

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.130-139

УДК 517.958:531.12; 534.11

Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении© В. Н. Анисимов ¹, В. Л. Литвинов ²

Аннотация. В статье исследуются колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. В случае отсутствия сопротивления среды для решения задачи использовано дискретное интегральное преобразование Фурье. В результате в виде ряда получено уравнение, позволяющее найти точные значения собственных частот. При наличии сопротивления среды задача решалась методом Канторовича-Галеркина. Полученное уравнение позволяет найти приближённые значения двух первых собственных частот. Сравнением точных и приближённых частот оценена точность решения, полученного методом Канторовича-Галеркина. В статье проанализировано, как влияет скорость продольного движения каната на форму собственных колебаний. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

1. Введение

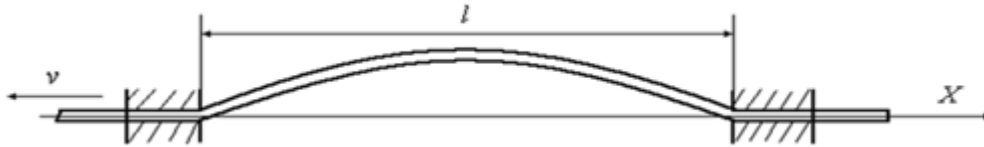
В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [1, 2, 3], гибкие звенья передач [4, 5, 6], балки [7], лентопротяжные механизмы [8], конвейеры [9, 10] и т.д. Наличие движущихся границ делает неприменимыми к решению таких краевых задач классические методы математической физики, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

¹ **Анисимов Валерий Николаевич**, заведующий кафедрой Общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д.45.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, anisimov170159@mail.ru

² **Литвинов Владислав Львович**, заместитель заведующего кафедрой Общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д.45.), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, vladlitvinov@rambler.ru

2. Постановка задачи

Схема объекта изучения изображена на рисунке 2.1.



Р и с у н о к 2.1
Схема объекта

Уравнение, учитывающее изгибную жёсткость, натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид [11]:

$$u_{tt}(x, t) + bu_{xxxx}(x, t) - a^2u_{xx}(x, t) + Gu_t(x, t) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $u(x, t)$ – поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t ; $b = \frac{EI}{\rho}$ (E – модуль упругости материала каната; I – осевой момент инерции сечения каната, ρ – масса единицы длины каната); $a^2 = \frac{T}{\rho}$ (T – натяжение каната); G – коэффициент сопротивления среды (сила, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения). Граничные условия имеют вид:

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0; u_x(vt, t) = 0; u_x(vt + l, t) = 0, \quad (2.2)$$

где v – скорость продольного движения каната, l – длина колеблющейся части. Введем безразмерные переменные:

$$u(x, t) = U(\xi, \tau); \xi = \frac{2\pi(x - vt)}{l}; \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}{l}t.$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta U_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (2.3)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0; U_{\xi}(0, \tau) = 0; U_{\xi}(2\pi, \tau) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь

$$\beta = \frac{4\pi^2 b}{l^2(a^2 - v^2)}; \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}; \gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2 - v^2}}; \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2 - v^2)}.$$

Четыре коэффициента уравнения (2.1) могут быть выражены через три безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a}; \theta = \frac{4\pi^2 b}{l^2 a^2}; D = \frac{Gl}{2\pi\alpha}.$$

Параметры характеризуют: α – скорость продольного движения каната; θ – изгибную жёсткость; D – сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (2.3) выражаются следующим образом:

$$\beta = \frac{\theta}{1 - \alpha^2}; \gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \lambda = \frac{D}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \eta = \frac{\alpha D}{1 - \alpha^2}.$$

3. Решение задачи

Решим задачу (2.3), (2.4) без учёта изгибной жёсткости ($\beta = 0$). Решение будем искать в виде [12]:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}.$$

Для вычисления функции $\mu(\xi)$ получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (3.1)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \quad (3.2)$$

Решение задачи (3.1-3.2) не представляет затруднений. В результате решения получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i\frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}, \quad (3.3)$$

Здесь i – мнимая единица; n – порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (3.3) характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту. При отсутствии затухания ($\lambda = \eta = 0$) выражение (3.3) примет вид:

$$\omega_n = i\frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (3.4)$$

При этом собственные функции определяются выражением:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1-\alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1+\alpha)n\xi}{2}\right).$$

Как изменяются собственные функции $\mu(\xi)$ в зависимости от параметра α показано на рис. 3.1.

Анализ рисунка 3.1 показывает, что чем больше скорость движения каната, тем больше искажаются собственные функции. Искажение происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

Решим задачу с учётом изгибной жёсткости, но без учета затухания ($\lambda = \eta = 0$). Решение будем искать в виде [12]

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{i\omega\tau}.$$

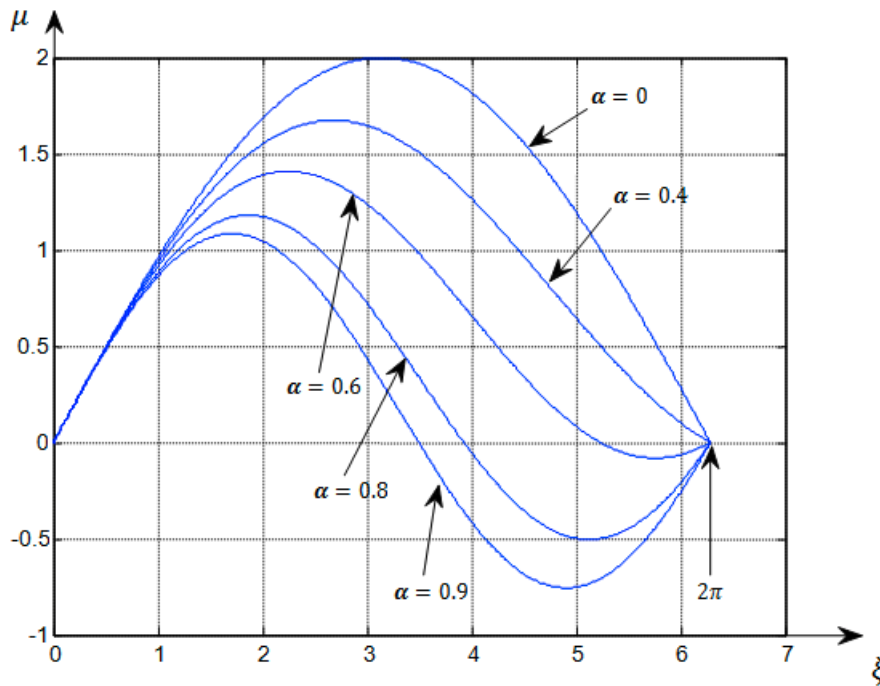
Для определения $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$\beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - i\gamma\omega\mu'(\xi) - \omega^2\mu(\xi) = 0; \quad (3.5)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (3.6)$$

Для решения используем дискретное интегральное преобразование Фурье [13]:

$$F(p) = \int_0^{2\pi} \mu(\xi)e^{ip\xi}d\xi; p = 0, \pm 1, \pm 2...$$



Р и с у н о к 3.1

Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

В результате применения преобразования получим:

$$F(p) = \frac{ip\beta\mu_2 - \beta\mu_3}{\beta p^4 + p^2 - \beta\omega p - \omega^2},$$

где $\mu_2 = \mu''(2\pi) - \mu''(0)$; $\mu_3 = \mu'''(2\pi) - \mu'''(0)$.

Обратное интегральное преобразование имеет вид:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p)e^{-ip\xi}.$$

Объединяя в данном равенстве члены при p и $-p$, получим:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\beta\mu_3}{\omega^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{ip\beta\mu_2 B_p - \beta\mu_3 A_p}{A_p^2 - B_p^2} \cos(p\xi) \right) + \frac{i}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-ip\beta\mu_2 A_p + \beta\mu_3 B_p}{A_p^2 - B_p^2} \sin(p\xi). \tag{3.7}$$

Здесь $A_p = \beta p^4 + p^2 - \omega^2$; $B_p = \gamma\omega p$.

При применении интегрального преобразования было учтено, что

$$\mu(2\pi) - \mu(0) = 0; \mu'(2\pi) - \mu'(0) = 0;$$

Поэтому, чтобы выполнялись граничные условия (3.6), две произвольные постоянные μ_2 и μ_3 должны быть получены из условий: $\mu(0) = 0$ и $\mu'(0) = 0$. Подставляя в данные условия $\mu(\xi)$, определяемое выражением (3.7), получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно μ_2 и μ_3 . Из равенства нулю её определителя получается уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{\beta}{\omega^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p}{A_p^2 - B_p^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta p^2 A_p}{A_p^2 - B_p^2} + 2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta p B_p}{A_p^2 - B_p^2} \right)^2 = 0. \quad (3.8)$$

Решим задачу (2.3), (2.4) методом Канторовича-Галеркина [14, 15]. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}.$$

Для определения $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = \beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) + (\omega^2 + \omega\lambda)(\xi) = 0; \quad (3.9)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (3.10)$$

Функцию $\mu(\xi)$ возьмём в виде:

$$\mu(\xi) = C_1\mu_1(\xi) + C_2\mu_2(\xi),$$

где $\mu_1(\xi) = \xi^2(\xi - 2\pi)^2$; $\mu_2(\xi) = \xi^2(\xi - 2\pi)^2(\xi - \pi)$. Данные функции удовлетворяют граничным условиям (3.10) и являются ортогональными на интервале $(0, 2\pi)$.

Согласно методу Канторовича-Галеркина [14, 15], произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)]\mu_1(\xi)d\xi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)]\mu_2(\xi)d\xi = 0.$$

Дифференциальный оператор $L[\mu(\xi)]$ определяется выражением (3.9).

Произведя интегрирование и приравняв определитель системы к нулю, получим уравнение собственных частот:

$$\begin{aligned} &\omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(2.86457\beta + \lambda^2 + 0.27795\gamma^2 + 1.41853) + \\ &+ \omega(2.86457\lambda\beta + 1.41852\lambda + 0.55591\gamma\eta) + \\ &+ (0.82177\beta^2 + 0.77244\beta + 0.27795\eta^2 + 0.69921) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Данное уравнение позволяет получить две первые собственные частоты поперечных колебаний каната.

Уравнение (3.8) было решено численно при различных значениях параметров α и θ . Результаты вычислений приведены в таблице 1. При $\theta = 0$ ряды, входящие в уравнение (3.8) расходятся, поэтому значения частот были вычислены по формуле (3.4).

Уравнение (3.11) решалось в среде MATLAB. Для оценки точности метода Канторовича-Галеркина уравнение (3.11) было решено для случая отсутствия затухания ($\lambda = \eta = 0$). Результаты вычислений приведены в таблице 1. При каждом значении α приведены следующие частоты: точное значение первой собственной частоты, точное значение второй собственной частоты, приближённое значение первой собственной частоты, приближённое значение второй собственной частоты. При отсутствии изгибной жёсткости

Таблица 1: Зависимость частоты от скорости продольного движения каната и изгибной жесткости

$\alpha \backslash \theta$	0	1	2	3	4	5	примечания
0	0.500	0.792	0.975	1.129	1.263	1.385	ω_1 (точн.)
	1.000	1.898	2.450	2.914	3.307	3.658	ω_2 (точн.)
		0.792	0.940	1.086	1.220	1.342	ω_1 (прибл.)
0.2	0.490	0.795	0.985	1.143	1.281	1.406	ω_1 (точн.)
	0.980	1.924	2.501	2.967	3.369	3.728	ω_2 (точн.)
		0.792	0.948	1.100	1.239	1.364	ω_1 (прибл.)
0.4	0.458	0.806	1.019	1.193	1.344	1.479	ω_1 (точн.)
	0.917	2.015	2.644	3.148	3.581	3.966	ω_2 (точн.)
		0.795	0.980	1.150	1.302	1.439	ω_1 (прибл.)
0.6	0.400	0.841	1.101	1.311	1.490	1.650	ω_1 (точн.)
	0.800	2.227	2.973	3.561	4.063	4.510	ω_2 (точн.)
		0.818	1.063	1.271	1.452	1.615	ω_1 (прибл.)
0.8	0.300	0.966	1.346	1.643	1.894	2.117	ω_1 (точн.)
	0.600	2.817	4.221	4.662	5.343	5.946	ω_2 (точн.)
		0.936	1.314	1.613	1.868	2.093	ω_1 (прибл.)
0.9	0.218	1.200	1.750	2.174	2.530	2.842	ω_1 (точн.)
	0.436	3.748	5.220	6.344	7.293	8.130	ω_2 (точн.)
		1.178	1.732	2.159	2.518	2.833	ω_1 (прибл.)
0.99	0.071	3.300	5.089	6.445	7.576	8.565	ω_1 (точн.)
	0.141	11.180	15.847	19.376	22.338	24.946	ω_2 (точн.)
		3.346	5.136	6.445	7.624	8.614	ω_1 (прибл.)
		13.745	17.824	21.116	23.955	26.490	ω_2 (прибл.)

($\theta = 0$) частоты, полученные методом Канторовича-Галеркина, имеют большую погрешность, поэтому в таблице они не приведены. В этом случае они могут быть вычислены по формуле (3.3).

В таблице жирным шрифтом выделены приближённые частоты имеющие погрешность более 5%. Анализ табличных данных показывает, что погрешность частот, полученных методом Канторовича-Галеркина, увеличивается с увеличением α и уменьшается с увеличением θ .

Уравнение (3.8) позволяет получить любую собственную частоту. Например, при $\alpha = 0.4$ и $\theta = 2$ получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 1.019; \omega_2 = 2.644; \omega_3 = 4.995; \omega_4 = 8.103; \omega_5 = 11.972; \omega_6 = 16.620.$$

Уравнение (3.11) позволяет учесть затухание ($D \neq 0$). Например, для параметров $\alpha = 0.8$; $\theta = 2$; $D = 0.1$ получены следующие частоты:

$$\omega_1 = -0.0859 + 1.312i; \omega_2 = -0.0807 + 4.192i.$$

Действительная часть частот характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

Если ω_n безразмерная частота (задача (2.3), (2.4)), то частота исходной задачи (2.1), (2.2) находится по формуле:

$$W_n = \frac{\pi(\alpha^2 - \nu^2)\beta\omega_n}{l\nu}.$$

4. Заключение

В статье произведен анализ колебаний каната движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Решение произведено точным и приближённым методами, что позволяет оценить применимость метода Канторовича-Галеркина для описания колебаний систем с движущимися границами. Полученные количественные результаты могут быть использованы для расчёта широкого круга технических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Горошко, Г. Н. Савин, *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*, Наукова думка, Киев, 1971, 270 с.
2. W. D. Zhu, Y. Zheng, “Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control”, *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **1** (2006), 66–78.
3. В. Н. Анисимов, “Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъёмной установки”, *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, **18:4** (2016), 128-133.
4. Ю. П. Самарин, В. Н. Анисимов, “Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне уравнений”, *Изв. вузов. Машиностроение.*, 1986, № 12, 17–21.
5. А. И. Весницкий, *Волны в системах с движущимися границами*, Физматлит, М., 2001, 320 с.
6. В. С. Тихонов, А. А. Абрамов, “Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке”, *Вестник МГУ. Сер. 1*, 1993, № 5, 45-48.
7. А. А. Лежнева, “Изгибные колебания балки переменной длины”, *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*, 1970, № 1, 159–161.
8. К. И. Рагульский, “Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов”, *Динамика машин*, Наука, М., 1971, 169–177.
9. В. И. Ерофеев, Д. А. Колесов, Е. Е. Лисенкова, “Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой”, *Вестник научно-технического развития*, 2013, № 6 (70), 18–29.
10. Х. С. Хосаев, “Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера”, *Тр. Сев.-Кавк. гос. технол. ун-та*, 2001, № 8, 234–239.

11. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **19**:2 (2015), 382-397.
12. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография*, Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 с.
13. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, И. В. Корпен, “Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*, 2012, № 3(28), 145–151.
14. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*, 2009, № 1(18), 149–158.
15. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **17** (2010), 3484–3494.

Поступила 20.04.2017

MSC2010 35R37; 35G30, 35Q70

Calculation of eigen frequencies of a rope moving in longitudinal direction

© V. N. Anisimov³, V. L. Litvinov⁴

Abstract. The article studies the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope, flexural stiffness and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigenfrequencies. In the absence of medium resistance a discrete integral Fourier transform is used to solve the problem. As a result, an equation is obtained in the form of series, that makes it possible to find the exact values of the eigenfrequencies. In the presence of medium resistance the problem was solved by the Kantorovich-Galerkin method. The equation obtained allows us to find approximate values of the first two eigenfrequencies. A comparison of the exact and approximate frequencies estimates the accuracy of the solution obtained by the Kantorovich-Galerkin method. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables. It allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

Key Words: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, resonant properties.

REFERENCES

1. O. A. Goroshko, G. N. Savin, *Vvedenie v mekhaniku deformiruemykh odnomernykh tel peremennoy dliny [Introduction in mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length]*, Naukova Dumka, Kiev, 1971 (In Russian), 270 p.
2. W. D. Zhu, Y. Zheng, “Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control”, *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **1** (2006), 66–78.
3. V. N. Anisimov, “[Longitudinal resonance oscillations of a viscoelastic rope of a load-lifting installation]”, *Izvestiya Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences*, **18:4** (2016), 128-133 (In Russian).
4. Yu. P. Samarin, V. N. Anisimov, “[Forced transverse vibrations of the flexible link at dispersal]”, *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, **12** (1986), 17–21 (In Russian).
5. A. I. Vesnitskii, *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami [Waves in systems with moving boundaries and loads]*, Fizmatlit, Moscow, 2001 (In Russian), 320 p.
6. V. S. Tikhonov, A. A. Abramov, “[Transverse Vibrations of a Flexible String with Time-Varying Length in Flow]”, *Vest. Mosk. Univ. Ser. 1. Matematika*, **5** (1993), 45-48 (In Russian).
7. A. A. Lezhnyva, “[Bending vibration of beam of variable length]”, *Izv. Acad. Nauk USSR. Mechanic of solidstate*, **1** (1970), 159–161 (In Russian).

³ **Anisimov Valeriy N.**, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran’ Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran’, Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, anisimov170159@mail.ru

⁴ **Litvinov Vladislav L.**, Deputy Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran’ Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran’, Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Technical), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, vladlitvinov@rambler.ru

8. K. I. Ragulsky, “[Questions of the Dynamics of Precision Tape-Driving Mechanisms]”, *The Dynamics of Machines*, Nauka, Moscow, 1971, 169–177 (In Russian).
9. V. I. Erofeev, D. A. Kolesov, E. E. Lisenkova, “[Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load]”, *Bulletin of Scientific and Technical Development*, **6 (70)** (2013), 18–29 (In Russian).
10. Kh. S. Khosaev, “[Mathematical description of the dynamic characteristics of the rope belt of a belt conveyor]”, *Tr. North-Caucasus. State. Technol. University*, **8** (2001), 234–239 (In Russian).
11. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “[Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders]”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **19:2** (2015), 382–397 (In Russian).
12. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, *Resonance properties of mechanical objects with moving boundaries: monograph*, Samar. State. Tech. University, Samar, 2009 (In Russian), 131 c.
13. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, I. V. Korpen, “[On a method of analytical solution of wave equation describing the oscillation system with moving boundaries]”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **3(28)** (2012), 145–151 (In Russian).
14. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “[Investigation of resonance characteristics of mechanical objects with moving borders by application of the Kantorovich-Galerkin method]”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mt. Nauki*, **1(18)** (2009), 149–158 (In Russian).
15. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **17** (2010), 3484–3494.

Submitted 20.04.2017