DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.30-37

УДК 515.162

Ориентируемость инвариантных слоений псевдоаносовских гомеоморфизмов и разветвлённые накрытия

© **А. Ю. Жиров**[1]

Аннотация. В статье рассматривается псевдоаносовский гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности (возможно, обобщённый), инвариантные слоения которого неориентируемы. Описана конструкция, посредством которой по такому гомеоморфизму строится двулистное накрытие данной поверхности (вообще говоря, разветвлённое) и псевдоаносовский гомеоморфизм накрывающей поверхности, который накрывает исходный и имеет ориентируемые инвариантные слоения. Если исходный гомеоморфизм не имеет особенностей нечётной валентности, то накрытие, которое строится, — неразветвлённое. В противном случае оно имеет точки ветвления кратности 2 в особенностях нечётной валентности. Устанавливается, что в первом случае накрывающий гомеоморфизм имеет вдвое большее по сравнению с исходным число особенностей тех же валентностей, а во втором число особенностей чётных валентностей удваивается и к ним прибавляются особенности удвоенных нечётных валентностей.

Ключевые слова: псевдоаносовские гомеоморфизмы, сингулярные слоения, разветвленные накрытия.

1. Псевдоаносовские гомеоморфизмы

Пусть $f : M \to M$ – *обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм* (GPA-гомеоморфизм) замкнутой ориентируемой поверхности рода g, т.е. такой, что имеются два f-инвариантных трансверсальных друг другу одномерных слоения $\mathcal{W}^u, \mathcal{W}^s$ поверхности M с конечным множеством S общих *особенностей*, инвариантных относительно f и таких, что f растягивает слои первого с некоторым коэффициентом $\lambda > 1$ (называемом *дилатацией* GPA-гомеоморфизма) и сжимает слои второго с коэффициентом λ^{-1}. Растяжение и сжатие слоёв понимается в смысле трансверсальных мер μ^s, μ^u. Первая измеряет длины дуг слоёв $\mathcal{W}^u$, вторая – слоёв $\mathcal{W}^s$ (точное определение этих мер см. [1],[2]). При этом в окрестности особой точки каждое из слоений устроено как седло с $d \neq 2$ сепаратрисами (*особая точка валентности* d). Если нет особых точек валентности 1 (игл), то гомеоморфизм называется *псевдоаносовским* (PA-гомеоморфизм). *Сингулярным типом* GPA-гомеоморфизма f называется последовательность $\mathcal{B} = \mathcal{B}(f) = \{b_d : d \in \mathbb{N}\}$, где b_d есть число особенностей валентности d. Дилатация и сингулярный тип представляют собой инварианты топологической сопряжённости GPA-гомеоморфизмов.

Наряду с ними инвариантом является свойство ориентируемости инвариантных слоений. Слоение с особенностями называется *ориентируемым*, если для любой дуги слоя и любой трансверсальной ему дуги индекс пересечения во всех точках одинаков. Легко видеть, что если инвариантные слоения GPA-гомеоморфизма имеют хотя бы одну особую точку нечётной валентности, то они не могут быть ориентируемыми. Например, «существенно обобщённый» псевдоаносовский гомеоморфизм (обобщённый псевдоаносовский,

[1] **Жиров Алексей Юрьевич**, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.), доктор физико-математических наук, ORCID:http://orcid.org/0000-0002-8957-3934, alexei_zhirov@mail.ru

не являющийся псевдоаносовским, т.е. имеющий хотя бы одну особенность типа игла) имеет неориентируемые инвариантные слоения. В 1974 г. Р.В. Плыкиным [3] был приведён пример посуществу такого гомеоморфизма сферы (псевдоаносовские гомеоморфизмы тогда ещё не были введены). Он построил диффеоморфизм двумерной сферы, удовлетворяющий аксиоме А С. Смейла, неблуждающее множество которого состоит из одномерного гиперболического аттрактора и четырёх отталкивающих неподвижных точек, а этот диффеоморфизм изотопен посредством изотопии, фиксирующей отталкивающие точки, GPA-гомеоморфизму с четырьмя особенностями типа игла.

Если валентности всех особых точек чётны, то слоения могут быть как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Это вытекает из теоремы Х. Мазура и Дж. Смайли [4], а в [5] имеются примеры двух псевдоаносовских гомеоморфизмов кренделя (примеры 15.2 и 15.3), инвариантные слоения которых имеют по две особенности валентности 4, причём для первого из них слоения ориентируемы, а для второго – нет.

Разветвлённое k-листное накрытие поверхности M с *множеством ветвления* $\Sigma \subset M$ – это такое непрерывное отображение p некоторой поверхности $\widetilde{M}$ на M, что для каждой точки $x \notin \Sigma$ найдётся открытый диск $U \ni x$, для которого $p^{-1}(U)$ есть объединение k непересекающихся дисков $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_k$ и ограничения $p|\widetilde{U}_i : \widetilde{U}_i \to U$ суть гомеоморфизмы, а для каждой точки $x \in \sum$ найдётся содержащий её диск U, для которого $p^{-1}(U)$ есть объединение $k(x) < k$ дисков $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_{k(x)}$ и в некоторых локальных координатах на плоскости комплексного переменного z отображение $p|\widetilde{U}_i$ имеет вид $z \mapsto z^{k_i}$ ($k_i \geqslant 1$, $\sum k_i = k$). Точка $\widetilde{x}_i \in p^{-1}(x) \bigcap \widetilde{U}_i$ ($x \in \Sigma$), для которой $k_i > 1$, называется точкой ветвления, а число k_i – её кратностью.

Основной результат настоящей работы составляет следующая

Т е о р е м а. *Пусть $f : M \to M$ есть обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности рода g с неориентируемыми инвариантными слоениями, имеющий сингулярный тип $\mathcal{B}(f) = \{b_d\}$. Тогда существуют замкнутая ориентируемая поверхность $\widetilde{M}$ рода*

$$\widetilde{g} = 2g - 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant 1} b_{2k-1},$$

псевдоаносовский гомеоморфизм $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ с ориентируемыми инвариантными слоениями и двулистное разветвлённое накрытие $p : \widetilde{M} \to M$ с множеством ветвления, совпадающим с множеством особенностей нечётной валентности инвариантных слоений f. При этом

1). *Гомеоморфизм $\widetilde{f}$ накрывает f т.е. $p \circ \widetilde{f} = f \circ p$ и имеет ту же дилатацию, что и f.*

2). *Отображение накрытия p переводит слои растягивающегося слоения $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ (сжимающегося слоения $\widetilde{\mathcal{W}}^s$) гомеоморфизма $\widetilde{f}$ в слои растягивающегося (сжимающегося) слоения f.*

3). *Сингулярный тип $\mathcal{B}(\widetilde{f}) = \{\widetilde{b}_d\}$ гомеоморфизма $\widetilde{f}$ определяется следующим образом:*

$$\widetilde{b}_d = \begin{cases} 0, & \text{если } d \text{ нечётно (или } d = 2); \\ 2b_d + b_{d/2}, & \text{если } d \text{ чётно и не кратно } 4 \text{ (и } d \neq 2); \\ 2b_d, & \text{если } d \text{ кратно } 4; \end{cases}$$

Для подробного описание, какое соответствие между инвариантными слоениями гомеоморфизмов $\widetilde{f}$ и f осуществляет отображение накрытия, можно сказать следующее.

1) Особые точки инвариантных слоений $\widetilde{f}$ суть прообразы особых точек валентностей, отличных от 1, инвариантных слоений f.

2) Прообраз каждого сжимающегося (растягивающегося) особого слоя f, выходящего из особой точки валентности 1 (если таковые имеются), есть неособый слой для сжимающего (растягивающегося) слоя $\widetilde{f}$.

3) Прообраз слоя, выходящего из особой точки нечётной валентности $d > 2$ (если таковые имеются), есть объединение двух особых слоёв, выходящих из особой точки валентности $2d$.

4) Прообраз каждого особого слоя, выходящего из особой точки чётной валентности, есть объединение двух особых слоёв, выходящих из двух различных особых точек той же валентности.

Замечание 1. *Если инвариантные слоения исходного гомеоморфизма f не имеют особых точек нечётных валентностей, то, согласно утверждению теоремы, накрытие p не имеет точек ветвления, т.е. является двулистным накрытием в обычном смысле этого слова.*

Так, для псевдоаносовского гомеоморфизма из упомянутого выше примера 15.3 [5], согласно этой теореме, получается двулистное накрытие кренделя поверхностью рода 3 и накрывающий псевдоаносовский гомеоморфизм с четырьмя особыми точками инвариантных слоений, валентности 4 каждая. Для примера Плыкина получается двулистное разветвлённое накрытие сферы тором с четырьмя точками ветвления кратности 2 и накрывающий гомеоморфизм без особых точек инвариантных слоений, т.е. диффеоморфизм Аносова двумерного тора. Посуществу это обстоятельство позволило дать способ построение диффеоморфизма Плыкина способом, отличным от первоначальной конструкции (см. например [6], §17.2).

Перечисленные выше свойства разветвлённого накрытия p очевидным образом вытекают из доказательства теоремы, которое состоит в явном построении поверхности $\widetilde{M}$, отображения p и гомеоморфизма $\widetilde{f}$. Оно основано на технике ленточных представлений GPA-гомеоморфизмов, развитой в [5]. Для удобства читателя те конструкции из [5], которые потребуются, будут воспроизведены ниже.

Доказательство теоремы состоит в явном построении поверхности $\widetilde{M}$, отображения p и гомеоморфизма $\widetilde{f}$. Оно основано на технике ленточных представлений GPA-гомеоморфизмов, развитой в [5]. Оставшаяся часть данного сообщения содержит краткое и неформальное описание этой конструкции, представляющей, по мнению автора, самостоятельный интерес в связи с возможными обобщениями.

Ленточные представления GPA-гомеоморфизма строятся по его марковским разбиениям описываемого ниже специального вида. Вообще *марковское разбиение* для GPA-гомеоморфизма есть конечный набор параллелограммов $\mathcal{P} = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_n\}$, т.е. замкнутых подмножеств M, каждое из которых есть образ при непрерывном отображении χ_j в M плоского прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат (горизонтальной и вертикальной), переводящим горизонтальные (вертикальные) отрезки в дуги слоёв сжимающегося (растягивающегося) слоения. Образ внутренности прямоугольника назовём внутренней частью параллелограмма. Требуется чтобы внутренние части параллелограммов не пересекались, их объединение совпадало с самой поверхностью, а для множеств $\partial^s\mathcal{P}$ (объединение сжимающихся сторон всех параллелограммов) и $\partial^u\mathcal{P}$ (объединение их растягивающихся сторон) было выполнено $f(\partial^s\mathcal{P}) \subset \partial^s\mathcal{P}$, $f(\partial^u\mathcal{P}) \supset \partial^u\mathcal{P}$.

Лемма 1.1. *([5], §5) Пусть $W_1^s, \ldots, W_m^s$ есть семейство особых слоёв, циклически переходящих друг в друга, и S_k есть особая точка, принадлежащая W_k^s. Тогда существуют*

1) семейство дуг $I_k \subset W^s_k$ *, циклически переходящих друг в друга, таких, что* $S_k \in I_k$ *;*

2) марковское разбиение $\mathcal{P} = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_n\}$ *такое, что* $\partial^s \mathcal{P} = \cup_k I_k$ *, каждая сжимающаяся сторона любого параллелограмма содержится в той дуге* I_k *, с которой она имеет общие внутренние точки и каждая связная компонента множества* $\partial^u \mathcal{P} \setminus \bigcup_k \operatorname{int} I_k$ *содержит особую точку инвариантных слоений.*

Рассмотрим марковское разбиение, обладающее перечисленными в лемме свойствами. Каждая компонента связности множества $\partial^u \mathcal{P}$ представляет собой *звезду*, т.е. объединение дуг (*лучей*) всех особых слоёв растягивающегося слоения, исходящих из некоторой особой точки (*центра звезды*), и имеющих концы внутри дуг I_k.

Сделаем в поверхности M разрезы вдоль лучей всех звёзд. Каждую связную компоненту края $\partial\Pi$ полученной поверхности Π будем рассматривать как d-угольник, где d – число лучей соответствующей звезды, считая его вершинами точки пересечения с дугами I_k, отличные от их концов, а сторонами – соединяющие вершины дуги растягивающихся слоёв (в случае $d = 1$ получается одноугольник со стороной, получающейся при разрезании вдоль единственного луча). Полученную поверхность с краем Π назовём *ленточной.* Подмножества Π, получающиеся из параллелограммов марковского разбиения, будем называть *лентами* и обозначать теми же символами Π_j, а сжимающиеся (растягивающиеся) стороны параллелограмма будем называть *концами* ленты. Можно сказать, что ленточная поверхность получается приклеиванием лент их концами к дугам I_k (после разрезания они становятся дизъюнктными), которые будем называть *базисными отрезками*, а их объединение I – *базисом* ленточной поверхности.

Выберем для каждого базисного отрезка два направления: одно, которое будем называть горизонтальным и говорить о нём «направление слева направо» – это направление на самом базисном отрезке, а другое – вертикальное или «направление снизу вверх» – это трансверсальное направление к нему. При этом потребуем, чтобы указанная пара направлений задавала одну и ту же ориентацию поверхности, которую зафиксируем. Тогда в понятном смысле можно говорить о том, что данная лента приклеена данным концом к базису сверху или снизу. Соответственно будем говорить о том, что лента приклеена к базису либо *односторонне* (т.е. обоими концами сверху или обоими снизу), либо *двусторонне* (одним концом сверху, а другим снизу). Разумеется эти характеризации лент зависят от произвола в выборе горизонтальных и вертикальных направлений для базисных отрезков. Заметим, что при изменении на противоположное одного из направлений для какого-либо базисного отрезка, другое автоматически изменяется на противоположное.

Лемма 1.2. *Инвариантные слоения GPA-гомеоморфизма ориентируемы тогда и только тогда, когда для базисных отрезков его ленточной поверхности можно выбрать горизонтальные и вертикальные направления таким образом, что все ленты будут приклеены к базису двусторонне.*

По ленточной поверхности Π данного GPA-гомеоморфизма построим поверхность $\widetilde{\Pi}$ и двулистное (неразветвлённое) накрытие $p : \widetilde{\Pi} \to \Pi$, причём поверхность $\widetilde{\Pi}$ по построению будет устроена как ленточная в том смысле, что она получается приклеиванием $2n$ лент к $2m$ дизъюнктных базисных отрезков, где n и m – число лент и базисных отрезков Π соответственно. Предположим, что горизонтальные направления выбраны таким образом, что их левые концы суть содержащиеся в них периодические точки. Занумеруем отрезки $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2n}$, вдоль которых к базису приклеены ленты, в соответствии с возрастанием номеров базисных отрезков и направлением каждого из них слева направо, предполагая при этом, что сначала в этой последовательности следуют концы лент, вдоль которых они приклеены к базису сверху, а затем те, вдоль которых ленты приклеены снизу. Конец ленты, имеющий меньший номер, будем называть первым, а другой её конец – вторым.

Рассмотрим дизъюнктное объединение двух экземпляров исходной ленточной поверхности. Обозначим их Π^a и Π^b соответственно. Базисные отрезки и ленты первого экземпляра обозначим I_k^a и Π_j^a, а базисные отрезки и ленты второго – I_k^b и Π_j^b. Обозначим $\widetilde{I} = I^a \cup I^b$, где $I^a = \cup_k I_k^a$ и $I^b = \cup_k I_b^a$ (все объединения дизъюнктны). Затем, оставляя без изменения ленты, приклеенные к каждому экземпляру базиса двусторонне, «переклеим» ленты, приклеенные односторонне, следующим образом.

Пусть лента Π_j приклеена к базису поверхности Π односторонне. Обозначим через Δ' и Δ'' первый и второй её концы соответственно. Рассмотрим «копии» Π_j^a, Π_j^b ленты Π_j, а также копии Δ'_a, Δ''_a, Δ'_b и Δ''_b отрезков Δ' и Δ''. Отрежем ленты Π_j^a, Π_j^b от $\widetilde{I}$: первую вдоль отрезка Δ''_a, а вторую вдоль Δ''_b. После этого приклеим ленту Π_j^a вдоль «освободившегося конца» к отрезку Δ''_b, а ленту Π_j^b – к Δ''_a.

Полученную поверхность обозначим $\widetilde{\Pi}$ и определим отображение $p : \widetilde{\Pi} \to \Pi$ как переводящее каждую из двух точек, являющихся «копиями» точки $x \in \Pi$, в саму эту точку. Очевидно, что p есть двулистное накрытие, а поверхность $\widetilde{\Pi}$ может рассматриваться как абстрактная ленточная поверхность в указанном выше смысле. То, что мы называем её абстрактной, связано с тем, что a'priory она может не быть ленточной поверхностью какого-либо GPA-гомеоморфизма. Например, это так, если если она окажется несвязной (так оно и будет, если все ленты поверхности Π приклеены к её базису двусторонне), что невозможно в случае ленточной поверхности GPA-гомеоморфизма, поскольку слои его инвариантных слоений плотны в M.

Лемма 1.3. *Если инвариантные слоения GPA-гомеоморфизма f неориентируемы, то абстрактная ленточная поверхность $\widetilde{\Pi}$, построенная по его ленточной поверхности Π связна.*

Лемма 1.4. *Подъём при накрытии $p : \widetilde{\Pi} \to \Pi$ каждой компоненты края ленточной поверхности Π, являющейся d-угольником, есть $2d$-угольная компонента края поверхности $\widetilde{\Pi}$, если d нечётно, и дизъюнктное объединение двух d-угольных компонент её края, если d чётно. Этими многоугольниками с чётным числом углов исчерпываются все компоненты края $\widetilde{\Pi}$.*

Разрезание поверхности M, приводящее к поверхности Π, производится по дугам, составляющим множество $\partial^u \mathcal{P}$, а $f(\partial^u \mathcal{P}) \supset \partial^u \mathcal{P}$. Поэтому после разрезания из GPA-гомеоморфизма f получается непрерывное отображение $\Pi \to \Pi$, которое будем обозначать тем же символом f.

Определим непрерывное отображение $\widetilde{f} : \widetilde{\Pi} \to \widetilde{\Pi}$, накрывающее $f : \Pi \to \Pi$. Для этого рассмотрим отображения $\iota_a, \iota_b : \Pi \to \widetilde{\Pi}$, определяемые следующими условиями:

$$\begin{gathered} \iota_a(\Pi \setminus I) = \Pi^a \setminus \widetilde{I}; \quad \iota_a(I) = I_a; \quad \iota_b(\Pi \setminus I) = \Pi^b \setminus \widetilde{I}; \quad \iota_b(I) = I_b; \\ p \circ \iota_a = p \circ \iota_b = \mathrm{id}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Из конструкции поверхности $\widetilde{\Pi}$ вытекает, что указанными условиями эти отображения корректно определены, причём их ограничения на каждое из множеств $\Pi \setminus I$ и I непрерывны, а сами они имеют разрывы на I в точках тех отрезков, вдоль которых производились переклейки лент.

Определим ограничение отображения $\widetilde{f}$ на базисе поверхности $\widetilde{\Pi}$, полагая

$$\widetilde{f}|I_a = \iota_a \circ f \circ p|I_a; \quad \widetilde{f}|I_b = \iota_b \circ f \circ p|I_b, \tag{1.2}$$

а затем продолжим его на ленты этой поверхности.

Для этого зададим два отображения

$$f_a : \Pi^a \setminus \iota_a(f^{-1}(I)) \to \widetilde{\Pi}, \quad f_b : \Pi^b \setminus \iota_b(f^{-1}(I)) \to \widetilde{\Pi},$$

полагая

$$f_a := \iota_a \circ f \circ p, \quad f_b := \iota_b \circ f \circ p. \tag{1.3}$$

Первое из них непрерывно на каждой связной компоненте множества $\Pi^a \setminus \iota_a(f^{-1}(I))$, а второе — на каждой связной компоненте $\Pi^b \setminus \iota_b(f^{-1}(I))$. С помощью этих двух отображений будем строить продолжение $\widetilde{f}$ на ленты.

Рассмотрим для каждой ленты Π_j исходной ленточной поверхности Π связные компоненты множества $\Pi_j \setminus f^{-1}(I)$. Для краткости будем называть их *секторами* ленты Π_j. Обозначим через K_j их число, а сами секторы — через $\Pi_{j,1}, \ldots, \Pi_{j,K_j}$, занумеровав их вторым индексом в соответствии с направлением на ленте от её первого конца ко второму. Замыкание сектора есть параллелограмм. Его сжимающиеся стороны будем называть *концами сектора*, причём *первым концом* сектора $\Pi_{j,1}$ будем считать тот, который совпадает с первым концом ленты Π_j а другой — *вторым*. Для сектора $\Pi_{j,k}$ ($k > 1$) будем считать первым концом тот, который совпадает со вторым концом $\Pi_{j,k-1}$, а другой — вторым его концом. Заметим, что сами концы сектора в нём не содержатся. Очевидно, что образ под действием f каждого сектора содержится в некоторой ленте, а образы его концов — в концах этой ленты и, следовательно в базисе I.

Определим секторы для лент поверхности $\widetilde{\Pi}$, полагая $\Pi^a_{j,k} := \iota_a(\Pi_{j,k})$, $\Pi^b_{j,k} := \iota_b(\Pi_{j,k})$, а также первый и второй концы каждого из них как образы первого и второго концов сектора $\Pi_{j,k}$ при отображениях ι_a, ι_b.

Зададим отображение $\widetilde{f}$ на первых секторах лент поверхности $\widetilde{\Pi}$, полагая

$$\widetilde{f}|\Pi^a_{j,1} := f_a|\Pi_{j,1}; \qquad \widetilde{f}|\Pi^b_{j,1} := f_b|\Pi_{j,1}. \tag{1.4}$$

Далее, для каждой ленты $\widetilde{\Pi}^a_j$ ($\widetilde{\Pi}^b_j$) будем последовательно определять $\widetilde{f}$ на секторах $\Pi^a_{j_2}, \ldots, \Pi^a_{j_{K_j}}$ (соответственно $\Pi^b_{j_2}, \ldots, \Pi^b_{j,K_j}$) следующим образом.

Пусть для $1 < k \leqslant K_j$ (при фиксированном $j \in \overline{1,n}$) $\Pi_{i_{k-1}}$ есть лента поверхности Π, содержащая $f(\Pi_{j,k-1})$.

Предположим, что ограничения $\widetilde{f}|\Pi^a_{j,k-1}$ и $\widetilde{f}|\Pi^b_{j,k-1}$ уже определены, причём

$$\widetilde{f}|\Pi^a_{j,k-1} = f_a|\Pi^a_{j,k-1}; \quad \widetilde{f}|\Pi^b_{j,k-1} = f_b|\Pi^b_{j,k-1}.$$

Тогда полагаем

$$\begin{gathered}
\widetilde{f}|\Pi^a_{j,k} := \begin{cases} f_a|\Pi^a_{j,k}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису двусторонне;} \\ f_b|\Pi^a_{j,k}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису односторонне;} \end{cases} \\
\widetilde{f}|\Pi^b_{j,k} := \begin{cases} f_b|\Pi^b_{j,k}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису двусторонне;} \\ f_a|\Pi^b_{j,k}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису односторонне;} \end{cases}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

В случае, когда эти ограничения определены как

$$\widetilde{f}|\Pi^a_{j,k-1} = f_b|Pi^a_{j,k-1}; \quad \widetilde{f}|\Pi^b_{j,k-1} = f_a|\Pi^b_{j,k-1},$$

ограничения $\widetilde{f}|\Pi^a_{j,k}$ и $\widetilde{f}|\Pi^b_{j,k}$ определяем по тем же формулам (1.5), поменяв в их правых частях местами f_a и f_b.

Формулы (1.4)–(1.5) определяют отображение $\widetilde{f}$ на всей поверхности $\widetilde{\Pi}$ кроме точек, принадлежащих концам секторов её лент, т.е. точек множества $\widetilde{I}\cup\iota_a(f^{-1}I)\cup\iota_b(f^{-1}I)$. На $\widetilde{I}$ оно было определено равенствами (1.2). Можно показать, что продолжение по непрерывности отображения $\widetilde{f}$ на концы секторов превращает его в непрерывное отображение $\widetilde{\Pi}\to\widetilde{\Pi}$.

По построению оно взаимно однозначно на внутренности $\widetilde{\Pi}$, а на крае устроено следующим образом. В силу леммы 4 каждая компонента края $\widetilde{\Pi}$ есть многоугольник с вершинами, лежащими внутри базисных отрезков, и сторонами, являющимися дугами, составленными из краёв лент. Каждая сторона такого многоугольника содержит единственную периодическую точку отображения $\widetilde{f}$. Рассмотрим, какую-нибудь вершину A такого многоугольника. Пусть δ_1 и δ_2 — дуги, содержащиеся в его смежных сторонах и соединяющие данную вершину с периодическими точками, лежащими на этих сторонах. Дуги δ_1 и δ_2 содержат дуги δ_1' и δ_2', имеющие точку A общим концом, и такие, что $\widetilde{f}(\delta_1')=\widetilde{f}(\delta_2')$ есть дуга, все точки которой лежат внутри $\widetilde{\Pi}$ кроме образов её концов, отличных от $\widetilde{f}(A)$. Последние переходят в одну точку на крае $\widetilde{\Pi}$, а именно — в одну из вершин некоторого многоугольника, являющегося компонентой края $\widetilde{\Pi}$. Иными словами, каждой точке $x_1\in\delta_1'$ соответствует единственная точка $x_2\in\delta_2'$ такая, что $\widetilde{f}(x_1)=\widetilde{f}(x_2)$.

Замкнутую поверхность $\widetilde{M}$ получим, отождествив точки x_1,x_2 каждой такой пары, а также точки $\widetilde{f}^{-k}(x_1)$, $\widetilde{f}^{-k}(x_2)$ ($k\geqslant 1$). Кроме того, отождествим все периодические точки, лежащие на одной и той же компоненте края $\widetilde{\Pi}$.

При таких отождествлениях из отображения $p:\widetilde{\Pi}\to\Pi$ получится разветвлённое накрытие $p:\widetilde{M}\to M$, а из отображения $\widetilde{f}:\widetilde{\Pi}\to\widetilde{\Pi}$ — гомеоморфизм $\widetilde{f}:\widetilde{M}\to\widetilde{M}$, накрывающий f. Гомеоморфизм $\widetilde{f}$, как это легко вытекает из построения, — псевдоаносовский с особыми точками инвариантных слоений, получающимися при отождествлении периодических точек на крае $\widetilde{\Pi}$. Сама эта поверхность является для него ленточной поверхностью. Поэтому из леммы 4 вытекает утверждение (iii) теоремы. Кроме того, если, оставив без изменения направления первых m базисных отрезков $\widetilde{\Pi}$, изменить направления остальных на противоположные, получим, что все ленты $\widetilde{\Pi}$ будут приклеены к её базису двусторонне. В силу леммы 2 это означает, что инвариантные слоения для $\widetilde{f}$ ориентируемы. Соотношение между родами поверхностей M и $\widetilde{M}$ легко получается из формулы Эйлера–Пуанкаре, согласно которой сумма индексов особых точек слоения с особенностями равна эйлеровой характеристике поверхности. Утверждение (ii) вытекает непосредственно из построения.

Список литературы

1. A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Orsay seminaire*, Asterisque. V. 66–67, 1979.

2. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстену*, ФАЗИС, М., 1998.

3. Р. В. Плыкин, “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **94**:2 (1974), 243–264.

4. H. Masur, J. Smille, “Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms”, *Comment. Math. Helvetici*, **68** (1993), 289–307.

А. Ю. Жиров. Ориентируемость инвариантных слоений псевдоаносовских ...

5. А. Ю. Жиров, *Топологическая сопряжённость псевдоаносовских гомеоморфизмов*, МЦНМО, М., 2013.

6. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

Поступила 10.04.2017

MSC2010 37E30

Orientability of invariant foliations of pseudo-Anosovian homeomorphisms and branched coverings

© **A. Yu. Zhirov**[2]

Abstract. This paper deals with pseudo-Anosov homeomorphism (possibly generalized) of closed orientable surface; invariant foliations of this mapping are supposed to be non-orientable. A construction is described that helps to build two-sheeted (in general, branched) covering of this surface and pseudo-Anosov homeomorphism of the covering surface that covers the original and has orientable invariant foliations. The covering and the homeomorphism are constructed by means of original mapping. If the original homeomorphism does not have singularities of odd valency then the constructed covering is not branched. Otherwise it has branch points of multiplicity 2 in singularities of odd valency. It is established that in the first case the covering homeomorphism has twice the number of singularities of the same valences as compared with the original. In the second case the number of singularities of even valencies doubles and the features of doubled odd valences are added to them.
Key Words: pseudo-Anosov homeomorphisms, foliations with singularities, branched coverings.

References

1. A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Orsay seminaire*, Asterisque. V. 66–67, 1979.

2. E. Casson, S. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston (London Mathematical Society Student Texts)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

3. R.V. Plykin, "[Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces]", *Matem. sbornik*, **94**:2 (1974), 243–264 (In Russ).

4. H. Masur, J. Smille, "Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms", *Comment. Math. Helvetici*, **68** (1993), 289–307.

5. A.U. Zhirov, *Topologicheskaia soprjazhennost psevdoanosovskikh gomeomorfismov [Topological conjugency of pseudo-Anosov homeomorphismes]*, MCCNE, M., 2013 (In Russ).

6. A.B. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Submitted 10.04.2017

[2] **Alexey Yu. Zhirov**, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4.), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0002-8957-3934, alexei_zhirov@mail.ru