DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.77-87

УДК 517.988

Непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона для m-аккретивных уравнений

© **И. П. Рязанцева**[1]

Аннотация. В банаховом пространстве для нелинейного уравнения при приближенном задании данных (оператора и правой части заданного операторного уравнения) с дифференцируемым по Фреше m-аккретивным оператором построен непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона, получены достаточные условия его сильной сходимости к некоторому решению заданного уравнения, определяемому однозначно. Предварительно доказываются вспомогательные утверждения о непрерывности величин, определяемых через регуляризованные решения и их производные. Приближения оператора предполагаются дифференцируемыми. Доказывается однозначная разрешимость дифференциального уравнения, определяющего изучаемый метод регуляризации, доказывается. При доказательстве сходимости непрерывного метода используется известная сходимость операторного метода регуляризации для аккретивных уравнений. Требования на геометрию банахова пространства, в котором строится непрерывный метод, и его сопряженного выполняются для широкого класса банаховых пространств. При приближенном задании правой части уравнения отдельно изучены случаи невозмущенного и возмущенного оператора. Построены примеры параметрических функций, используемых в уравнении, определяющем изучаемый метод. Указан пример оператора, возникающего в теории скалярной функции плотности, для которого выполнены условия сходимости метода.

Ключевые слова: банахово пространство, m-аккретивный оператор, дуальное отображение, метод Ньютона, непрерывный метод, возмущённые данные, регуляризация, сходимость.

1. Основные предположения, вспомогательные утверждения и постановка задачи

Пусть X – вещественное рефлексивное банахово пространство. Не теряя общности, считаем, что X и сопряжённое ему пространство X^* строго выпуклы.

Пусть $J : X \to X^*$ – дуальное отображение (см. [1] – [3]), т.е.

$$\|Jx\| = \|x\|, \quad \langle Jx, x\rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \tag{1.1}$$

здесь $\langle u, v\rangle$, $u \in X^*$, $v \in X$ есть отношение двойственности между пространствами X и X^*.

В наших условиях $D(J) = X$, $R(J) = X^*$, J – однозначное строго монотонное и коэрцитивное отображение в X (см., например, [3]). Рассмотрим в X уравнение

$$Ax = f, \tag{1.2}$$

[1] **Рязанцева Ирина Прокофьевна**, профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева (603950, Россия, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru

где f – некоторый фиксированный элемент из X, $A : X \to X$ – аккретивный на X оператор, т.е.

$$\langle J(x-y), Ax - Ay\rangle \geq 0 \quad \forall x, \ \ y \in X. \tag{1.3}$$

Предположим, что (1.2) имеет непустое множество решений N, и определим (см. [2], с.143) единственное решение x^* уравнения (1.2), удовлетворяющее неравенству

$$\langle J(x^* - x), x^*\rangle \leq 0 \quad \forall x \in N. \tag{1.4}$$

Далее считаем, что норма в X равномерно дифференцируема по Гато (см. [4]). Кроме того, предположим, что оператор A дифференцируем по Фреше на X, тогда из (1.3) вытекает неравенство (см., например, [1], с.316)

$$\langle Jh, A'(x)h\rangle \geq 0 \quad \forall x, \ h \in X. \tag{1.5}$$

Пусть A – m-аккретивное отображение, т.е. $R(A + \alpha E) = X$ при любом $\alpha > 0$, здесь $E : X \to X$ – единичный оператор.

Отметим, что из (1.5) следует аккретивность линейного оператора $A'(x) : X \to X$ при всех $x \in X$, который также считаем m-аккретивным.

В наших условиях уравнение (1.2) представляет собой некорректную задачу. В данной заметке для уравнения (1.2) будет построен и исследован непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона. В гильбертовом пространстве для монотонного оператора этот метод изучался в [5].

В [2], [4] для решения (1.2) изучался операторный метод регуляризации вида

$$Ax_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) = f, \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{1.6}$$

где $\alpha(t)$ – положительная функция, причём

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0. \tag{1.7}$$

В наших предположениях имеет место утверждение (см.[2, 4]):

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_\alpha(t) - x^*\| = 0, \tag{1.8}$$

где $x^* \in N$ и удовлетворяет (1.4).

Далее считаем, что $\alpha(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ и убывает на $[t_0, +\infty)$.

Пусть данные A и f задачи (1.2) известны приближённо, т.е. вместо A и f известны их приближения $A(t)$ и $f(t)$ соответственно, которые при всех $t \geq t_0 \geq 0$ обладают свойствами:

1). $A(t) : X \to X$ – m-аккретивный дифференцируемый по Фреше оператор, при всех $u \in X$ существует $A'(t)u = (A(t)u)'_t$, т.е. определён оператор $A'(t) : X \to X$, причем элемент $A'(t)u(t)$ непрерывно зависит от t при $t \in [t_0, +\infty)$ для любой фиксированной $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ со значениями в X, и линейный оператор $(A(t)u)'_u : X \to X$ является ограниченным на X при фиксированных $u \in X$ и $t \in [t_0, +\infty)$, производная $(A(t)u(t))'_u$ непрерывна по t на $[t_0, +\infty)$ при любой $u(t) \in C[t_0, +\infty)$, и $(A(t)u)'_u$ непрерывно зависит от $u \in X$ при любом $t \in [t_0, +\infty)$;

$$\|A(t)z - Az\| \leq h(t)g(\|z\|) \quad \forall z \in X, \tag{1.9}$$

$$\|A'(t)z\| \leq h_1(t)q(\|z\|) \quad \forall z \in X, \tag{1.10}$$

причем функции $g(s)$ и $q(s)$ определённые при $s \geq 0$, неотрицательны и переводят всякое ограниченное множество в ограниченное, функции $h(t)$ и $h_1(t)$, входящие в (1.9) и (1.10) соответственно, являются бесконечно малыми при $t \to +\infty$;
2). Функция $f(t) \in X$ и имеет непрерывную производную $f'(t)$,

$$\|f(t) - f\| \leq \delta(t); \tag{1.11}$$

где $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Подобно [5] непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона для уравнения (1.2) определим в форме следующей задачи Коши

$$(A(t)w(t))'_w w'(t) + \alpha(t)w'(t) - f'(t) + \gamma(t)[A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t)] = 0, \tag{1.12}$$

$$w(t_0) = w_0 \in X, \tag{1.13}$$

т.е. регуляризацию проводим по аккретивному оператору $A(t)$ и его производной Фреше $(A(t)x)'_x$.

Докажем вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1.1. *В наших предположениях величина*

$$\xi(t, u(t)) = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1}\, u(t),$$

непрерывна по t *при всех* $t \geq t_0$ *для любой функции* $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ *со значениями в* X *и непрерывна по* u *на* X *при фиксированном* t.

Доказательство. Для фиксированной функции $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ и для t_1, $t_2 \in [t_0, +\infty)$ найдем элементы $\xi_i = \xi(t_i, u(t_i))$, т.е. $(A(t_i) + \alpha(t_i)E)^{-1}u(t_i) = \xi_i$. Значит, $A(t_i)\xi_i + \alpha(t_i)\xi_i = u(t_i)$ при $i = 1, 2$. Отсюда имеем равенство

$$\langle J(\xi_1 - \xi_2), A(t_1)\xi_1 - A(t_2)\xi_2\rangle + \langle J(\xi_1 - \xi_2), \alpha(t_1)\xi_1 - \alpha(t_2)\xi_2\rangle = \langle J(\xi_1 - \xi_2), u(t_1) - u(t_2)\rangle.$$

Отсюда, подобно [5], получаем неравенство

$$\|\xi_1 - \xi_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t_2)}\big(\|A(t_2)\xi_1 - A(t_1)\xi_1\| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|\|\xi_1\| + \|u(t_1) - u(t_2)\|\big). \tag{1.14}$$

Теперь, приняв во внимание непрерывность $A(t)u$ по t при фиксированном u, непрерывность $\alpha(t)$ и $u(t)$ при $t \in [t_0, +\infty)$, имеем непрерывность $\xi(t, u(t))$ по t.

Теперь зафиксируем $t \geq t_0$, и задав u_1 и u_2 из X, определим элементы $\tilde{\xi}_i = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1}u_i$, т.е. $A(t)\tilde{\xi}_i + \alpha(t)\tilde{\xi}_i = u_i$, $i = 1, 2$. Значит, справедливо равенство

$$\langle J(\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2), A(t)\tilde{\xi}_1 - A(t)\tilde{\xi}_2\rangle + \alpha(t)\|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2\|^2 = \langle J(\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2), u_1 - u_2\rangle,$$

отсюда в силу аккретивности оператора $A(t)$ имеем

$$\|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t)}\|u_1 - u_2\|. \tag{1.15}$$

Следовательно, лемма доказана полностью.

Л е м м а 1.2. *Пусть*

$$\chi(t,u(t),w(t)) = \left[(A(t)u(t))'_u + \alpha(t)E\right]^{-1} w(t),$$

где $u(t)$ *и* $w(t)$ *– непрерывные на* $[t_0,+\infty)$ *функции со значениями в* X. *Тогда в наших предположениях* $\chi(t,u(t),w(t))$ *непрерывна по* t *на* $[t_0,+\infty)$ *и непрерывна по* u *при фиксированных* t *и* $w(t)$.

Доказательство. Пусть $u(t),w(t)$ – функции из $C[t_0,+\infty)$, и t_1 и t_2 есть значения из $[t_0,+\infty)$, $\chi_i=\chi(t_i,u(t_i),w(t_i))$, $i=1,2$. Следовательно,

$$\left[(A(t_i)u(t_i))'_u + \alpha(t_i)E\right]^{-1} w(t_i) = \chi_i \quad \text{т.е.} \quad (A(t_i)u(t_i))'_u\chi_i + \alpha(t_i)\chi_i = w(t_i), \ \ i=1,2.$$

Поскольку аккретивный дифференцируемый по Фреше оператор A обладает свойством (1.5), то подобно [5] (см. лемму 2 в [5]) получаем неравенство

$$\|\chi_1-\chi_2\| \le \frac{1}{\alpha(t_2)}\Bigg[\|(A(t_2)u(t_2))'_u - (A(t_1)u(t_1))'_u\|\|\chi_1\| +$$

$$+|\alpha(t_2)-\alpha(t_1)|\|\chi_1\| + \|w(t_1)-w(t_2)\|\Bigg].$$

Тем самым в наших условиях непрерывность $\chi(t,u(t),w(t))$ по t доказана.
Пусть при фиксированных $t\ge t_0$, $w=w(t)$, u_1 и u_2 из X верны равенства

$$\left[(A(t)u_i)'_{u_i} + \alpha(t)E\right]^{-1} w = z_i, \quad \text{или} \quad (A(t)u_i)'_{u_i} z_i + \alpha(t)z_i = w, \ \ i=1,2.$$

Тогда справедливо равенство

$$\left\langle J(z_1-z_2), (A(t)u_1)'_{u_1}z_1 - (A(t)u_1)'_{u_1}z_2\right\rangle + \alpha(t)\|z_1-z_2\|^2 +$$

$$+\left\langle J(z_1-z_2), [(A(t)u_1)'_{u_1} - (A(t)u_2)'_{u_2}]z_2\right\rangle = 0.$$

Отсюда, учитывая свойство (1.5) для оператора $(A(t)u_1)'_{u_1}$, имеем неравенство

$$\|z_1-z_2\| \le \frac{1}{\alpha(t)}\|(A(t)u_1))'_{u_1} - (A(t)u_2)'_{u_2}\| \, \|z_2\|.$$

В силу непрерывности $(A(t)u)'_u$ по u при любом фиксированном $t\ge t_0$ (см. условие (i)) лемма доказана полностью.

Установим условия сходимости решения задачи (1.12), (1.13) при $t\to\infty$ к решению x^* уравнения (1.2).

2. Сходимость метода при точном задании оператора

Пусть оператор A в (1.2) известен, а вместо элемента f известны его приближения $f(t)$, удовлетворяющие условиям (ii). Непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона (1.12), (1.13) в нашем случае примет вид

$$A'(v(t))v'(t) + \alpha(t)v'(t) - f'(t) + \gamma(t)[Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t)] = 0, \tag{2.1}$$

$$v(t_0) = v_0 \in X. \tag{2.2}$$

Перепишем (2.1) в следующем виде

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma(t)u(t) + \alpha'(t)v(t), \tag{2.3}$$

где

$$u(t) = Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t). \tag{2.4}$$

Так как

$$v(t) = (A + \alpha(t)E)^{-1} (u(t) + f(t)), \tag{2.5}$$

то от (2.3) придем к уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma(t)u(t) + \alpha'(t) (A + \alpha(t)E)^{-1} (u(t) + f(t)). \tag{2.6}$$

Установим условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (2.6) при любом начальном условии $u(t_0) = u_0 \in X$. В силу непрерывности функций $\gamma(t),\ \alpha'(t), f(t)$ и леммы 1.1. делаем вывод о непрерывности оператора

$$F(t,u) = -\gamma(t)u + \alpha'(t) (A + \alpha(t)E)^{-1} (u + f(t)). \tag{2.7}$$

по t на $[t_0, +\infty)$ при любом фиксированном элементе u из X.

Далее сделаем дополнительные предположения относительно параметрических функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$: пусть справедливы неравенства

$$\gamma(t) \le \gamma_0 \quad \forall t \ge t_0, \tag{2.8}$$

$$\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} \le \lambda_0 \quad \forall t \ge t_0, \tag{2.9}$$

где γ_0 и λ_0 – некоторые положительные числа.

Тогда, используя оценку (1.15), установим справедливость условия Липшица для оператора $F(t,u)$ по переменной u с постоянной $\gamma_0 + \lambda_0$. Теперь однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения (2.6) в классе функций $C^1[t_0, +\infty)$ следует из [6], с. 399 – 401. Таким образом, однозначно определяется элемент $v(t)$ при всех $t \ge t_0$ по формуле (2.5). Кроме того, в наших предположениях существует непрерывная производная (см. [5] и лемму 1.2.).

$$v'(t) = [A'(v(t)) + \alpha(t)E]^{-1}(u'(t) - \alpha'(t)v(t) + f'(t)). \tag{2.10}$$

Следовательно, установлено существование единственного решения $v(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ задачи Коши (2.1), (2.2).

Пусть существует постоянная $\rho_0 > 0$ такая, что

$$\langle J(Az + \alpha(t)z - f(t)), z\rangle \ge 0 \quad \text{при} \quad \|z\| \ge \rho_0 \quad \forall t \ge t_0. \tag{2.11}$$

Далее из (2.3) имеем

$$\left\langle Ju(t), \frac{du(t)}{dt} \right\rangle + \gamma(t)\|u(t)\|^2 = \alpha'(t)\langle Ju(t), v(t)\rangle. \tag{2.12}$$

Пусть $\|v(t)\| \ge \rho_0$ при некотором $t \in [t_0, +\infty)$, тогда в силу (2.4) и (2.11) справедливо неравенство $\langle Ju(t), v(t)\rangle \ge 0$. Поскольку функция $\alpha(t)$ по условию убывает, то с учётом равенства (см., например, [3], пример 5.7)

$$\langle Ju(t), u'(t)\rangle = \left(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2\right)'_t = \|u(t)\| \frac{d\|u(t)\|}{dt}$$

от (2.12) при выбранном t приходим к неравенству

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|u(t)\| \leq 0. \tag{2.13}$$

Пусть $t \in [t_0, +\infty)$ и $\|v(t)\| < \rho_0$, тогда из (2.12) выводимм неравенство

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|u(t)\| < -\alpha'(t)\rho_0. \tag{2.14}$$

Теперь, приняв во внимание (2.13), заключаем, что (2.14) верно при всех $t \geq t_0$. Следовательно, справедлива оценка (см. [7], с. 264)

$$\|u(t)\| \leq a_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right) - \rho_0 \int_{t_0}^{t} \alpha'(\theta) \exp\left(-\int_{\theta}^{t} \gamma(s)ds\right) d\theta, \tag{2.15}$$

где положительная постоянная a_0 удовлетворяет неравенству $\|Av_0 + \alpha(t)v_0 - f(t)\| \leq a_0$, v_0 – элемент из начального условия (2.2).

Из (1.6) и (2.4) имеем

$$\langle J(v(t) - x_\alpha(t)), Av(t) - Ax_\alpha(t)\rangle + \alpha(t)\langle J(v(t) - x_\alpha(t)), v(t) - x_\alpha(t)\rangle =$$

$$= \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), f(t) - f + u(t)\rangle.$$

Свойство аккретивности оператора A позволяет отсюда вывести неравенство

$$\alpha(t)\|v(t) - x_\alpha(t)\|^2) \leq \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), f(t) - f\rangle + \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), u(t)\rangle.$$

Отсюда в силу предположения (1.11) и определения оператора J (см. (1.1)) получаем оценку

$$\|v(t) - x_\alpha(t)\| \leq \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\|u(t)\|}{\alpha(t)},$$

которая на основании (2.15) принимает вид

$$\|v(t) - x_\alpha(t)\| \leq a_1 \left[\frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right)}{\alpha(t)} - \frac{\int_{t_0}^{t} \alpha'(\theta)\exp\left(-\int_{\theta}^{t} \gamma(s)ds\right) d\theta}{\alpha(t)}\right],$$

где a_1 – положительная постоянная, далее через a_k будем обозначать положительные постоянные.

Теперь, подобно [5], устанавливаем утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть X – рефлексивное строго выпуклое вместе со своим сопряжённым банахово пространство, норма в X равномерно дифференцируема по Гато, $A : X \to X$ – m-аккретивный дифференцируемый по Фреше оператор, причём $A'(u)$ – ограниченный и непрерывна по u на X оператор, уравнение (1.2) имеет непустое множество решений N, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ – положительные функции, причем $\alpha(t) \in C^1[t_0, +\infty)$, $\gamma(t) \in C[t_0, +\infty)$, $\alpha(t)$ убывает, выполнены условия (1.7), (2.8), (2.9) и*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right)}{\alpha(t)} = 0, \tag{2.16}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha'(t)}{\alpha'(t)+\alpha(t)\gamma(t)}=0. \tag{2.17}$$

Предположим, что правая часть f уравнения (1.2) известна приближённо, её приближения $f(t)$ удовлетворяют условиям (ii), причем

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}=0, \tag{2.18}$$

и справедливо неравенство (2.11).

Тогда задача Коши (2.1), (2.2) имеет единственное решение класса $C^1[t_0,+\infty)$, которое при $t\to+\infty$ сильно сходится к элементу $x^*\in N$, определяемому неравенством (1.4).

3. Случай приближённо заданного оператора

Пусть выполнены предположения теоремы 2.1. и условия (i). Тогда непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона имеет вид (1.12), (1.13). Введём новую функцию

$$\tilde{u}(t)=A(t)w(t)+\alpha(t)w(t)-f(t), \tag{3.1}$$

тогда (1.12) даёт равенство

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}+\gamma(t)\tilde{u}(t)=A'(t)w(t)+\alpha'(t)w(t). \tag{3.2}$$

Из (3.1) найдем

$$w(t)=\left(A(t)+\alpha(t)E\right)^{-1}\left(\tilde{u}(t)+f(t)\right) \tag{3.3}$$

и перепишем (3.2) в следующем виде

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}=-\gamma(t)\tilde{u}(t)+\left(A'(t)+\alpha'(t)E\right)\left(A(t)+\alpha(t)E\right)^{-1}\left(\tilde{u}(t)+f(t)\right). \tag{3.4}$$

Пусть справедливо неравенство

$$\|A'(t)u_1-A'(t)u_2\|\le\tilde{L}(t)\|u_1-u_2\|,\quad \tilde{L}(t)>0\quad \forall u_1,\ u_2\in X,\qquad \forall t\ge t_0, \tag{3.5}$$

где функция $\tilde{L}(t)$ обладает свойством

$$\frac{\tilde{L}(t)}{\alpha(t)}\le L_0\quad \forall t\ge t_0,\quad L_0>0. \tag{3.6}$$

Теперь, подобно [5], в наших предположениях устанавливается однозначная разрешимость уравнения (1.12) в классе функций $C^1[t_0,+\infty)$ для любого начального условия (1.13).

На основании леммы 1.1. делаем вывод о непрерывности $w(t)$ на $[t_0,+\infty)$. В то же время

$$w'(t)=[(A(t)w(t))'_w+\alpha(t)E]^{-1}(\tilde{u}'(t)-(A'(t)+\alpha'(t)E)w(t)+f'(t)).$$

Далее, в наших предположениях по лемме 1.2. устанавливаем, что $w'(t)\in C[t_0,+\infty)$, т.е. $w(t)\in C^1[t_0,+\infty)$.

Предположим, что $w(t)$ – ограниченная на $[t_0,+\infty)$ функция, и существует постоянная $\tilde{\rho}>0$ такая, что

$$\langle J(A(t)z+\alpha(t)z-f(t)),z\rangle\geq 0 \quad \text{при} \quad \|z\|\geq\tilde{\rho} \quad \forall t\geq t_0. \tag{3.7}$$

Из (3.2) получаем равенство

$$\left\langle J\tilde{u}(t),\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}\right\rangle+\gamma(t)\|\tilde{u}(t)\|^2=\langle J\tilde{u}(t),A'(t)w(t)\rangle+\alpha'(t)\langle J\tilde{u}(t),w(t)\rangle.$$

Отсюда теми же рассуждениями, что и при выводе (2.14), приходим к неравенству

$$\frac{d\|\tilde{u}(t)\|}{dt}+\gamma(t)\|\tilde{u}(t)\|\leq\|A'(t)w(t)\|-\alpha'(t)\tilde{\rho}_0.$$

Теперь предполагаемая ограниченность $w(t)$ на $[t_0,+\infty)$ и неравенство (1.10) позволяют от последнего неравенства перейти к следующему

$$\frac{d\|\tilde{u}(t)\|}{dt}+\gamma(t)\|\tilde{u}(t)\|\leq a_2[h_1(t)-\alpha'(t)].$$

Вновь применив лемму из [7], имеем оценку

$$\|\tilde{u}(t)\|\leq a_3\left[\exp\left(-\int_{t_0}^t\gamma(s)ds\right)+\int_{t_0}^t[h_1(\theta)-\alpha'(\theta)]\exp\left(-\int_\theta^t\gamma(s)ds\right)d\theta\right]. \tag{3.8}$$

Далее, вычитая из (3.1) равенство (1.6) и находя значения функционала $J(w(t)-x_\alpha(t))$ на элементах правой и левой частей полученного равенства, имеем

$$\langle J(w(t)-x_\alpha(t)),A(t)w(t)-A(t)x_\alpha(t)\rangle+\alpha(t)\|w(t)-x_\alpha(t)\|^2=$$

$$=\langle J(w(t)-x_\alpha(t)),Ax_\alpha(t)-A(t)x_\alpha(t)\rangle+\langle J(w(t)-x_\alpha(t)),f(t)-f+\tilde{u}(t)\rangle.$$

Аккретивность оператора $A(t)$, ограниченность $\|x_\alpha(t)\|$ на $[t_0,+\infty)$ (см. (1.8)), предположения (1.9), (1.11) позволяют из последнего равенства вывести оценку

$$\|w(t)-x_\alpha(t)\|\leq a_4\frac{\delta(t)+h(t)}{\alpha(t)}+\frac{\|\tilde{u}(t)\|}{\alpha(t)} \quad \forall t\geq t_0.$$

Применив правило Лопиталя в правой части (3.8), заключаем, что при выполнении условий

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{h(t)}{\alpha(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{h_1(t)}{\alpha'(t)+\alpha(t)\gamma(t)}=0, \tag{3.9}$$

и (2.16) – (2.18) из последнего неравенства вытекает сходимость $\|w(t)-x_\alpha(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$.

Сформулируем полученное утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть в условиях теоремы 2.1. оператор A возмущен, и выполнены условия (i), (3.5), (3.6), и вместо (2.11) выполнено неравенство (3.7). Тогда задача Коши (1.12), (1.13) имеет единственное решение $w(t)\in C^1[t_0,+\infty)$. Предположим, что это решение ограничено на $[t_0,+\infty)$, и справедливы условия (3.9), тогда $w(t)$ при $t\to+\infty$ сходится по норме пространства X к решению x^* уравнения (1.2), определяемому неравенством (1.4).*

З а м е ч а н и е 3.1. *Примеры параметрических функций, удовлетворяющих условиям теорем 2.1. и 3.1., приведены в [5].*

З а м е ч а н и е 3.2. *Условие (3.7) есть одно из известных достаточных условий разрешимости уравнения (см., например, [1])*

$$J(A(t)x+\alpha(t)x-f(t))=0, \quad t\geq t_0. \tag{3.10}$$

Поскольку в наших условиях на пространства X и X^* равенство $Jz=0$ возможно тогда и только тогда, когда $z=0$, то из (3.10) получаем, что $A(t)x+\alpha(t)x=f(t)$. Так как операторы $A(t)$ по условию являются m-аккретивными, то (3.7) не противоречит ранее принятым предположениям. Аналогично устанавливается, что (2.11) есть одно из достаточных условий разрешимости операторного уравнения $Ax+\alpha(t)x=f(t)$.

З а м е ч а н и е 3.3. *Подобно [5] выводится ограниченность $w(t)$ на $[t_0,+\infty)$ из неравенства*

$$\langle Jw(t),((A(t)w(t))'_w+\alpha(t)E)^{-1}(\gamma(t)[A(t)w(t)+\alpha(t)w(t)-f(t)]+f'(t))\rangle\geq 0$$

при $\|w(t)\|\geq R_0>0$.

З а м е ч а н и е 3.4. *В отличие от [5] (см. теорему 2) в теореме 3.1. отсутствует требование ограниченности функции $g(s)/s$ при $s\to\infty$. В [5] выполнение в H неравенств вида (2.11) и (3.7) (при $J=E$) не предполагалось. Они выводились на основании (1.9) и (1.11) из неравенства $(Ax-f,x)\geq 0$ при $\|x\|\geq\rho>0, x\in H$. Для оператора A в банаховом пространстве X указанное неравенство принимает вид $\langle J(Ax-f),x\rangle\geq 0$ при $\|x\|\geq\rho>0, x\in X$. Чтобы вывести отсюда неравенства (2.11) и (3.7) необходимы равномерная монотонность J на X и выполнение неравенства Гёльдера для J на X. Примеры банаховых пространств с такими свойствами оператора J неизвестны (см., например, [2], [3]). Отметим, что непосредственная проверка указанных неравенств в H и X может быть невозможна, так как A и f в общем случае неизвестны.*

З а м е ч а н и е 3.5. *В [5] показано как настроить метод (1.12), (1.13) для случая, когда известны единственные приближения A^h и f^δ оператора A и элемента f соответственно.*

П р и м е р 3.1. *Рассмотрим оператор $A: L^p[a,b]\to L^p[a,b]$ $(p>1)$ следующего вида*

$$Az(x)=\begin{cases} z(x)/[b_1+b_2z(x)], & z(x)\geq 0,\\ 0, \quad z(x)<0,\end{cases}$$

где b_1 и b_2 – положительные постоянные. Покажем аккретивность A.

Поскольку в $L^p[a,b]$ оператор $J: L^p[a,b]\to L^q[a,b]$ имеет вид

$$Jz(x)=\|z\|^{2-p}|z(x)|^{p-2}z(x) \quad \forall z(x)\in L^p[a,b], \quad z(x)\not\equiv 0$$

и $J(0)=0$, то при $z_1(x)>0$ и $z_2(x)>0$ получаем

$$\langle J(z_1(x)-z_2(x)),Az_1(x)-Az_2(x)\rangle=$$

$$=\|z_1-z_2\|^{2-p}\int_a^b|z_1(x)-z_2(x)|^{p-2}[z_1(x)-z_2(x)]\left[\frac{z_1(x)}{b_1+b_2z_1(x)}-\frac{z_2(x)}{b_1+b_2z_2(x)}\right]dx=$$

$$= b_1\|z_1 - z_2\|^{2-p} \int_a^b \frac{|z_1(x) - z_2(x)|^p}{[b_1 + b_2 z_1(x)][b_1 + b_2 z_2(x)]} dx \geq 0.$$

Пусть возмущённый оператор $A(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ определяется следующим образом

$$A(t)z(x) = \begin{cases} z(x)/[b_1(t) + b_2(t)z(x)], & z(x) \geq 0, \\ 0, \quad z(x) < 0, \end{cases}$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – положительные функции из $C^1[t_0, +\infty)$, причем

$$b_i(t) \geq a_i > 0, \quad |b_i - b_i(t)| \leq h(t), \quad i = 1, 2, \quad t \geq t_0, \quad h(t) \to 0 \ \text{при} \ t \to +\infty.$$

Аккретивность операторов $A(t) : L^p[a, b] \to L^p[a, b]$ проверяется теми же рассуждениями, что и для оператора A. Справедливость неравенств (1.9), (1.10) устанавливается подобно [5].

Как следует из доказательств теорем 1 и 2, выполнение неравенств (2.11) и (3.7) требуется только на решениях задач (2.1), (2.2) и (1.12), (1.13) соответственно. Значит, справедливость (2.11) и (3.7) можно установить численно.

Список литературы

1. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, Москва, 1972, 416 с.

2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006, 410 с.

3. И. П. Рязанцева, *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008, 272 с.

4. Бьонг Нгуен, Тхи Хонг Фыонг Нгуен, “Методы регуляризации для нелинейных некорректных уравнений, содержащих m-аккретивные отображения в банаховых пространствах”, *Известия вузов. Математика*, 2013, № 2, 67–74.

5. И. П. Рязанцева, “Регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве”, *Известия вузов. Математика*, 2016, № 11, 53–67.

6. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980, 495 с.

7. Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1981, 400 с.

Представлено 20.02.2017

MSC2010 65J15

Continuous regularization analog of Newton method for m-accretive equations

© **I. P. Ryazantseva**[2]

Abstract. Paper studies nonlinear equations with approximate data (i.e. the operator and the right-hand side of an operator equation) with the Frechet-differentiable m-accretive operator in Banach space. For such equation a regularized continuous analog of Newton's method is constructed; sufficient conditions for method's strong convergence to a certain uniquely determined solution of the given equation are obtained. Previously we prove auxiliary assertions of continuity of values that are determined in terms of regularized solutions and their derivatives. The approximations of the operator are assumed to be differentiable. One-valued solvability of the differential equation defining the investigated regularization method is proved. In the proof of the continuous method convergence known convergence of operator regularization method for accretive equations is used. Requirements on the geometry of Banach space and its conjugate are performed for a wide class of Banach spaces. For approximate right-hand side definition of the equation the cases of the unperturbed and of the perturbed operator are studied separately. Examples are built for parametric functions that are used in the equation that defines the method studied. The example is specified of an operator arising in the theory of a scalar density function, for which the conditions of convergence of the method are performed.

Key Words: Banach space, m-accretive operator, duality mapping, Newton's method, continuous method, perturbed data, regularization, convergence.

References

1. M. M. Vainberg, *Variational method and the monotone operator method in the theory of nonlinear equations [The variational method and the method of monotone operators in the theory of nonlinear equations]*, Nauka, Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 416 p.

2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Publ., Dordrecht, 2006 (In Netherlands), 410 p.

3. I. P. Ryazantseva, *Izbrannye glavy teorii operatorov monotonnogo tipa [Electly chapters of theory monotone type operators]*, NGTU, Publ., Nizhny Novgorod, 2008 (In Russ.), 272 p.

4. Nguyen Buong and Nguyen Thi Hong Phuong, “[Regularization methods for nonlinear ill-posed equations involving m-accretive mappings in Banach spaces]”, *Izv. vuzov. Matematika*, **2** (2013), 67-74 (In Russ.).

5. I. P. Ryazantseva, “[Regularized continuous analog of Newton's method for monotone equations in Hilbert space]”, *Izv. vuzov. Matematika*, **11** (2016), 53-67 (In Russ.).

6. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyy analiz [Functional analysis]*, Nauka, Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 495 p.

7. F. P. Vasil'ev, *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach [Methods for solving of extremal problems]*, Nauka, Publ., Moscow, 1981 (In Russ.), 400 p.

Submitted 20.02.2017

[2] **Irina P. Ryazantseva**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Tehnical University after R.E. Alekseev (24 Minina Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6215-1662, lryazantseva@applmath.ru