DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.67-76

УДК 517.925

Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством

© **С. С. Мамонов** [1], **А. О. Харламова**[2]

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, которая является математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ). Для системы (ЧФАПЧ) мало изученным является вопрос реализации колебательных режимов, которые связаны с нарушением устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия. В работе с использованием принципа тора, метода нелокального сведения и результатов, полученных для нахождения решения системы матричных уравнений, решается задача разработки численно-аналитического подхода для определения условий существования предельных циклов первого рода системы дифференциальных уравнений, которые соответствуют колебательным режимам системы (ЧФАПЧ). Составлен алгоритм для проверки условий существования предельных циклов первого рода, позволяющий определить в фазовом пространстве исходной системы область, содержащую начальные условия предельного цикла первого рода. Прикладное значение полученных результатов заключается в возможности использования системы (ЧФАПЧ) как генератора модулированных колебаний, а также для определения условий существования квазисинхронных режимов фазовых систем.

Ключевые слова: фазовая система, квазисинхронные режимы, предельные циклы первого рода, режимы синхронизации, неподвижная точка, оператор сдвига по траекториям.

1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством

$$\begin{array}{c} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2kc^T x}{1+\tau^2(c^T x)^2}, \\ \dot{\sigma} = c^T x, \end{array} \qquad (1.1)$$

где $x, b, c, d \in \mathbb{R}^2, k, \tau \in \mathbb{R}$, матрица A имеет действительные собственные значения, $\varphi(\sigma)$ — Δ-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Система (1.1) является математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1-4].

Определение 1.1. *Решение* $z(t, z_0) = \begin{pmatrix} x(t, x_0) \\ \sigma(t, \sigma_0) \end{pmatrix}$ *системы (1.1) называется предельным циклом первого рода, если существует* $\tau > 0$*, такое что для любого* $t \in \mathbb{R}$ *выполняются неравенства* $x(t+\tau, x_0) = x(t, x_0)$*,* $\sigma(t+\tau, \sigma_0) = \sigma(t, \sigma_0)$*.*

[1] **Мамонов Сергей Станиславович**, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО "РГУ им. С. А. Есенина" (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5626-748X, s.mamonov@rsu.edu.ru

[2] **Харламова Анастасия Олеговна**, аспирант кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО "РГУ им. С. А. Есенина" (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7811-381X, a.harlamova@rsu.edu.ru

В статье используются методы нахождения предельных циклов второго рода, предложенные в работе [4] для определения циклов первого рода. Циклы первого рода изучались в работах [5], [6], где были получены условия их существования без использования решения системы матричных уравнений, найдены параметры бифуркации и разработан алгоритм нахождения неустойчивых циклов системы (1.1). Практическая значимость циклов первого рода заключается в том, что они определяют квазисинхронные режимы фазовой системы [3] или синхронизм второго рода [2]. Установление в системе ЧФАП квазисинхронного режима связано с нарушением устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия.

2. Основной результат

Теорема 2.1. *Пусть для системы (1.1) выполнены условия:*

1) $c^T b = -\Gamma < 0, c^T A = l^T, l^T b = \nu > 0, c^T d = \xi_2 > 0, l^T d = -\xi_1 < 0, rang \|c, l\| = 2, l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, c^T A^{-1} b \neq 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, k > 0;$

2) $\varphi(\sigma)$ — Δ*-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде* $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0, 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, *для* $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$ *справедливы соотношения* $\varphi(\sigma) = a_2\widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma}), |\varphi_2(\widetilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2|\widetilde{\sigma}|, \varphi(\sigma) = \varphi(\widetilde{\sigma} + \sigma_1) = \varphi_0(\widetilde{\sigma}), \dot{\varphi}_0(0) > 0, \widetilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1, \dot{\varphi}_0(\widetilde{\sigma}_2) < 0, \dot{\varphi}(\widetilde{\sigma})$ *— ограничена на сегменте* $[0; \Delta], \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0;$

3) система матричных уравнений относительно матриц H, L_2 M_2

$$A^T H + HA = -L_2 - 2\widetilde{\lambda}_1 H, \tag{2.1}$$

$$\left(A + 2kdc^T\right)^T H + H\left(A + 2kdc^T\right) = -M_2 + 2m_2cc^T - 2\widetilde{\lambda}_1 H, \tag{2.2}$$

$$Hb = -c, \tag{2.3}$$

при $\widetilde{\lambda}_1 > 0$, $m_2 > 0$ *имеет решение* $H = H^T \geq 0$, $L_2 = L_2^T \geq 0$, $M_2 = M_2^T \geq 0$, *матрица* H *имеет действительные собственные значения;*

4) матрицы H, L_2, M_2 *удовлетворяют соотношениям*

$$H = \bar{\gamma}_1 cc^T + \bar{\gamma}_2\left(l + \nu\Gamma^{-1}c\right)\left(l + \nu\Gamma^{-1}c\right)^T, \tag{2.4}$$

$$L_2 = 2\bar{\eta}_1(l + \bar{\eta}_2 c)(l + \bar{\eta}_2 c)^T, \tag{2.5}$$

$$M_2 = 2\bar{\nu}_1(l + \bar{\nu}_2 c)(l + \bar{\nu}_2 c)^T, \tag{2.6}$$

где $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\nu}_1 \in \mathbb{R}^+$*;*

5) существуют λ_1, λ_2, $\widetilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\lambda_2^2 = a_2 + \sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\left(\nu\Gamma^{-1} - 2\widetilde{\lambda}_1\right) + \lambda_1^2, \tag{2.7}$$

$$\widetilde{\lambda}_1\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) - \sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1 a_2\Gamma - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1\lambda_2^2 - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1^3 \leq 0; \tag{2.8}$$

6) существует $R \in \mathbb{R}$, *такое что*

$$\begin{gathered}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} - \widetilde{\lambda}_1\right)R^2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_2}\lambda_2}R^2 + \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_2^3}\tau_1 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\Gamma\lambda_1}{\lambda_2^3}\tau_1\right)R^3 + \\ + \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_2^4}\tau_2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\Gamma\lambda_1}{\lambda_2^4}\tau_2\right)R^4 + \frac{m_2}{2\tau\sqrt{\bar{\gamma}_1}}R + \left|2k\sqrt{\bar{\gamma}_1}\xi_2\lambda_1 - \frac{m_2\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}}\right|\frac{R}{2\tau\lambda_2} < 0;\end{gathered} \tag{2.9}$$

7) существует $R > 0$ такое, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\frac{\nu y}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} - \varphi(\sigma) + \mu + \xi_2 \frac{2ky}{\sqrt{\Gamma}\left(1 + \tau^2 \Gamma y^2\right)},\ \dot{\sigma} = y, \tag{2.10}$$

при $\mu = \mu_1 > \frac{R}{\Gamma\sqrt{\bar{\gamma}_2}}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$, $f_1^-(-\bar{\sigma}_3) = f_1^-(\bar{\sigma}_2) = 0, -\bar{\sigma}_3 < 0, \bar{\sigma}_2 > 0, f_1^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2)$;

8) существует $R > 0$ такое, что система (2.10) при $\mu = -\mu_2 < -\frac{R}{\Gamma\sqrt{\bar{\gamma}_2}}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma), f_1^+(-\bar{\sigma}_1) = f_1^+(\bar{\sigma}_2), -\bar{\sigma}_3 < -\bar{\sigma}_1 < 0, f_1^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2)$;

9) для любого $\sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]$ выполняется соотношение $\left(-\frac{R}{\sqrt{\bar{\gamma}_2}} - \Gamma\varphi(\sigma)\right) > 0$;

10) рассмотрим функции $g_1^\pm(\sigma) = \left(\sqrt{\bar{\gamma}_1}\sqrt{\Gamma} f_1^\pm(\sigma) + \widetilde{\sigma}\lambda_1\right)^2 + \bar{\gamma}_2 \nu^2 \Gamma^{-1}\left(f_1^\pm(\sigma)\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2$, тогда на промежутке $[-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4]$ справедливы неравенства $g_1^-(\sigma) < f_1^-(\sigma)$, $g_1^+(\sigma) > f_1^+(\sigma)$.

Тогда система (1.1) имеет предельный цикл первого рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = x^T H x + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} c^T x \widetilde{\sigma}\lambda_1 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_1^2 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2$, $V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma)$, $V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma)$, $W(z) = c^T x$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, $f_1^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям 7 и 8 теоремы. Пусть $D = \left\{z : V_1(z) = x^T H x + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} c^T x \widetilde{\sigma}\lambda_1 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_1^2 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2 \le 0\right\}$, $\partial D = \{z : V_1(z) = 0\}$. Множество D представляет собой эллипсоид.

Пусть

$$\partial Q_1 = \left\{z : V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma) = 0,\ \sigma \in [-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2]\right\},$$

$$\partial Q_2 = \left\{z : V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma) = 0,\ \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2]\right\},$$

$$\partial Q_3 = \left\{z : W(z) = c^T x = 0,\ \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]\right\},$$

$\partial Q = \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3$, тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂Q через множество Q.

Множество $\Omega = Q \cap D$ является тороидальным, сечение его плоскостью $l^T x = 0$ изображено на рисунке 2.1, а граница этого множества определяется равенством $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, где $\partial\Omega_1 = \partial Q_1 \cap D$, $\partial\Omega_2 = \partial Q_2 \cap D$, $\partial\Omega_3 = \partial Q_3 \cap D$, $\partial\Omega_4 = Q \cap \partial D$.

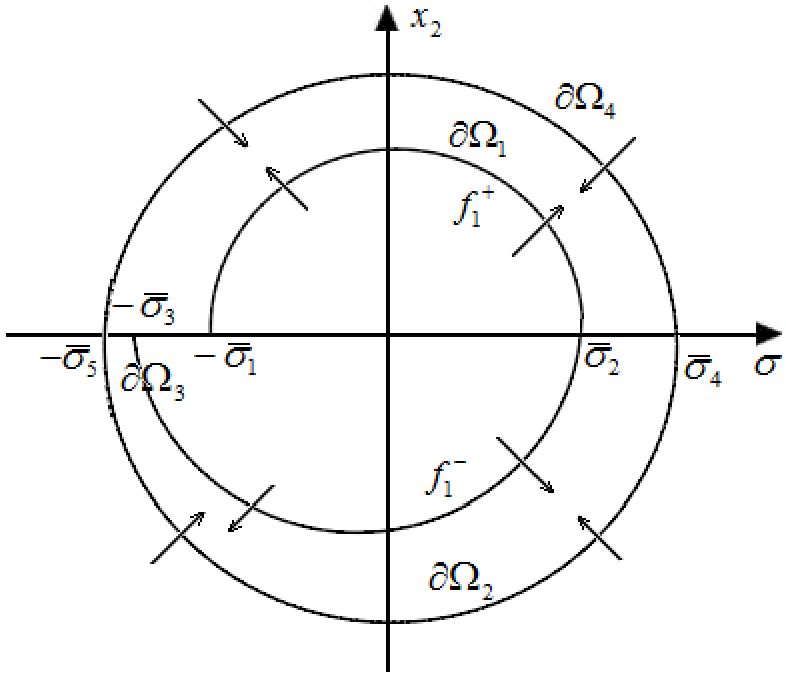

Рисунок **2.1**

Рассмотрим множество $\partial\Omega_4$, если $z \in \partial\Omega_4$, то из (2.4) справедливо равенство

$$V_1(z) = x^T H x + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} c^T x \widetilde{\sigma} \lambda_1 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 = \bar{\gamma}_1 \left(c^T x\right)^2 + \bar{\gamma}_2 \left(l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \\ + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} c^T x \widetilde{\sigma} \lambda_1 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 = \left(\sqrt{\bar{\gamma}_1} c^T x + \widetilde{\sigma} \lambda_1\right)^2 + \bar{\gamma}_2 \left(l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 = 0. \tag{2.11}$$

Используя условия 1—6 теоремы и соотношения (2.1), (2.2), (2.11) найдем производную функции $V_1(z)$ на множестве $\partial\Omega_4$ в силу системы (1.1) и с учётом равенства $\varphi(\sigma) = a_2 \widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}^2 \varphi_2(\widetilde{\sigma})$

$$\dot{V}_1(z) = x^T \left(A^T H + H A\right) x - 2c^T x \varphi(\sigma) + \frac{2k}{1 + \tau^2 \left(c^T x\right)^2} x^T \left(c d^T H + H d c^T\right) x + \\ + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 l^T x \widetilde{\sigma} - 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) \widetilde{\sigma} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 \widetilde{\sigma} \xi_2 \frac{2k c^T x}{1 + \tau^2 \left(c^T x\right)^2} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 \left(c^T x\right)^2 + \\ + 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) \widetilde{\sigma} c^T x = \frac{1}{1 + \tau^2 \left(c^T x\right)^2} \left(-\tau^2 \left(c^T x\right)^2 x^T L_2 x + 2\left(c^T x\right)^2 m_2 - x^T M_2 x\right) - \\ - 2\widetilde{\lambda}_1 x^T H x + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 l^T x \widetilde{\sigma} - 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) \widetilde{\sigma} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 \widetilde{\sigma} \xi_2 \frac{2k c^T x}{1 + \tau^2 \left(c^T x\right)^2} + \\ + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 \left(c^T x\right)^2 + 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) \widetilde{\sigma} c^T x - 2c^T x \varphi(\sigma). \tag{2.12}$$

Из (2.11) получим, что $V_1(z)$ удовлетворяет соотношению

$$V_1(z) = \widetilde{\sigma}^2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right) + 2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}c^Tx\widetilde{\sigma} + \frac{\bar{\gamma}_1\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(c^Tx\right)^2 - \frac{\bar{\gamma}_1\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(c^Tx\right)^2 +$$
$$+\bar{\gamma}_1\left(c^Tx\right)^2 + \bar{\gamma}_2\left(l^Tx+\nu\Gamma^{-1}c^Tx\right)^2 - R^2 = \left(\widetilde{\sigma}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}c^Tx\right)^2 + \left(c^Tx\right)^2\times$$
$$\times\frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_2^2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} + \bar{\gamma}_2\left(l^Tx+\nu\Gamma^{-1}c^Tx\right)^2 - R^2 = 0. \tag{2.13}$$

Производная функции $V_1(z)$ в силу (2.12) примет вид

$$\dot{V}_1(z) \le \frac{2m_2\left(c^Tx\right)^2}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} - 2\widetilde{\lambda}_1x^THx - 2c^Tx\varphi(\sigma) + 2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\widetilde{\sigma}c^Tx + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1l^Tx\widetilde{\sigma}-$$
$$-2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\Gamma\varphi(\sigma)\widetilde{\sigma} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\sigma}\xi_2\frac{2kc^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\left(c^Tx\right)^2 + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1l^Tx\widetilde{\sigma}- \tag{2.14}$$
$$-2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\Gamma\varphi(\sigma)\widetilde{\sigma} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\sigma}\xi_2\frac{2kc^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\left(c^Tx\right)^2.$$

Из соотношения (2.14) запишем слагаемое $\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\left(c^Tx\right)^2$ в виде

$$\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\left(c^Tx\right)^2 = \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1\left(\bar{\gamma}_1\left(c^Tx\right)^2 + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}c^Tx\lambda_1\widetilde{\sigma} + \lambda_1^2\widetilde{\sigma}^2 - 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}c^Tx\lambda_1\widetilde{\sigma} - \lambda_1^2\widetilde{\sigma}^2\right) =$$
$$= \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1\left(\sqrt{\bar{\gamma}_1}c^Tx+\lambda_1\widetilde{\sigma}\right)^2 - 2\lambda_1^2c^Tx\widetilde{\sigma} - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1^3\widetilde{\sigma}^2. \tag{2.15}$$

В силу условий (2.14), (2.15) и того, что $\varphi(\sigma) = a_2\widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})$ имеем

$$\dot{V}_1(z) \le \frac{2m_2\left(c^Tx\right)^2}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\sigma}\xi_2\frac{2kc^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} - 2\widetilde{\lambda}_1R^2 + 4\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\lambda}_1c^Tx\widetilde{\sigma}+$$
$$+2\widetilde{\lambda}_1\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\widetilde{\sigma}^2 - 2c^Tx\widetilde{\sigma}a_2 - 2c^Tx\widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma}) + 2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\widetilde{\sigma}c^Tx + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\times \tag{2.16}$$
$$\times\left(l^Tx+\nu\Gamma^{-1}c^Tx\right)\widetilde{\sigma} - 2\nu\Gamma^{-1}\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1c^Tx\widetilde{\sigma} - 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\Gamma a_2\widetilde{\sigma}^2 - 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\Gamma\widetilde{\sigma}^3\varphi_2(\widetilde{\sigma}) -$$
$$-2\bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1\lambda_2^2\widetilde{\sigma}^2 + 2\bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1R^2 - 4\lambda_1^2c^Tx\widetilde{\sigma} - 2\bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1^3\widetilde{\sigma}^2.$$

В неравенстве (2.16) найдем коэффициент при $\frac{1}{2}c^Tx\widetilde{\sigma}$ и используя (2.7) получим

$$2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\lambda}_1 - a_2 + \left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right) - \nu\Gamma^{-1}\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1 - 2\lambda_1^2 = 0. \tag{2.17}$$

Из (2.16), используя соотношение (2.8), найдем коэффициент при $\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2$

$$\widetilde{\lambda}_1\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right) - \sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1a_2\Gamma - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1\lambda_2^2 - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1^3 \le 0. \tag{2.18}$$

В (2.16) преобразуем слагаемое $\frac{2m_2\left(c^Tx\right)^2}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\sigma}\xi_2\frac{2kc^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2}$ к виду

$$\frac{2m_2\left(c^Tx\right)^2}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} + 2\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\widetilde{\sigma}\xi_2\frac{2kc^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} = \frac{2m_2\left(c^Tx\right)\left(\sqrt{\bar{\gamma}_1}c^Tx+\lambda_1\widetilde{\sigma}-\lambda_1\widetilde{\sigma}\right)}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\left(1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2\right)}+$$
$$+2k\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\xi_2\frac{2\widetilde{\sigma}c^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} = \left(\sqrt{\bar{\gamma}_1}c^Tx+\lambda_1\widetilde{\sigma}\right)\frac{2m_2c^Tx}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\left(1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2\right)}- \tag{2.19}$$
$$-2m_2\bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}}\lambda_1\widetilde{\sigma}\frac{c^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2} + 4k\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1\xi_2\widetilde{\sigma}\frac{c^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2}.$$

В силу (2.11), (2.13), (2.16), (2.19) для $z \in \partial\Omega_4$ справедливы оценки

$$\frac{c^T x}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2} \leq \frac{1}{2\tau}, \tag{2.20}$$

$$\left|c^T\sqrt{\bar{\gamma}_1} + \widetilde{\sigma}\lambda_1\right| \leq R, \tag{2.21}$$

$$\left|\widetilde{\sigma}\right| \leq R\lambda_2^{-1}, \tag{2.22}$$

$$\left|l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x\right| \leq R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.23}$$

$$\left|c^T x\right| \leq \frac{R\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\bar{\gamma}_1\lambda_2}, \tag{2.24}$$

Исходя из соотношений (2.9), (2.17), (2.18), (2.20)—(2.24) производная функции $V_1(z)$ на множестве $\partial\Omega_4$ в силу системы (1.1) при $\varphi(\sigma) = a_2\widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})$ примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\dot{V}_1(z) \leq \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} - \widetilde{\lambda_1}\right)R^2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_2}\lambda_2}R^2 + \left|c^T x\right|\left(\tau_1+\tau_2\left|\widetilde{\sigma}\right|\right)\widetilde{\sigma}^2 + \sqrt{\bar{\gamma}_1}\Gamma\lambda_1\left(\tau_1+\tau_2\left|\widetilde{\sigma}\right|\right)\left|\widetilde{\sigma}\right|^3 + \\ + \frac{m_2}{2\tau\sqrt{\bar{\gamma}_1}}R + \left(2k\sqrt{\bar{\gamma}_1}\xi_2\lambda_1 - \frac{m_2}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}}\lambda_1\right)\frac{c^T x}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2}\widetilde{\sigma} \leq \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} - \widetilde{\lambda_1}\right)R^2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_2}\lambda_2}R^2 + \\ + \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_2^3}\tau_1 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\Gamma\lambda_1}{\lambda_2^3}\tau_1\right)R^3 + \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\lambda_2^4}\tau_2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1}\Gamma\lambda_1}{\lambda_2^4}\tau_2\right)R^4 + \frac{m_2}{2\tau\sqrt{\bar{\gamma}_1}}R + \\ + \left|2k\sqrt{\bar{\gamma}_1}\xi_2\lambda_1 - \frac{m_2}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}}\lambda_1\right|\frac{R}{2\tau\lambda_2} < 0.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_1$, тогда справедливы соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma}f_1^+(\sigma),\ \sigma \in \left[-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2\right], \tag{2.26}$$

$$\left|l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x\right| \leq R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.27}$$

Используя (2.26), (2.27), условия 1, 8 теоремы найдём производную функции $V_1^+(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\begin{gathered}\dot{V}_1^+(z) = c^T Ax + c^T b\varphi(\sigma) + c^T d\frac{2kc^T x}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2} - \sqrt{\Gamma}\frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma}c^T x = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) + \\ + \xi_2\frac{2kc^T x}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2} - \Gamma f_1^+(\sigma)\frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} \geq -R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}} - \nu\Gamma^{-\frac{1}{2}}f_1^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) + \\ + \xi_2\frac{2k\sqrt{\Gamma}f_1^+(\sigma)}{1+\tau^2\Gamma\left(f_1^+(\sigma)\right)^2} - \Gamma f_1^+(\sigma)\frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} = -R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}} + \mu_2\Gamma > -R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}} + R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}} = 0.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Для $z \in \partial\Omega_2$ выполняется условие

$$c^T x = \sqrt{\Gamma}f_1^-(\sigma),\ \sigma \in \left[-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2\right]. \tag{2.29}$$

Найдём производную функции $V_1^-(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_2$. Аналогично (2.28), используя (2.27), (2.29), условия 1, 7 теоремы, получим

$$\dot{V}_1^-(z) < 0. \tag{2.30}$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3$, если $z \in \partial\Omega_3$, то справедливы неравенство (2.27) и равенство

$$c^T x = 0,\ \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]\,. \tag{2.31}$$

В силу условий 1, 9 теоремы и (2.27), (2.31) получим, что производная функции $W(z)$ в силу системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$\dot{W}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 \left(c^T x\right)^2} = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \geq -R\bar{\gamma}_2{}^{-\frac{1}{2}} - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \tag{2.32}$$

С учётом соотношений (2.25), (2.28), (2.30), (2.32) получим, что множество Ω является положительно инвариантным.

Рассмотрим функцию $Q_0(z) = \widetilde{\sigma}$ и плоскость $P = \{z:\ Q_0(z) = 0\}$. Найдём пересечение множества Ω и плоскости P, обозначим получившиеся множества через D_1 и D_2, тогда $\Omega \cap P = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \Omega \cap P \cap \left\{z:\ c^T x > 0\right\}$, $D_2 = \Omega \cap P \cap \left\{z:\ c^T x < 0\right\}$. Рассмотрим функцию $Q_1(z) = c^T x$ и плоскость $L = \{z:\ Q_1(z) = 0\}$. Найдём пересечение множества Ω и плоскости L, обозначим получившиеся множества через D_3 и D_4, тогда $\Omega \cap L = D_3 \cup D_4$, где $D_3 = \Omega \cap L \cap \{z:\ \widetilde{\sigma} > 0\}$, $D_4 = \Omega \cap L \cap \{z:\ \widetilde{\sigma} < 0\}$.

Используя условия 1 и 2 теоремы, неравенство (2.14), положительную инвариантность множества Ω получим, что функция $\widetilde{\sigma}(t)$ — бесконечное число раз меняет знак.

Возьмём точку $z_0 \in D_1$, и введем оператор $T_z = z(t_0 + T_z)$. Из непрерывности траекторий g_{z_0} системы (1.1) и того факта, что множество D_1 — множество без контакта следует непрерывность оператора T. Множество D_1 — замкнутое, ограниченное, выпуклое, оператор T отображает множество D_1 в себя, $T(D_1) \subset D_1$, тогда по теореме Брауэра существует неподвижная точка оператора T такая, что $Tz^* = z^* \in D_1$. Неподвижная точка z^* определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Теорема доказана.

Лемма 2.1. *Пусть для системы матричных уравнений (2.1)–(2.3) выполнены соотношения* $A = \begin{pmatrix} -\widetilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $c_1 b_1^{-1} < 0$, $c_2 b_2^{-1} < 0$, $c^T b = -\Gamma$, $c^T A b = \nu > 0$, $\varepsilon_0 = \nu\Gamma^{-1}$, $\alpha = \widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}_1$, $rang\,\|c, l\| = 2$, *тогда матричные уравнения (2.1)–(2.3) имеют решение* $H = H^T \geq 0$, $L_2 = L_2^T \geq 0$, $M_2 = M_2^T \geq 0$, *матрицы* H, L_2, M_2 *удовлетворяют соотношениям (2.4)–(2.6), где*

$$\bar{\gamma}_1 = \Gamma^{-1},\ \bar{\gamma}_2 = \left(\Gamma\left(\widetilde{\lambda}_2 - \varepsilon_0\right)\left(\varepsilon_0 - \widetilde{\lambda}_1\right)\right)^{-1}, \tag{2.33}$$

$$\bar{\eta}_1 = \left(\Gamma\left(\varepsilon_0 - \widetilde{\lambda}_1\right)\right)^{-1},\ \bar{\eta}_2 = \widetilde{\lambda}_1, \tag{2.34}$$

$$m_2 = -\alpha^{-1} k^2 c_2 b_2 \left(d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1}\right)^2 - 2k d_1 b_1^{-1}, \tag{2.35}$$

$$\bar{\nu}_1 = -\left(\alpha b_2 c_2\right)^{-1},\ \bar{\nu}_2 = \widetilde{\lambda}_1 + k c_2 b_2 \left(d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1}\right). \tag{2.36}$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой в уравнение (2.1) показывается, что матрицы $H = \begin{pmatrix} -c_1 b_1^{-1} & 0 \\ 0 & -c_2 b_2^{-1} \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha c_2 b_2^{-1} \end{pmatrix}$ удовлетворяют соотношениям (2.4), (2.5), где $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ определяются равенствами (2.33), (2.34). Используя (2.1) из (2.2) определим матрицу M_2

$$-M_2 = -L_2 + \left(2kdc^T\right)^T H + H\left(2kdc^T\right) - 2m_2 cc^T. \tag{2.37}$$

Из уравнения (2.37) определяется значение m_2, для которого $\det M_2 = 0$. Если m_2 удовлетворяет (2.37), то $\det M_2 = 0$ и $M_2 = \bar{u}\bar{u}^T$. Так как $rang\,\|c, l\| = 2$, то для вектора $\bar{u}$ справедливо разложение по линейно независимым векторам c и l, $u = \sqrt{2\bar{\nu}_1}\,(l + \bar{\nu}_2 c)$, где $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ находятся с помощью соотношений (2.36). Лемма доказана.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{b}\varphi(\sigma) + \widetilde{d}\frac{2k\widetilde{c}^T\widetilde{x}}{1 + \tau^2\left(\widetilde{c}^T\widetilde{x}\right)^2},\ \dot{\sigma} = \widetilde{c}^T\widetilde{x}, \tag{2.38}$$

где $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{d} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma$, $D = \alpha_1^2 - 4\beta_1 > 0$. Матрица $\widetilde{A}$ имеет действительные собственные значения $\left(-\widetilde{\lambda}_1\right)$, $\left(-\widetilde{\lambda}_2\right)$, $\widetilde{\lambda}_1 = 2^{-1}\left(\alpha_1 - \sqrt{D}\right)$, $\widetilde{\lambda}_2 = 2^{-1}\left(\alpha_1 + \sqrt{D}\right)$, $\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 = \beta_1$, $\widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{\lambda}_2 = \alpha_1$, $\widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}_1 = \sqrt{D} = \alpha$.

В системе (2.38) сделаем замену переменных $\widetilde{x} = Sx$, получим систему (1.1), где $A = S^{-1}\widetilde{A}S$, $b = S^{-1}\widetilde{b}$, $c^T = \widetilde{c}^T S$, $d = S^{-1}\widetilde{d}$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\widetilde{\lambda}_2 \\ -\widetilde{\lambda}_2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $\det S = \Delta_s = -\widetilde{\lambda}_2\sqrt{D} < 0$, $S^{-1} = \Delta_s^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\lambda}_2 \\ \widetilde{\lambda}_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\widetilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}$, $b = \Delta_s^{-1}\begin{pmatrix} \nu - \widetilde{\lambda}_2\Gamma \\ \widetilde{\lambda}_2\nu - \Gamma\beta_1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -\widetilde{\lambda}_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d = \Delta_s^{-1}\begin{pmatrix} -\xi_1 + \widetilde{\lambda}_2\xi_2 \\ -\widetilde{\lambda}_2\xi_1 + \beta_1\xi_2 \end{pmatrix}$, $l = A^T c = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $l^T b = \nu$, $\det\|c, l\| = -\Delta_s \neq 0$, $rang\,\|c, l\| = 2$. Для системы (1.1) выполняется условие 1 теоремы. Рассмотрим случай $\alpha_1 = 1.25$, $\beta_1 = 0.0519$, $\xi_1 = 0.0344$, $\xi_2 = 0.8$, $\Gamma = 1$, $\nu = 0.043$, $\tau = 55.9$, $k = 0.0374$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.36$.

Функция $\varphi(\sigma)$ — Δ-периодическая с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi(\sigma) = 0$ на сегменте $[0; \Delta]$ имеет два корня $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, где $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\sigma_1 = \arcsin\gamma$, $\sigma_2 = \ = \pi - 2\arcsin\gamma$, получим $\sigma_1 = 0.368$, $\sigma_2 = 2.41$. Обозначим $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$, тогда $\sigma = \widetilde{\sigma} + \sigma_1$. Функцию $\varphi(\sigma)$ представим в виде $\varphi(\sigma) = a_2\widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})$, для этого найдем производные функции $\varphi_0(\widetilde{\sigma}) = -\gamma + \sin(\widetilde{\sigma} + \sigma_1)$ в нуле, получим разложение функции $\varphi_0(\widetilde{\sigma})$ в ряд $\varphi_0(\widetilde{\sigma}) = \cos\sigma_1\widetilde{\sigma} - \frac{\sin\sigma_1}{2!}\widetilde{\sigma}^2 - \frac{\cos\sigma_1}{3!}\widetilde{\sigma}^3 + \frac{\sin\sigma_1}{4!}\widetilde{\sigma}^4 + \ldots$, отсюда $a_2 = \cos\sigma_1 = \sqrt{1 - \gamma^2} = 0.933$. Найдем разложение в ряд функции $\varphi_2(\widetilde{\sigma}) = \left(-\frac{\gamma}{2!} + \frac{\gamma}{4!}\widetilde{\sigma}^2 - \frac{\gamma}{6!}\widetilde{\sigma}^4 + \ldots\right) + \widetilde{\sigma}\cos\sigma_1\left(-\frac{1}{3!} + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{5!} - \frac{\widetilde{\sigma}^4}{7!} + \ldots\right) = \varphi_{21} + \widetilde{\sigma}\varphi_{22}$. Ряды φ_{21} и φ_{22} — сходятся, тогда $|-\varphi_2| \le |-\varphi_{21}| + |\widetilde{\sigma}|\,|-\varphi_{22}| \le 2^{-1}\gamma + 6^{-1}a_2|\widetilde{\sigma}|$. Получили, что $\varphi_2(\widetilde{\sigma})$ — знакочередующийся ряд $0 < s < a_1$, где $a_1 > 0$ таким образом, функция $|\varphi_2(\widetilde{\sigma})| \le \tau_1 + \tau_2|\widetilde{\sigma}|$, где $\tau_1 = 2^{-1}\gamma = 0.18$, $\tau_2 = 6^{-1}\sqrt{1 - \gamma^2} = 0.155$. Найдём $\dot{\varphi}_0(0) = \cos 0 = 1 > 0$, $\dot{\varphi}_0(\widetilde{\sigma}_2) = \cos\sigma_2 = \cos 2.41 = -0.737 < 0$, $\dot{\varphi}(\widetilde{\sigma}) = \cos\widetilde{\sigma}$ — ограниченная функция на сегменте $[0; \Delta]$. Для системы (1.1) выполнено условие 2 теоремы.

Используя соотношения (2.33)— (2.36) леммы, найдем значения $\bar{\gamma}_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.043$, $\alpha = 1.164$, $\bar{\gamma}_2 = 10^6$, $m_2 = 0.0598$, $\bar{\eta}_1 = 1.16 \cdot 10^6$, $\bar{\eta}_2 = 0.043$, $\bar{\nu}_1 = 1.16 \cdot 10^6$, $\bar{\nu}_2 = 0.043$, $h_{11} = -c_1 b_1^{-1} = 1.457$, $h_{22} = -c_2 b_2^{-1} = 1.355 \cdot 10^6$. Так как $h_{11} > 0, h_{22} > 0, \bar{\eta}_1 > 0, \bar{\nu}_2 > 0$, то матрица H имеет действительные собственные значения $\det H \ge 0, L_1, L_2$ удовлетворяют неравенствам $L_1 \ge 0, L_2 \ge 0$. Для системы (1.1) выполнены условия 3, 4 теоремы.

Решая неравенства (2.7) —(2.8) относительно λ_1 учитывая, что $\widetilde{\lambda}_1 = 0.043$, получим $\lambda_1 \in [0.0215; +\infty)$. Для системы (1.1) выполнено условие 5 теоремы.

Возьмём $\lambda_1 = 0.0215$ и по формуле (2.7) определим $\lambda_2 = 0.966$. Решение неравенства (2.9) определяется корнями многочлена четвертой степени. Численно показывается, что если $R \in [0.0407; 0.06107]$, то условие 6 теоремы выполнено.

Возьмём $\frac{R}{\sqrt{\gamma_2}} = 4.404 \cdot 10^{-5} > 0$. Численно показывается, что система второго порядка (2.10) при $\mu = -\mu_2 = -4.414 \cdot 10^{-5} < -4.404 \cdot 10^{-5}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$ такую, что $f_1^+(0) = 0.008$ и для любого $\sigma \in (-0.00826; 0.0083)$ функция $f_1^+(\sigma) > 0$, $f_1^+(-0.00826) = f_1^+(0.0083) = 0$. Условие 8 теоремы выполняется. Аналогично проводится проверка условия 7.

Численно показывается, что при $\sigma \in [-0.00832; -0.00826]$ выполняется соотношение $(-4.404 \cdot 10^{-5} - \varphi(\sigma)) > 0$. В теореме выполнено условие 9.

Численными методами показано, что при $\sigma \in [-0.0365; 0.0365]$ для функций $f_1^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$, $g_1^+(\sigma)$, $g_1^+(\sigma)$ выполняются неравенства из условия 10.

Для системы (1.1) выполнены все условия теоремы, тогда система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Условия теоремы позволяют определить область начальных условий цикла первого рода системы (1.1). Для рассматриваемого примера найдём $M = \Omega \cap \{z : \widetilde{\sigma} = 0\}$. Для границы множества Ω возьмём $f_1^+(0) = f_1^-(0) = 0.008$. Множество M определяется линиями

$$L_1 : x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \widetilde{\sigma} \lambda_1 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 = R^2 \Leftrightarrow \widetilde{x}^T \left(S^{-1}\right)^T H S^{-1} \widetilde{x} = R^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10^6 \widetilde{x}_1^2 + 2 \cdot 43 \cdot 10^3 \widetilde{x}_1 \widetilde{x}_2 + 1850 \widetilde{x}_2^2 = 0.044041,$$

$$L_2 : c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^+(0) \Leftrightarrow x_2 = 0.008,$$

$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^-(0) \Leftrightarrow x_2 = -0.008.$$

Численными методами показывается, что цикл первого рода определяется начальными условиями $x_1 = -0.00057,\ x_2 = 0.0132568713, \sigma = 0.368$.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они позволяют определить условия существования квазисинхронных режимов для системы частотно-фазовой автоподстройки частоты .

Список литературы

1. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, *Системы фазовой автоподстройки частоты*, Связь, М., 1972, 446 с.

2. Г. А. Леонов, И. М. Буркин, А. И. Шепелявый, *Частотные методы в теории колебаний*, СПбГУ, СПб., 1992, 162 с.

3. В. Д. Шалфеев, В. В. Матросов, *Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации*, ННГУ, Н. Новгород., 2013, 366 с.

4. С. С. Мамонов, "Достаточные условия существования предельных циклов второго рода системы частотно-фазовой синхронизации", *Труды Средневолжского математического общества. — Саранск.*, **10** (2008), 203–210.

5. С. С. Мамонов, А. О. Харламова, "Квазисинхронные режимы фазовой системы", *Вестник РГРТУ.*, **56** (2016), 45–51.

6. А. О. Харламова, "Предельные циклы первого рода фазовых систем", *Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения.*, **3** (2016), 68–74.

Поступила 10.04.2017

С. С. Мамонов, А. О. Харламова. Определение условий существования . . .

MSC2010 34C25

Determination of the conditions of existence of limit cycles of a first-order systems with cylindrical phase space

© **S. S. Mamonov** [3], **A. O. Kharlamova**[4]

Abstract. This article deals with a system of differential equations with a cylindrical phase space, which is a mathematical model of a frequency-phase locked loop (FPLL) system. For the system (FPLL) little studied is the implementation of oscillatory regimes that are associated with a violation of stability of the equilibrium state corresponding to the synchronization regime and to the formation of stable limit cycle around this equilibrium state. A numerical-analytical approach is developed to determine the conditions of existence of the first kind limiting cycles of a differential equations' system that correspond to the system oscillatory modes. To do this, author used the torus principle, the nonlocal reduction method and the results obtained to find the solution of the system of matrix equations. An algorithm is developed for checking the conditions for the existence of limit cycles of the first kind, which allows to determine a region in the phase space of initial system that contains containing initial conditions of the cycle. Applicative value of the obtained results is in the possibility of using the system (FPLL) for generation of modulated oscillations, as well as for determining the conditions of the existence of phase systems' quasisynchronous regimes.
Key Words: phase system, quasi-synchronous modes, limiting first-order cycles, synchronization modes, fixed point, shift operator along trajectories.

References

1. V. V. Shahgildyan, A. A. Lyakhovkin, *Sistemy fazovoy avtopodstroyki chastoty [Phase-locked loop systems]*, Svyaz', Moscow, 1972 (In Russ.), 446 p.

2. G. A. Leonov, I. M. Burkin, A. I. Shepelyavyy, *Chastotnye metody v teorii kolebaniy [Frequency methods in the theory of vibrations]*, SPbGU, St. Petersburg, 1992 (In Russ.), 368 p.

3. V. D. Shalfeev, V. V. Matrosov, *Nelineynaya dinamika sistem fazovoy sinkhronizatsii [Nonlinear dynamics of phase synchronization systems]*, NNGU, N. Novgorod, 2013 (In Russ.), 366 p.

4. S. S. Mamonov, "[Sufficient conditions for the existence of limit cycles of the second kind of the frequency-phase synchronization system]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **10** (2008), 203–210 (In Russ.).

5. S.S. Mamonov, A. O. Kharlamova, "[Quasisynchronous regimes of a phase system]", *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*, **56** (2016), 45–51 (In Russ.).

6. A. O. Kharlamova, "[Limit cycles of the first kind of phase systems]", *Vestnik RAEN. Differentsial'nye uravneniya*, **3** (2016), 68–74 (In Russ.).

Submitted 10.04.2017

[3] **Sergei S. Mamonov**, Full Professor, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenina (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5626-748X, s.mamonov@rsu.edu.ru

[4] **Anastasiya O. Kharlamova**,Graduate Student, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenina (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7811-381X, a.harlamova@rsu.edu.ru