DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.51-59

УДК 517.928.4

Стабилизация сингулярно возмущенных систем с полиномиальной правой частью

© **М. В. Козлов** [1]

Аннотация. В статье рассматривается задача стабилизации сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с однородной правой частью в виде полиномов нечетной степени при достаточно малых значениях возмущающего параметра. Получены достаточные условия стабилизации нулевого решения указанных систем до асимптотической устойчивости управлением обратной связью в виде полиномов той же степени, что и правая часть исходной системы. Предполагается, что измерению подлежат только компоненты вектора медленных переменных и управление может входить только в медленную подсистему. Для различных случаев описаны способы построения стабилизирующих управлений. В качестве метода исследования применяется декомпозиция сингулярно возмущенной системы на быструю и медленную подсистемы меньшей размерности. Для анализа устойчивости применяется метод функций Ляпунова.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, малый параметр, стабилизация, однородная форма.

1. Введение

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения широко применяются при математическом моделировании аэрокосмических, механических, биологических и других видов систем (см. обзор [1]). Одним из наиболее важных направлений в исследовании сингулярно возмущенных систем является задача об устойчивости по Ляпунову и, как следствие, задача управления и стабилизации. Данной тематике посвящено немало работ (см. [1]—[6]). Данная статья посвящена стабилизации нулевого решения сингулярно возмущенных систем с однородной правой частью в виде полиномов нечетной степени.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_{11}x^{[\mu]} + A_{12}y^{\{\mu\}}, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x^{[\mu]} + A_{22}y^{\{\mu\}}, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in R^m$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\mu > 0$ — нечетное число; $x^{[\mu]} \in R^N$ — вектор-столбец, составленный из всевозможных мономов вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $k_1 + \dots + k_n = \mu$, следующих в лексикографическом порядке; $y^{\{\mu\}} = (y_1^\mu, \dots, y_m^\mu)^T$; A_{ij} — вещественные матрицы соответствующих размерностей. В работе [5] на основе метода декомпозиции, впервые предложенного А. Н. Тихоновым [7], были получены условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1) в виде следующей теоремы.

[1] **Козлов Михаил Владимирович**, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7681-8931, kozlov.mvl@yandex.ru

Т е о р е м а 1.1. *Если матрица A_{22} является диагональной отрицательно определенной и нулевое решение системы*

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x^{[\mu]}$$

асимптотически устойчиво, то при $\varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво в целом (ε_0 — некоторое достаточно малое число).

В работе [6] был рассмотрен случай, когда измерению подлежат только компоненты вектора быстрых переменных y. Вследствие этого, стабилизация системы (2.1) осуществлялась добавлением в правую часть управления, зависящего только от y, что приводило к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x^{[\mu]} + A_{12}y^{\{\mu\}} + K_1 y^{\{\mu\}}, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x^{[\mu]} + A_{22}y^{\{\mu\}} + K_2 y^{\{\mu\}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Матрицы K_1, K_2 подбирались таким образом, чтобы система (1.2) удовлетворяла теореме 1.1. В настоящей работе это исследование продолжено на случай, когда измерению подлежит только вектор медленных переменных x, а управление может входить только в первую подсистему (2.1).

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему (2.1) с добавлением к ней управляющего воздействия

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x^{[\mu]} + A_{12}y^{\{\mu\}} + BU, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x^{[\mu]} + A_{22}y^{\{\mu\}}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где B — заданная постоянная матрица размерности $(n \times r)$, $U \in R^r$ — вектор управления. Управление U будем строить по принципу обратной связи в следующей форме

$$U = Kx^{[\mu]}, \tag{2.2}$$

где K — постоянная $(r \times N)$–матрица, подлежащая определению. Задача состоит в построении такой матрицы K, что нулевое решение системы (2.1) при управлении (2.2) становится асимптотически устойчивым при достаточно малых значениях параметра ε.

Согласно теореме 1.1., достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1) можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены условия:*
1) матрица A_{22} является диагональной отрицательно определенной;
2) матрица K такова, что нулевое решение системы

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + BK)x^{[\mu]} \tag{2.3}$$

асимптотически устойчиво. Тогда нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво при $\varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 – некоторое число.

Таким образом, при выполнении первого условия теоремы 2.1. задача сводится к построению матрицы K, стабилизирующей нулевое решение системы (2.3).

3. Построение матрицы K

Введем обозначение $A = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ и перепишем систему (2.3) в виде

$$\dot{x} = (A + BK)x^{[\mu]}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим несколько случаев стабилизируемости системы (3.1).

2.1. Случай, когда может быть стабилизирована система

$$\dot{x} = BKx^{[\mu]}. \tag{3.2}$$

Зададим матрицу K так, чтобы столбцы, соответствующие смешанным мономам в векторе $x^{[\mu]}$, были нулевыми. Обозначим через K_0 $(r \times n)$–матрицу, полученную из матрицы K удалением этих нулевых столбцов. Тогда систему (3.2) можно переписать в виде

$$\dot{x} = BK_0x^{\{\mu\}}. \tag{3.3}$$

В работе [8] было показано, что для асимптотической устойчивости нулевого решения системы вида (3.3) необходимо выполнение условия

$$rang\ B = n. \tag{3.4}$$

Если условие (3.4) выполнено, то матрица $S = BB^T$ является симметрической положительно определенной и матрица $K_0 = -B^T$ стабилизирует систему (3.3). В итоге получаем следующее утверждение.

Л е м м а 3.1. *Если выполнено условие (3.4), то система (3.1) стабилизируется матрицей K, в которой на месте столбцов, соответствующих мономам вида x_i^μ, стоят столбцы матрицы $K_0 = -hB^T$, а остальные столбцы являются нулевыми, $h > 0$ — достаточно большое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (3.1) при выбранных обозначениях принимает вид

$$\dot{x} = Ax^{[\mu]} - hSx^{\{\mu\}}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму $v = \frac{1}{2}x^TS^{-1}x$, полная производная которой в силу системы (3.5) допускает следующую оценку

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.5)} = x^TS^{-1}Ax - hx^Tx^{\{\mu\}} \le \sqrt{N}\,\|S^{-1}\|\,\|A\|\,\|x\|^{\mu+1} - h\sqrt{n}\,\|x\|^{\mu+1},$$

и, очевидно, при $h > h_0 = \|S^{-1}\|\,\|A\|\,\sqrt{N/n}$ является отрицательно определенной функцией. Следовательно, построенная матрица K стабилизирует нулевое решение системы (3.1) при $h > h_0$. Утверждение доказано. Лемма 3.1..

2.2. Случай, когда систему (3.2) невозможно стабилизировать. В этом случае $rangB = k < n$. Как указано в работе [8], систему (3.1) при помощи линейного преобразования фазовых координат можно привести к виду, когда управляющие воздействия входят только в k уравнений системы. Для определенности будем считать, что система (3.1) уже имеет такой вид, что управление входит только в первые k уравнений, т.е. последние $(n-k)$ строк матрицы являются нулевыми. Тогда система (3.1) представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = (A^{(1)} + B^{(1)}K)x^{[\mu]}, \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{[\mu]}, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_k)^T$, $x^{(2)} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)^T$, $A^{(1)}$ — $(k \times N)$–матрица, состоящая из первых k строк матрицы A, $A^{(2)}$ — $((n-k) \times N)$–матрица, состоящая из остальных строк матрицы A, $B^{(1)}$ — $k \times r$–матрица, состоящая из первых k строк матрицы B. Выделим в первой подсистеме системы (3.6) блок, содержащий только вектор $x^{(1)\{\mu\}}$, в результате чего получим

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = (A^{(1)} + B^{(1)}K^{(1)})x^{[\mu]} + B^{(1)}K^{(2)}x^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{[\mu]}, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $K^{(1)}$ — $(r \times N)$–матрица, в которой столбцы, соответствующим степеням $x^{(1)\{\mu\}}$, являются нулевыми; $K^{(2)}$ — $(r \times k)$–матрица.

Л е м м а 3.2. *При $K^{(2)} = -B^{(1)T}$ можно подобрать такую матрицу $K^{(1)}$, что нулевое решение системы (3.7) будет асимптотически устойчиво по вектору $x^{(1)}$ с контролем начальных данных по этому вектору.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейную систему

$$A^{(1)} + B^{(1)}K^{(1)} = 0. \tag{3.8}$$

Поскольку матрица $B^{(1)}$ имеет k строк и $rang\ B^{(1)} = k$, то система (3.8) имеет решение $K^{(1)} = K^{(1)*}$. Кроме того, матрица $S = B^{(1)}B^{(1)T}$ симметрическая и положительно определенная. Подставляя в систему (3.7) $K^{(2)} = -B^{(1)T}$ и $K^{(1)} = K^{(1)*}$, получаем

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -Sx^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{[\mu]}, \end{cases} \tag{3.9}$$

Теперь воспользуемся функцией Ляпунова $v = \frac{1}{2}x^{(1)T}S^{-1}x^{(1)}$, полная производная которой в силу системы (3.9) является отрицательно определенной функцией

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.9)} = -(x_1^{\mu+1} + \cdots + x_n^{\mu+1}).$$

Следовательно, нулевое решение системы (3.7) асимптотически $x^{(1)}$–устойчиво с $x^{(1)}$–контролем начальных данных. Лемма 3.2. доказана.

Таким образом, нулевое решение системы (3.7) может быть частично стабилизировано (по вектору $x^{(1)}$). Для стабилизации по всему фазовому вектору необходимо, чтобы вторая часть системы (3.7) не содержала изолированных подсистем с не асимптотически устойчивым нулевым решением. Предположим, что изолированных подсистем нет вообще, и рассмотрим частный случай, когда система (3.7) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = (A^{(1)} + B^{(1)}K^{(1)})x^{[\mu]} + B^{(1)}K^{(2)}x^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A_1^{(2)}x^{(1)\{\mu\}} + A_2^{(2)}x^{(2)\{\mu\}}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Пусть $K^{(1)} = K^{(1)*}$, $K^{(2)} = -hB^{(1)T}$, тогда систему (3.10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -hSx^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A_1^{(2)}x^{(1)\{\mu\}} + A_2^{(2)}x^{(2)\{\mu\}}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Лемма 3.3. *Если нулевое решение системы*

$$\dot{x}^{(2)} = A_2^{(2)} x^{(2)\{\mu\}} \tag{3.12}$$

асимптотически устойчиво, то при достаточно большом $h > 0$ нулевое решение системы (3.11) также асимптотически устойчиво.

Доказательство. Согласно [9], существует положительно определенная однородная степени 2 функция Ляпунова $v(x^{(2)})$, для которой справедливы оценки

$$\|grad\ v\| \leq \left\|x^{(2)}\right\|, \tag{3.13}$$

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.12)} = grad^T v \cdot A_2^{(2)} x^{(2)\{\mu\}} \leq -c\left\|x^{(2)}\right\|^{\mu+1}, c > 0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим положительно определенную функцию $V = \frac{1}{2}x^{(1)T}S^{-1}x^{(1)} + v(x^{(2)})$. Ее производная в силу системы (3.11) имеет вид

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.11)} = -hx^{(1)T}x^{(1)\{\mu\}} + grad^T v \cdot A_1^{(2)} x^{(1)\{\mu\}} + grad^T v \cdot A_2^{(2)} x^{(2)\{\mu\}}.$$

С учетом (3.13), (3.14) справедлива оценка

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.11)} \leq -h\sqrt{k}\left\|x^{(1)}\right\|^{\mu+1} + \sqrt{k}\left\|A_1^{(2)}\right\| \cdot \left\|x^{(1)}\right\|^{\mu} \cdot \left\|x^{(2)}\right\| - c\left\|x^{(2)}\right\|^{\mu+1}. \tag{3.15}$$

Для любого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\left\|x^{(1)}\right\|^{\mu} \cdot \left\|x^{(2)}\right\| \leq d\left(\delta\left\|x^{(1)}\right\|^{\mu+1} + \frac{1}{\delta^{\mu}}\left\|x^{(2)}\right\|^{\mu+1}\right),$$

где $d > 0$ — наибольшее значение функции $f(r_1, r_2) = r_1^{\mu} r_2$ на множестве $r_1^{\mu+1} + r_2^{\mu+1} = 1$, $r_{1,2} > 0$. Продолжая оценку (3.15), получаем

$$\begin{gathered}\frac{dv}{dt}|_{(3.11)} \leq -h\sqrt{k}\left\|x^{(1)}\right\|^{\mu+1} + d\delta\sqrt{k}\left\|A_1^{(2)}\right\| \cdot \left\|x^{(1)}\right\|^{\mu+1} + \\ + \frac{d}{\delta^{\mu}}\sqrt{k}\left\|A_1^{(2)}\right\| \cdot \left\|x^{(2)}\right\|^{\mu+1} - c\left\|x^{(2)}\right\|^{\mu+1}.\end{gathered} \tag{3.16}$$

При $\delta > \delta_0 = \left(\frac{d}{c}\sqrt{k}\left\|A_1^{(2)}\right\|\right)^{1/\mu}$ и $h > h_0 = d\delta\left\|A_1^{(2)}\right\|$ правая часть неравенства (3.16) становится отрицательно определенной функцией. Следовательно, при данных значениях h нулевое решение системы (3.11) асимптотически устойчиво. Лемма 3.3. доказана.

4. Пример

Приведем пример построения матрицы K для системы вида (3.1).

Пример 4.1. *Рассмотрим систему*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = Ax^{[3]} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} Kx^{[3]}, \tag{4.1}$$

где $x \in R^3$, $x^{[3]} = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_1x_3^2, x_2^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3)^T$, $A \in R^{3,10}$, $K \in R^{3,10}$.

Рассмотрим различные случаи стабилизируемости системы (4.1).

1) Пусть $b_1, b_2, b_3 \neq 0$, т.е. $rang\ B = 3$. Тогда, согласно лемме 3.1., стабилизирующая матрица K может иметь следующий вид

$$K = -h\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

2) Пусть $b_1, b_2 \neq 0$, $b_3 = 0$, т.е. $rang\ B = 2$. Тогда систему (4.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left(A^{1,2} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} K^{(1)}\right) x^{[3]} + \\ &+ \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{17} \\ k_{21} & k_{27} \\ k_{31} & k_{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \\ &\dot{x}_3 = A^3 x^{[3]}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $A^{1,2}$ есть матрица, состоящая из первых двух строк матрицы A; A^3 — третья строка матрицы A; $K^{(1)}$ есть матрица K, в которой первый и седьмой столбцы нулевые.

Согласно лемме 3.2. можно подобрать такую матрицу $K^{(1)}$, чтобы

$$A^{1,2} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} K^{(1)} = 0.$$

Кроме того подстановка

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{17} \\ k_{21} & k_{27} \\ k_{31} & k_{37} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

приводит систему (4.2) к виду

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1^2 & 0 \\ 0 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \\ &\dot{x}_3 = A^3 x^{[3]}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Очевидно, что нулевое решение системы (4.3) асимптотически устойчиво по вектору (x_1^3, x_2^3). Если же строка A^3 имеет вид

$$A^3 = (a_1, 0, 0, 0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_3), \tag{4.4}$$

где $a_1, a_2 \in R$, $a_3 < 0$, то нулевое решение системы (4.3) асимптотически устойчиво по всему набору фазовых переменных.

Список литературы

1. Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai, and Yun Zou, "Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002-2012", *International Journal of Information and Systems Sciences*, **9**:1 (2014), 1–36.

2. А. И. Климушев, Н. Н. Красовский, "Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных", *Прикладная математика и механика*, **25**:4 (1961), 680-690.

3. C. Lobry, T. Sari, "Singular Perturbation Methods in Control Theory", *Controle non lineaire et applications, Travaux en cours 64, Hermann, Paris*, 2005, № 15, 151-177.

4. Х. К. Халил, *Нелинейные системы / пер. с англ. И. А. Макарова; под ред. А. Л. Фрадкова. - Изд. 3-е.*, Ин-т компьютерных исслед, Москва, Ижевск, 2009, 812 с.

5. А. А. Косов, "Об устойчивости сингулярных однородных систем", *Материалы конф. «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН*, 2014, 16.

6. А. А. Косов, М. В. Козлов, "Стабилизация одного класса сингулярных систем на основе декомпозиции", *Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем*, 2016, № 15, 77-84.

7. А. Н. Тихонов, "Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных", *Мат. сборник*, **31**:3 (1952), 575-586.

8. А. А. Косов, "О стабилизации нелинейных управляемых систем по однородному приближению", *Качественные свойства, асимптотика и стабилизация нелинейных динамических систем: межвуз. сб. науч. тр*, 2010, 74-81.

9. L. Rossier, "Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field", *Systems & Control Letters*, 1992, № 19, 467-473.

Поступила 28.04.2017

MSC2010 34H15

Stabilization of singularly perturbed systems with a polynomial right-hand side

© **M. V. Kozlov** [2]

Abstract. The article considers the problem of stabilization of singularly perturbed systems of ordinary differential equations with homogeneous right-hand side in the form of polynomials of odd degree. The values of the perturbing parameter are supposed to be small. Sufficient conditions are obtained for stabilizing the zero solution of these systems to asymptotic stability by feedback control in the form of polynomials of the same degree as the right-hand side of the original system. It is assumed that only components of the vector of slow variables are subject for measurement and that control can only enter into the slow subsystem. For various cases, methods for constructing stabilizing controls are described. As a method of investigation, decomposition of a singularly perturbed system into a fast and slow subsystems of smaller dimension is applied. For stability analysis, the Lyapunov function method is used.
Key Words: singular perturbations, small parameter, stabilization, homogenious form.

References

1. Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai, and Yun Zou, "Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002-2012", *International Journal of Information and Systems Sciences*, **9**:1 (2014), 1–36.

2. A. I. Klimushev, N. N. Krasovskiy, "Uniform asymptotic stability of systems of differential Equations with a small parameter for the derivatives", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **25**:4 (1961), 680-690.

3. C. Lobry, T. Sari, "Singular Perturbation Methods in Control Theory", *Controle non lineaire et applications, Travaux en cours 64, Hermann, Paris*, 2005, № 15, 151-177.

4. Kh. K. Khalil, *Nonlinear Systems / per. s angl. I. A. Makarova; pod red. A. L. Fradkova. - Izd. 3-e.*, In-t komp'yuternykh issled, Moskva, Izhevsk, 2009, 812 c.

5. A. A. Kosov, "On the stability of singular homogeneous systems", *Materialy konf. «Lyapunovskie chteniya». Irkutsk: IDSTU SO RAN*, 2014, 16.

6. A. A. Kosov, M. V. Kozlov, "Stabilization of a class of singular systems based on decomposition", *Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh sistem*, 2016, № 15, 77-84.

7. A. N. Tikhonov, "Systems of differential equations containing small parameters for derivatives", *Mat. sbornik*, **31**:3 (1952), 575-586.

8. A. A. Kosov, "On the stabilization of nonlinear controlled systems by homogeneous approximation", *Kachestvennye svoystva, asimptotika i stabilizatsiya nelineynykh dinamicheskikh sistem: mezhvuz. sb. nauch. tr*, 2010, 74-81.

[2] **Mikhail V. Kozlov**, Lecture, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7681-8931, kozlov.mvl@yandex.ru

9. L. Rossier, "Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field", *Systems & Control Letters*, 1992, № 19, 467-473.

Submitted 28.04.2017