a transversal linear connection in the category of foliations. In the second part the equivalence of the concepts of completeness for the class of foliations under investigation is studied. In the third part we present theorems on pseudo-Riemannian foliations that form an important class of foliations with a transversal linear connection. In particular, we present results on graphs of pseudo-Riemannian foliations that contain all information about foliations.
Key Words: foliation, linear connection, pseudo-Riemannian foliation, graph of foliation, infinite-dimensional Lie group, Ehresmann connection.

References

1. P. Molino, "[Proprietes cohomologiques et proprietes topologiques des feuilletages a connexion transverse projetable]", *Topology*, **12**:12 (1973), 317–325.
2. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, "[The automorphism groups of foliations with transverse linear connection]", *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.
3. S. Kobayashi, *[Transformation groups in differential geometry]*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
4. I. V. Bel'ko, "Affinnye preobrazovaniya transversalno proekteruemoy svaznosti na mnogoobrazii so sloeniem [Affine transformations of a transversal projectable connection on a foliated] manifold", *Math. USSR Sb.*, **117**:2 (1982), 181–195 (In Russ.).
5. A. J. Leslie, "[A remark on the group of automorphisms of a foliations having a dense leaf]", *J. Diff. Geom.*, **7** (1972), 597—601.
6. N. I. Zhukova, "[Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms]", *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia*, **2** (2009), 14—35.
7. R. A. Palais, *[Foundations of global non-linear analysis]*, Benjamin, New-York, 1968.
8. P. Michor, "[Manifolds of differentiable mappings]", *Shiva, Orpington*, 1980.
9. E. Macias-Virgos, E. Sanmartin, "[Manifolds of maps in Riemannian foliations]", *Geometrial Dedicata*, **79** (2000), 143–156.
10. A. D. Lewis, "[Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics]", *Rep. Math. Phys.*, **42**:1–2 (1998), 135–164.

[2] **Anna Yu. Dolgonosova**, senior lecturer of department of fundamental mathematics, research assistant of laboratory of topological methods of dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskay Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0656-6374, annadolgonosova@gmail.com

11. A. G. Walker, "[Connexions for parallel distributions in the large]", *Quart. J. Math.*, **2**:6 (1955), 301–308.

12. D. Fried, W. Goldman, W. M Hirsh., "[Afflne manilolds with nilpotent holonomy]", *Comment. Math. Helvetici*, **56** (1981), 487–523.

13. R. A. Wolak, "[Growth of leaves in transversely affine foliations]", *Proceedings of the American mathematical society*, **127**:7 (1999), 2167—2173.

14. N. I. Zhukova, "Minimalnye mnozhestva cartanovyh sloeniy[The minimal sets of Cartan foliations]", *Tr. MIAN*, **256** (2012), 115–147 (In Russ.).

15. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, "Eqvivalentnye podhody k ponyatiyu polnoty sloeniy sloeniy s transversalnoy lineynoy svyaznostyu[Equivalent approaches to the concept of completeness of foliations with transverse linear connection]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:4 (2015), 14–23 (In Russ.).

16. R. A. Wolak, "[Leaves of foliations with transverse G -srtuctures of finite type]", *Publications Matematiques*, **33** (1989), 153–162.

17. N. I. Zhukova, "Analog gipotezy Lichnerovicha dlya conformnyh sloeniy[An analogue of Lichnerovich's conjecture for conformal foliations]", *Sib. math. journal*, **52**:3 (2011), 555–574 (In Russ.).

18. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, "[Pseudo-Riemannian foliations and their graphs]", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **1** (2018), 12–25.

19. N. I. Zhukova, K. I. Sheina, "Kritery psevdorimanovasti sloeny s transversalnoy lineynoy svyaznostyu [A criterion for foliations with transverse linear connection to be pseudo-Riemannian]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 30–40 (In Russ.).

20. A. Connes, *[Noncommutative geometry]*, Academic Press, Boston, 1994.

Submitted 24.03.2017