DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115

УДК 517.9

Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных

© **П. А. Шаманаев [1], О. С. Язовцева [2]**

Аннотация. В статье получены достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов. Метод доказательства основан на построении в банаховом пространстве оператора, связывающего решения нелинейной системы и ее линейного приближения, и применении принципа Шаудера о неподвижной точке. Существование построенного оператора доказывается с использованием покомпонентных оценок элементов фундаментальной матрицы линейного приближения. Оператор позволяет построить отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы и ее линейного приближения. Приведены достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевых решений локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауеру. В качестве приложения рассмотрена задача об устойчивости по части переменных множества положений равновесия системы нелинейных уравнений, соответствующей кинетической модели некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана. Поставленная задача сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия нелинейной системы, совпадающей с исследуемой системой. Далее показано, что нелинейная система локально покомпонентно асимптотически эквивалентна по Брауеру её линейному приближению. С учётом того, что нулевое решение линейного приближения асимптотически устойчиво по первым двум компонентам и имеет асимптотическое равновесие по остальным компонентам, делается вывод о том, что каждое положение равновесия исследуемой системы так же обладает этими свойствами.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауэру, принцип Шаудера о неподвижной точке, устойчивость по части переменных, химическая кинетика.

1. Введение

Идея разбиения множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений на классы эквивалентности на основе асимптотического поведения их решений принадлежит А.М. Ляпунову [1]. Если поведение решений рассматривается при $t \to \infty$, эквивалентность носит название асимптотической эквивалентности. Этому направлению посвящены работы [2]-[8]. В работах [2]-[3] для классификации нелинейных систем введены понятия покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых эталонных функций.

[1] **Шаманаев Павел Анатольевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

[2] **Язовцева Ольга Сергеевна**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8075-4491, kurinaos@gmail.com

В настоящей работе продолжено развитие идей Е.В. Воскресенского [2] о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых функций нелинейных систем в некоторой области фазового пространства. Введенные определения позволяют распространить методику на более широкий класс нелинейных систем, чем в работах [2]-[3]. В работе получены достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов.

Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $x \in R^n, f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n), T \geq 0, f(t,0) \equiv 0$.

Будем считать, что у системы вида (1.1) из множества Ξ существует совокупность решений $x(t : t_0, x^{(0)})$, определённых при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Обозначим через $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ решения с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ и $(t_0, y^{(0)})$ соответственно системы дифференциальных уравнений (1.1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y), \tag{1.2}$$

принадлежащей множеству Ξ.

Следующие определения развивают идеи Е.В. Воскресенского из работ [2]-[3].

Определение 1.1. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (1.1) *и* (1.2) *будем называть локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функции* $\mu_i(t)$, *если при фиксированном* $t_0 \geq T$ *существуют два отображения* $P^{(1)} : V \to U$ *и* $P^{(2)} : U \to V$ *такие, что*

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{1.3}$$

$$y_i(t : t_0, x^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{1.4}$$

при $t \to \infty$ *для всех* $i \in M_0 \subseteq N$, $N = \{1, \ldots, n\}$. *Здесь* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $y_i(t : t_0, x^{(0)})$ — i*-ые компоненты решений, для которых* $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, U, $V \subseteq D$ — *некоторые области, содержащие окрестность нуля,* $\mu : [T, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Определение 1.2. *Если в определении 1.1. положить* $M_0 = N$, *то системы* (1.1) *и* (1.2) *будем называть локально асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t)$.

Замечание 1.1. *Определение 1.2. обобщает определение локально асимптотически эквивалентных систем по Брауеру относительно функции* $\mu(t)$ *из работы* [2]. *Для этого достаточно в определении 1.2. положить* $\mu_i(t) \equiv \mu(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 1.3. *Будем говорить, что система* (1.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам* i, $i \in M_0 \subseteq N$, *если каждое ее решение* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq R^n$, *обладает свойством*

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty, \quad i \in M_0, \tag{1.5}$$

и, наоборот, для любых чисел b_i, $i \in M_0$, *таких, что* $b = colon(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, *существует решение* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq D$, *системы* (1.1) *такое, что справедливо равенство* (1.5).

О п р е д е л е н и е 1.4. *Если в определении 1.3. положить* $M_0 = N$ *, то будем говорить, что система* (1.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие.*

В работе [2] приведены достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевых решений асимптотически эквивалентных систем по Брауеру, исходя из свойств правых частей исследуемых систем. Сформулируем достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевых решений локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауеру, исходя из определения (1.1.).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть системы* (1.1) *и* (1.2) *локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауэру относительно функций* $\mu_i(t)$ *, причем отображения* $P^{(1)}$ *и* $P^{(2)}$ *являются непрерывными в нуле и справедливы равенства*

$$x_i(t:t_0,x^{(0)}) = y_i(t:t_0,P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t:t_0,x^{(0)}), \tag{1.6}$$

$$y_i(t:t_0,x^{(0)}) = x_i(t:t_0,P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t:t_0,y^{(0)}), \tag{1.7}$$

$i \in M_0$ *,* $\delta_i(t:t_0,x^{(0)})$ *и* $\gamma_i(t:t_0,y^{(0)})$ *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *, соответственно. Тогда, если у одной системы существует устойчивое (асимптотически устойчивое) нулевое решение по компонентам* $i \in M_0$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_i(t) = d_i, d_i \in R^1$ *(* $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_i(t) = 0$ *), то вторая система имеет так же устойчивое (асимптотически устойчивое) нулевое решение по компонентам* $i \in M_0$ *; кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам* $i \in M_0$ *, то этим же свойством будут обладать решения второй системы.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.1 из работы [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \tag{2.1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица,

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x), \\ \dots, \\ P_n(x) \end{pmatrix},\ P_j(x) = \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} x^p,\ x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n},\ \sigma \geq 2,\ |p| = p_1 + \dots + p_n;$$

и ее линейное приближение

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{2.2}$$

Разобьём множество $N = \{1, \dots, n\}$ на r непересекающихся подмножеств:

$$\begin{aligned} &N_1 = \{1, 2, \dots, l_1\}, \\ &N_2 = \{l_1 + 1, \dots, l_2\}, \\ &\dots, \\ &N_r = \{l_{r-1} + 1, \dots, l_r = n\}. \end{aligned}$$

Пусть собственные значения λ_i $(i = \overline{1, n})$ матрицы A имеют следующие вещественные части:

$$\begin{aligned} &Re\ \lambda_1 = ... = Re\ \lambda_{l_1} = \Lambda_1, \\ &Re\ \lambda_{l_1+1} = ... = Re\ \lambda_{l_2} = \Lambda_2, \\ &\dots \\ &Re\ \lambda_{l_{r-1}+1} = ... = Re\ \lambda_{l_r} = \Lambda_r, \end{aligned}$$

такие что $\Lambda_1 < \Lambda_2 < ... < \Lambda_r$.

Тогда фундаментальную матрицу системы (2.2) можно представить в виде

$$Y(t) = [y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), ..., y^{(n)}(t)],$$

где $y^{(j)}(t)$ – вектор-функции размерности n, представляющие собой линейно независимые решения системы (2.2), такие, что при $j \in N_k, k = \overline{1, r}$, справедливы неравенства [9]

$$||y^{(j)}(t - t_0)|| \leq De^{(\Lambda_k+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \tag{2.3}$$

$$||y^{(j)}(t - t_0)|| \leq De^{(\Lambda_k-\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \leq t_0, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое вещественное число.

Рассмотрим i-ую строку фундаментальной матрицы $Y(t)$. Учитывая (2.3), получим оценку для элементов фундаментальной матрицы

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq De^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.5}$$

где β_i принимает максимальное значение из чисел $\Lambda_1, ..., \Lambda_r$ при оценке элементов $y_{ij}(t)$, по тем индексам j, для которых $y_{ij}(t) \neq 0$.

Учитывая оценку (2.4), аналогично получим

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq De^{(\alpha_i-\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \leq t_0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.6}$$

где α_i принимает минимальное значение из чисел $\Lambda_1, ..., \Lambda_r$ при оценке элементов $y_{ij}(t)$, по тем индексам j, для которых $y_{ij}(t) \neq 0$.

Ставится задача о получении достаточных условий локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем (2.1) и (2.2) по Брауеру.

3. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и устойчивость по части переменных нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов

Не ограничивая общности, будем считать, что множество $M_0 = \{1, ..., q\}$. В случае, если M_0 состоит из произвольнного набора чисел $i_1, i_2, ..., i_q$ из множества N, то можно сделать перенумерацию компонентов x_i вектора x.

Теорема 3.1. *Если выполняются неравенства*

$$p_1\beta_1 + ... + p_n\beta_n < \alpha_i, \quad i \in M_0, \tag{3.1}$$

$$p_1\beta_1 + ... + p_n\beta_n < \beta_i, \quad i \in N \setminus M_0, \tag{3.2}$$

по всем наборам $(p_1, ..., p_n)$ *таким, что* $d_p^{(j)} \neq 0, j = \overline{1, n}$, *то системы* (2.1) *и* (2.2) *являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t) = e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}$, $i \in M_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изложение доказательства будем проводить согласно работам [2]-[3].

Построим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T, +\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \leq ce^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)},\ t \geq t_0,\ \varepsilon > 0,\ c \in R^1_+,\ i = \overline{1,n}\}.$$

В пространстве Ω введем норму

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t \geq t_0} \left\{|\varphi_i(t)| e^{-(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}\right\}. \tag{3.3}$$

Определим на Ω оператор

$$L\varphi = y(t) - \int_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(\varphi(s))ds + \int_{t_0}^t Y_2(t-s)P(\varphi(s))ds, \tag{3.4}$$

где $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$,

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_1(t) = Y(t)I_1 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1(t) \\ O_1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = Y(t)I_2 \equiv \begin{bmatrix} O_2 \\ \tilde{Y}_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

где I_1, I_2 – операторы, обнуляющие элементы матрицы $Y(t)$ с $q+1$-ую по n-ую и с 1-ой по q-ую строки соответственно; $\tilde{Y}_1(t)$ – матрица размерности $q \times n$, $\tilde{y}_1^{ij}(t) \equiv y_{ij}(t)$, $i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,n}$; $\tilde{Y}_2(t)$ – матрица размерности $(n-q) \times n$, $\tilde{y}_2^{ij}(t) \equiv y_{ij}(t)$, $i = \overline{q+1,n}$, $j = \overline{1,n}$; O_1, O_2 – нулевые матрицы размерности $(n-q) \times n$ и $q \times n$ соответственно.

Для компонент решения системы (2.2) справедливы оценки

$$|y_i(t)| \leq \sum_{j=1}^n |y_{ij}(t-t_0)|\ |y_j^{(0)}| \leq De^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}||y^{(0)}||, \quad t \geq t_0,\ i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим шар

$$\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \leq c_0,\ c_0 \in R^1_+\}$$

с достаточно малым c_0 и покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Пусть $||\varphi||_\Omega \leq c_0$. Тогда справедлива следующая оценка для i-х компонент ($i \in M_0$) оператора L

$$\begin{aligned} |(L\varphi)_i| \ \leq\ & e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \Bigg[D||y^{(0)}|| + D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|} \cdot \\ & \cdot \int_t^{+\infty} \exp\left\{(-\alpha_i + \varepsilon + p_1\beta_1 + \ldots + p_n\beta_n)(s-t_0)\right\} ds \Bigg], \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Аналогично для индексов $i \in N \setminus M_0$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} |(L\varphi)_i| \ \leq\ & e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \Bigg[D||y^{(0)}|| + D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|} \cdot \\ & \cdot \int_{t_0}^{t} \exp\left\{(-\beta_i + \varepsilon + p_1\beta_1 + \ldots + p_n\beta_n)(s-t_0)\right\}\ ds \Bigg], \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Учитывая условия (3.1) и (3.2), подберем t_0 такое, что при всех $t \geq t_0$

$$D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|-1} \int\limits_{t}^{+\infty} \exp\left\{\left(-\alpha_i+\varepsilon+p_1\beta_1+...+p_n\beta_n\right)(s-t_0)\right\} ds \leq \theta_1, \tag{3.8}$$

$$D\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|-1} \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left\{\left(-\beta_i+\varepsilon+p_1\beta_1+...+p_n\beta_n\right)(s-t_0)\right\} ds \leq \theta_2. \tag{3.9}$$

Выберем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \leq \frac{1-\theta}{D}c_0, \quad \text{где } \theta=\max\{\theta_1,\theta_2\}. \tag{3.10}$$

Тогда, учитывая (3.6)-(3.9), получим

$$||L\varphi|| \leq c_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \quad \text{при всех} \quad \varphi\in\Omega_0,$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \leq c_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi\in\Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L:\Omega_0\to\Omega_0$.

Покажем, что оператор L является непрерывным на Ω_0. Пусть $\{\varphi_l\}, l=1,2,...$ – последовательность функций из Ω_0, сходящаяся к $\varphi\in\Omega_0$, то есть

$$||\varphi_l-\varphi||_\Omega \to 0 \text{ при } l\to+\infty.$$

Так как векторный полином $P(x)$ является непрерывной вектор-функцией по x, то

$$||Y_k(t-s)P(\varphi_l(s)) - Y_k(t-s)P(\varphi(s))||_\Omega \to 0 \text{ при } l\to+\infty,$$

$k=1,2$ при каждом фиксированном $t\geq t_0$.

Тогда, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [10] к оператору L, получим

$$||(L\varphi)_l - L\varphi||_\Omega \to 0 \text{ при } l\to+\infty.$$

Из оценок (3.6) и (3.7) следует, что множество функций

$$y=L\varphi, \quad \varphi\in\Omega_0, \tag{3.11}$$

равномерно ограничено.

Найдем

$$\frac{d}{dt}L\varphi(t) = Ay+P(\varphi(t)) - A\left[\int\limits_{t}^{+\infty} Y_1(t-s)P(\varphi(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} Y_2(t-s)P(\varphi(s))ds\right].$$

С учётом оценок (3.6) и (3.7) имеем

$$||\frac{d}{dt}L\varphi(t)||_\Omega \leq c_0$$

при всех $||\varphi||_\Omega\leq c_0$. Тогда

$$||L\varphi(t_1) - L\varphi(t_2)||_\Omega \le c_0 ||t_1 - t_2||_\Omega,$$

что доказывает равностепенную непрерывность множества функций (3.11) на любом компакте из $[t_0, +\infty)$.

Следовательно, согласно теореме Арцела [11], множество функций (3.11) является компактным, а оператор L является вполне непрерывным на Ω_0.

Таким образом, все условия принципа Шаудера [11] о существовании неподвижной точки оператора L выполнены

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{3.12}$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

С учётом (3.4) уравнение (3.12) имеет вид

$$x(t) = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(x(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} Y_2(t-s)P(x(s))ds. \tag{3.13}$$

Из построения оператора L следует, что если в уравнении (3.13) в качестве $x(t)$ взять решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (2.1) с начальными данными $x^{(0)} = x(0)$, то $y(t)$ является решением системы (2.2) с начальными данными $y^{(0)} = y(0)$. И наоборот, если $y(t)$ является решением (2.2), то $x(t)$ является решением (2.1).

Из уравнения (3.13) следует, что отображение

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{\infty} Y_1(t_0 - s)P(x(s : t_0, x^{(0)}))ds$$

существует и устанавливает соответствие между начальными точками решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ систем (2.1) и (2.2).

Следовательно, можно взять $U = \{u : u \in R^n, ||u|| \le \varepsilon_1 < c_0\}$, $V = \{v : v \in R^n, ||v|| \le \le \varepsilon_2 < \dfrac{1-\theta}{D}c_0\}$, а в качестве отображения $P^{(2)}$

$$P^{(2)}x^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_t^{+\infty} Y_1(t_0 - s)P(x(s : t_0, x^{(0)}))ds. \tag{3.14}$$

Существование отображения $P^{(1)}$ доказывается аналогично рассуждениям из работы [2].

Запишем уравнение (3.13) по компонентам $i \in M_0$

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s)P_j(x(s : t_0, x^{(0)}))ds. \tag{3.15}$$

С учётом (3.6) из (3.13) получим

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})| \le c_0 e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \le t_0, \tag{3.16}$$

где $i \in M_0$, $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ связаны соотношением $y^{(0)} = P^{(2)}x^{(0)}$.

Тогда из неравенств (3.16) следует справедливость соотношений (1.3) и (1.4) и, следовательно, системы (2.1) и (2.2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций $\mu_i(t) = e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, i \in M_0$.

Доказательство закончено.

С л е д с т в и е 3.1. *Если неравенства* (3.1) *выполняются по всем* $i \in N$, *то системы* (2.1) *и* (2.2) *являются локально асимптотически эквивалентными по Брауеру по всем компонентам относительно функций* $\mu_i(t) = e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть вещественные части собственных значений матрицы* A *удовлетворяют условию*

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < ... < \Lambda_m < \Lambda_{m+1} = \Lambda_r = 0, \quad 1 \le m \le r \ (\Lambda_{r+1} = 0), \tag{3.17}$$

причем, геометрические кратности собственных значений матрицы A *с нулевыми вещественными частями равны 1. Тогда, если справедливы неравенства* (3.1) *и* (3.2) *теоремы 3.1, то нулевое решение системы* (2.1) *асимптотически устойчиво по компонентам* $i = \overline{1,m}$ *и устойчиво по компонентам* $i = \overline{m+1,r}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в пространстве Ω из теоремы 3.1 операторное уравнение

$$x = \xi + Jx, \tag{3.18}$$

где $x = x(t : t_0, x^{(0)})$,

$$\xi = Y(t-t_0)x^{(0)}, \tag{3.19}$$

$$Jx = \int\limits_{t_0}^{t} Y(t-s)P(x(s))ds. \tag{3.20}$$

Это уравнение представляет собой интегральную форму записи решения системы (2.1).

Так как по условию теоремы геометрические кратности собственных значений матрицы A с нулевыми вещественными частями равны 1, то из формул (3.3) определения нормы в пространстве Ω следует, что

$$|x_i(t)| \le ||x||_\Omega e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.21}$$

причем $x(t) \in \Omega_0$, как только $||x||_\Omega \le c_0$.

Учитывая неравенства (3.6)-(3.9), оценим компоненты оператора J

$$|(Jx)_i| \le \theta ||x||_\Omega e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad i = \overline{1,n},$$

откуда

$$||Jx||_\Omega \le \theta ||x||_\Omega. \tag{3.22}$$

Здесь вещественное положительное число θ определяется из условия

$$D \sum_{j=1}^{n} \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} ||x||_\Omega^{|p|-1} \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left\{(-\beta_i + \varepsilon + p_1\beta_1 + ... + p_n\beta_n)(s-t_0)\right\} ds \le \theta < 1.$$

Выбирая $x^{(0)}$ такое, что

$$||x^{(0)}|| \le \frac{1-\theta}{D} c_0, \tag{3.23}$$

оценим ξ, учитывая условия (3.17),

$$||\xi|| \le (1-\theta)c_0. \tag{3.24}$$

Тогда согласно работе [9] уравнение (3.18) имеет единственное решение, причем справедлива оценка

$$||x(t)|| \leq D_1||x^{(0)}||, \quad t \geq t_0, \quad D_1 = \frac{D}{1-\theta}. \tag{3.25}$$

Сопоставляя равенства (1.6) и (3.15), получим

$$\mu_i(t)\delta_i(t:t_0,x^{(0)}) = -\sum_{j=1}^{n}\int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s)P_j(x(s:t_0,x^{(0)}))ds. \tag{3.26}$$

Тогда из оценок (3.16) и (3.25) следует, что $\delta_i(t:t_0,x^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)}$.

Таким образом, из теоремы 1.1 и условия (3.17) следует, что нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по компонентам $i=\overline{1,m}$ и устойчиво по компонентам $i=\overline{m+1,r}$.

Доказательство закончено.

4. Исследование устойчивости по части переменных множества положений равновесия математической модели реакции пиролиза пропана

Рассмотрим кинетическую модель некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана [12]:

$$\begin{array}{rcl} C_3H_8 & \to & C_2H_5\cdot + CH_3\cdot \\ C_2H_5\cdot & \to & C_2H_4 + H_2\cdot \\ C_3H_8 + C_2H_5\cdot & \to & C_2H_6 + n-C_3H_7\cdot \end{array} \tag{4.1}$$

Математическая модель реакции имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{c_1} = -k_1c_1 - k_3c_1c_2 \\ \dot{c_2} = k_1c_1 - k_2c_2 - k_3c_1c_2 \\ \dot{c_3} = k_1c_1 \\ \dot{c_4} = k_2c_2 \\ \dot{c_5} = k_2c_2 \\ \dot{c_6} = k_3c_1c_2 \\ \dot{c_7} = k_3c_1c_2 \end{cases}, \tag{4.2}$$

здесь $t \geq 0$, c_i $(i=\overline{1,7})$ – концентрации веществ и радикалов C_3H_8, $C_2H_5\cdot$, $CH_3\cdot$, C_2H_4, H_2, C_2H_6, $n-C_3H_7\cdot$, соответственно, $k_i > 0$ $(i=\overline{1,3})$ – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации c_i представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при $c_i \geq 0$. Не теряя общности, предположим, что $k_1 > k_2$.

Приравнивая правую часть системы (4.2) к нулю, находим, что положения равновесия образуют множество точек в пространстве R^7 вида

$$c = colon(0,0,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7), \tag{4.3}$$

где $c_i \in R^1_+, i=\overline{3,7}$.

Фиксируя некоторые c_i^*, $i = \overline{3,7}$, исследуем на устойчивость по части переменных некоторое ненулевое положение равновесия $c^* = colon(0, 0, c_3^*, c_4^*, c_5^*, c_6^*, c_7^*)$ [13]-[14], а так же асимптотику решений системы (4.2) в окрестности этого положения равновесия.

В системе (4.2) сделаем замену переменных

$$c = x + c^*. \tag{4.4}$$

Тогда система (4.2) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -k_1x_1 - k_3x_1x_2 \\ \dot{x_2} = k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_1x_2 \\ \dot{x_3} = k_1x_1 \\ \dot{x_4} = k_2x_2 \\ \dot{x_5} = k_2x_2 \\ \dot{x_6} = k_3x_1x_2 \\ \dot{x_7} = k_3x_1x_2 \end{cases}, \tag{4.5}$$

или, в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x),$$

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} -k_3x_1x_2 \\ -k_3x_1x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_3x_1x_2 \\ k_3x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального решения $x \equiv 0$ системы (4.5).

Линейное приближение системы (4.5) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -k_1y_1 \\ \dot{y_2} = k_1y_1 - k_2y_2 \\ \dot{y_3} = k_1y_1 \\ \dot{y_4} = k_2y_2 \\ \dot{y_5} = k_2y_2 \\ \dot{y_6} = 0 \\ \dot{y_7} = 0 \end{cases}. \tag{4.6}$$

Все собственные числа матрицы A являются вещественными числами и имеют геометрические кратности равными 1, причем $\Lambda_1 = -k_1$, $\Lambda_2 = -k_2$, $m = 2$, $\Lambda_k = 0$, $k = \overline{3,7}$. Отсюда следует, что нулевое решение системы (4.6) устойчиво. Заметим, что так как матрица A имеет нулевые собственные значения, то имеет место критический случай согласно работы [15], и, следовательно, теоремы Ляпунова [1] об устойчивости по первому приближению нулевого положения равновесия нелинейной системы (4.5) неприменимы.

Для исследования устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейной системы (4.5) и установления локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру между системами (4.5) и (4.6) по всем переменным проверим справедливость условий теоремы 3.2. В этом случае $M_0 = N \equiv \{1, ..., 7\}$.

Нормированная фундаментальная матрица системы (4.6) имеет вид:

$$Y(t-s) = \begin{pmatrix} e^{-k_1(t-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{k_1-k_2}[e^{-k_1(t-s)} - e^{-k_2(t-s)}] & e^{-k_2(t-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-e^{-k_1(t-s)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\frac{1}{k_1-k_2}[k_2e^{-k_1(t-s)} - k_1e^{-k_2(t-s)}] & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1+\frac{1}{k_1-k_2}[k_2e^{-k_1(t-s)} - k_1e^{-k_2(t-s)}] & 1-e^{-k_2(t-s)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида фундаментальной матрицы следует, что нулевое положение равновесия системы (4.6) асимптотически устойчиво по y_1 и y_2 и имеет асимптотическое равновесие по остальным компонентам.

Оценивая элементы фундаментальной матрицы $Y(t-s)$ по строкам, определим α_i и β_i:

$$\alpha_1 = \beta_1 = -k_1,$$

$$\alpha_2 = -k_1, \beta_2 = -k_2,$$

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \ i = \overline{3,7}.$$

Так как $d_p^{(j)} = 0$ при $j \in \{4,5,6\}$, то условие (3.1) будет иметь вид

$$p_1\beta_1 + p_2\beta_2 < \alpha_i, \quad i = \overline{1,7}. \tag{4.7}$$

Так как $p_1 = p_2 = 1$ для всех наборов $(p_1, ..., p_7)$, для которых $d_p^{(j)} \neq 0$, то условия (4.7), а следовательно, и условия (3.1) теоремы 3.1. выполнены. Таким образом, нулевое решение системы (4.5) асимптотически устойчиво по компонентам $i = \overline{1,2}$ и устойчиво по компонентам $i = \overline{3,7}$.

Учитывая замену переменных (4.4), можно сделать следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (4.2) в окрестности положения равновесия c^*:

- системы (2.1) и (2.2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру;
- каждое положение равновесия c^* системы (4.2) является асимптотически устойчивым по компонентам c_1 и c_2;
- решения системы (4.2), начинающиеся в окрестности положения равновесия c^* имеют асимптотическое равновесие по компонентам c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, причем при $t \to \infty$ эти решения стремятся к нему.

Список литературы

1. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, М., 1950, 471 с.
2. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

3. Е. В. Воскресенский, *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. Ун-та., Саранск, 1990, 224 с.

4. F. Brauer, “Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems”, *Michigan Math.*, **9**:1 (1962), 33–43.

5. N. Levinson, “The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations”, *Amer. J. Math.*, **63**:1 (1946), 1–6.

6. A. Wintner, “Linear variation of constants”, *Amer. J. Math.*, **68**:1 (1946).

7. N. Onuchic, “Relationship among the solutions of two systems of ordinary differential equations”, *Michigan Math. J.*, **10**:1 (1963), 129–139.

8. В. А. Якубович, “Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **28(70)**:1 (1951), 217–240.

9. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966, 576 с.

10. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979, 580 с.

11. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 249 с.

12. Л. Ф. Нурисламова, И. М. Губайдуллин, “Кинетическая модель реакции газофазного пиролиза пропана на основе компактной схемы”, *Информационные и математические технологии в науке и управлении*, **1**:1 (2015), 185–193.

13. В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 253 с.

14. В. В. Воротников, “Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности”, *Автомат. и телемех.*, **3**:1 (1993), 3–62.

15. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 533 с.

Поступила 28.04.2017

MSC2010 34C20

The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables

© **P. A. Shamanaev** [3] **O. S. Yazovtseva** [4]

Abstract. The article states sufficient conditions of local component-wise asymptotic equivalence for nonlinear systems of ordinary differential equations with perturbations in form of vector polynomials. The proof method is based on constructing of operator in Banach space, which connects solutions of nonlinear system and of its linear approximation, and on using the Shauder principle for fixed point. The existance of constructed operator is proved by using component-wise estimates for elements of fundamental matrix of linear approximation. The operator allows to construct mapping which establishes relation between initial points of nonlinear system and initial points of its linear approximation. Sufficient conditions for the stability (asymptotic stability) of zero solutions of locally component-wise asymptotically equivalent systems according to Brauer are presented. As an application of the theory built the nonlinear equations'system is considered which corresponds to the kinetic model of certain stages of compact scheme of propane pyrolysis reaction. The stability of equilibrium state of this system is investigated. The assigned task reduces to investigation of trivial equilibrium of nonlinear system coinciding with explored system. Then it is shown that nonlinear system is locally component-wise equivalent according to Brauer to its linear approximation. Taking in mind that trivial solution of linear approach is asymptotically stable with respect to the first two variables and has asymptotic equilibrium with respect to the other variables the conclusion is drawn that allthe equilibria of explored system have the same properties.

Key Words: nonlinear systems of ordinary differential equations, local component-wise Brauer asymptotic equivalence, the Shauder principle for a fixed point, stability with respect to a part of variables, chemical kinetics.

References

1. A. M. Lyapunov, *Obshchaja zadacha ob ustojchivosti dvizhenija [The general problem of the stability of motion]*, Gostekhizdat, Moscow, 1950 (In Russ.), 471 p.

2. E. V. Voskresenskiy, *Asimptoticheskie metody: teoriya i prilozheniya [Asymptotic methods: theory and applications]*, SVMO Publ., Saransk, 2000 (In Russ.), 300 p.

3. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize [Comparison methods in nonlinear analysys]*, Sarat. Univercity publ., Saransk, 1990 (In Russ.), 224 c.

4. F. Brauer, "Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems", *Michigan Math.*, **9**:1 (1962), 33–43.

5. N. Levinson, "The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations", *Amer. J. Math.*, **63**:1 (1946), 1–6.

[3] **Pavel A. Shamanaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

[4] **Olga S. Yazovtseva**, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8075-4491, kurinaos@gmail.com

6. A. Wintner, “Linear variation of constants”, *Amer. J. Math.*, **68**:1 (1946).
7. N. Onuchic, “Relationship among the solutions of two systems of ordinary differential equations”, *Michigan Math. J.*, **10**:1 (1963), 129–139.
8. V. A. Yakubovich, “[On asymptotic behavior of solutions of system of differential equations]”, *Mathem. sb.*, **28(70)**:1 (1951), 217–240 (In Russ.).
9. B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.
10. F. Riss, B. Sekefal’vi-Nad’, *Lektsii po funktsional’nomu analizu [Lectures on functional analysis]*, Mir Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 580 c.
11. V. A. Trenogin, *Funktsional’nyy analiz [Functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 249 c.
12. L. F. Nurislamova, I. M. Gubaydullin, “[Kinetic model of gas-phase propane pyrolysis reaction based on a compact scheme]”, *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii*, **1**:1 (2015), 185–193 (In Russ.).
13. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *Ustoychivost’ i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh [Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 c.
14. V. V. Vorotnikov, “[Problems and methods of investigation of stability and stabilization with respect to a part of the variables: research directions, results, features]”, *Avtomat. i telemekh.*, **3**:1 (1993), 3–62 (In Russ.).
15. I. G. Malkin, *Theory of stability of motion*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 533 c.

Submitted 28.04.2017