УДК 517.925

О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях

© А. С. Гонченко[1], А. Д. Козлов[2]

Аннотация. Для однопараметрических семейств трехмерных неориентируемых отображений изучаются сценарии возникновения странных гомоклинических (содержащих только одну неподвижную точку) аттракторов. Описаны 4 различных вида таких сценариев, приводящих к возникновению дискретных гомоклинических неориентируемых аттракторов: соответственно лоренцевского и восьмерочного типов (содержащих неподвижную точку типа седло), а также двух типов спиральных аттракторов (содержащих неподвижную точку типа седло-фокус). Даны примеры реализации этих сценариев в случае трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно.

Ключевые слова: странный аттрактор, аттрактор Лоренца, спиральный аттрактор, гомоклиническая траектория, инвариантная кривая, трехмерное обобщенное отображение Эно

1. Введение

В работах [1] ,[2], [3] были исследованы некоторые универсальные сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в случае трехмерных ориентируемых отображений. Здесь термином «гомоклинический» мы ограничиваем круг рассматриваемых странных аттракторов только теми, которые содержат ровно одну неподвижную точку (типа седло, если все мультипликаторы действительны, или седло-фокус, если у неподвижной точки есть пара комплексно-сопряженных мультипликаторов). Универсальность сценариев означает, во-первых, то, что они могут реализовываться в общих однопараметрических семействах, и во-вторых, то, что для таких сценариев не требуется выполнения каких-либо специальных свойств рассматриваемых систем (типа наличия симметрий и т.п.).

В работе [1] были описаны три различных сценария такого рода, связанных с возникновением дискретных аттракторов лоренцевского типа, восьмерочного типа и спирального типа соответственно. Качественные схемы для первых двух сценариев показаны на рис. 1.1, а для третьего – на рис. 1.2. Все они могут реализовываться в однопараметрических семействах T_μ трехмерных ориентируемых отображений, и все начинаются с тех значений μ, при которых T_μ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O_μ, которая при некотором значении параметра μ теряет устойчивость, и здесь в сценариях появляются различия.

Сценарий 1 возникновения дискретного аттрактора Лоренца (путь (a) ⇒ (б) ⇒ (в) рисунка 1.1). При некотором значении μ точка O_μ теряет устойчивость в результате *бифуркации удвоения периода*: она сама становится седловой типа (2,1), т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2 (он в этот момент становится аттрактором). Затем при изменении параметра, в результате серии некоторых бифуркаций, этот цикл и все притягивающие инвариантные множества, которые от него отрождаются, теряют устойчивость. Каким способом это происходит, зависит от конкретной задачи.[3] При

[1] Научный сотрудник НИИ суперкомпьютерных технологий, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; agonchenko@mail.ru

[2] Лаборант НИИ суперкомпьютерных технологий, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kozzzloff@list.ru

этом важно, что инвариантные многообразия седловой точки O_μ пересекаются и, когда $W^u(O_\mu)$ целиком лежит в поглощающей области, образуется *гомоклинический аттрактор*. Поскольку точка O_μ имеет в этот момент мультипликатор $\lambda_1 < -1$, то два других λ_2 и λ_3 будут действительными и разных знаков, например, $0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$. В случае, когда $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, конфигурация получившегося гомоклинического аттрактора будет очень похожа по форме на аттрактор Лоренца, см. рис. 1.1(в). Только здесь мы имеем дело с его дискретным вариантом. При этом роль состояния равновесия аттрактора в случае отображения будет играть неподвижная точка O_μ, а в “дырках” дискретного аттрактора, вместо равновесий, будет лежать седловой цикл (p_1, p_2) периода 2. Кроме того, точка O_μ делит своё одномерное неустойчивое многообразие $W^u(O_\mu)$ на две связные компоненты – сепаратрисы. Поскольку неустойчивый мультипликатор λ_1 отрицательный, то точки на $W^u(O_\mu)$ будут “прыгать” под действием T_μ с одной сепаратрисы на другую (в классическом аттракторе Лоренца каждая из сепаратрис сама по себе инвариантна). Отметим также, что отрицательность мультипликаторов точки O_μ обеспечивает локальную (на её инвариантных многообразиях) симметрию, схожую с симметрией в модели Лоренца [11].

Сценарий 2 возникновения дискретного восьмерочного аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г) рисунка 1.1). Начало этого сценария такое же, как и в первом случае. Принципиальное отличие состоит в том, что в момент образования гомоклинического пересечения мультипликаторы точки O_μ такие, что опять $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$, но $|\lambda_2| < |\lambda_3|$. Тогда по форме гомоклинический аттрактор, см. рис. 1.1(г), будет похож на аттрактор, возникающий при периодическом возмущении двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седлового равновесия [12]. Поэтому такой аттрактор был назван в [1],[3] “дискретным восьмерочным аттрактором”.

[3] Укажем два простейших варианта: 1) устойчивый цикл (p_1, p_2) претерпевает обратную бифуркацию Андронова-Хопфа (в него “влипает” замкнутая инвариантная кривая (C_1, C_2) периода 2 седлового типа, которая, в свою очередь, отрождается от гомоклинической восьмерки седла O_μ в момент ее образования) – такие бифуркации происходят, например, в отображении Пуанкаре одной модели кельтского камня, [4],[5], а в случае потоков – в модели Лоренца, [6]; 2) устойчивый цикл (p_1, p_2) претерпевает прямую бифуркацию Андронова-Хопфа (из него рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая периода 2, которая затем сливается с инвариантной кривой (C_1, C_2) и исчезает) – такие бифуркации происходят в некоторых трехмерных отображениях Эно, [7],[1],[8], а в случае потоков – в модели Шимицу-Мориока, [9],[10].

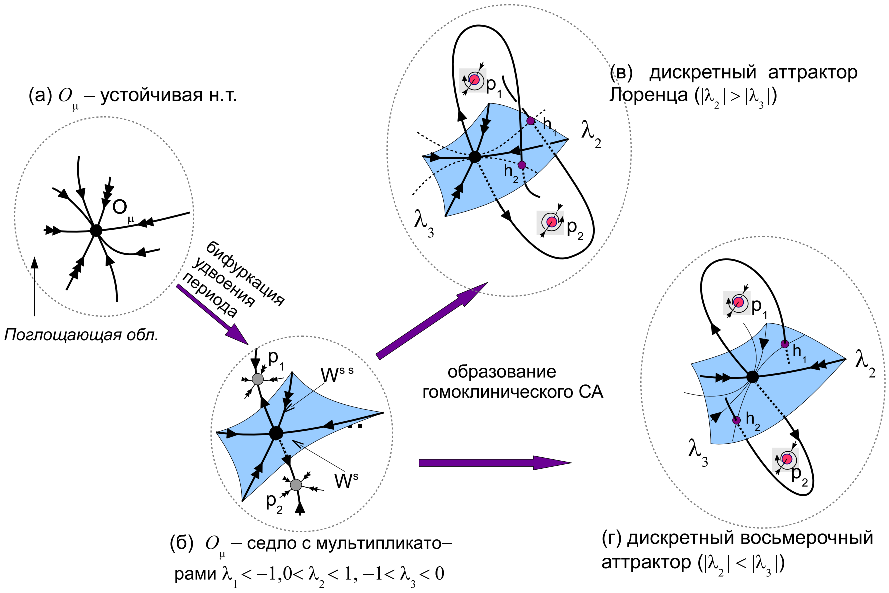


Рисунок **1.1**

Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению либо дискретного аттрактора Лоренца (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в)), либо дискретного восьмерочного аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г)). Здесь показаны точки h_1 и h_2, принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$ и $h_2 = T_\mu(h_1)$. Эти точки расположены с одной стороны от $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$ в лоренцевском случае (в) и по разные стороны от of $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$ в случае восьмерочного аттрактора (г).

Сценарий 3 возникновения дискретного аттрактора Шильникова (рис. 1.2). Этот сценарий существенно отличается от первых двух тем, что первой бифуркацией потери устойчивости точки O_μ здесь является бифуркацией Андронова-Хопфа. В результате этой бифуркации неподвижная точка становится седло-фокусом типа (1,2), т.е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а из нее рождается замкнутая инвариантная кривая L_μ, рис. 1.2(б). Соответственно предполагается, что при дальнейшем изменении μ сначала аттрактором является эта кривая L_μ, а затем она теряет устойчивость (каким способом – зависит от конкретной задачи, см., например, [2]), и формируется странный гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокус O_μ и его неустойчивое двумерное многообразие, рис. 1.2(г). При этом важным этапом в становлении аттрактора является образование т.н. "воронки Шильникова", когда кривая L_μ меняет свой тип с узлового на фокусный – тогда неустойчивое многообразие точки O_μ начинает накручиваться на L_μ, рис. 1.2(в), и в образовавшуюся воронку будут втягиваться все траектории из поглощающей области (кроме одной из устойчивых сепаратрис седло-фокуса O_μ). Заметим, что подобный сценарий возникновения спирального аттрактора у трехмерных потоков был рассмотрен еще в работе Л. П.Шильникова [13]. Поэтому возникающий в случае отображений такой аттрактор спирального типа был назван в [2] "дискретным аттрактором Шильникова".

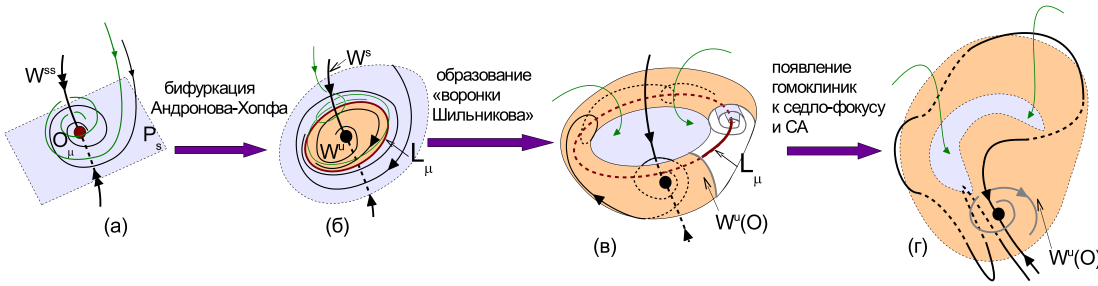


Рисунок **1.2**

Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного аттрактора Шильникова.

В случае *неориентируемых* трехмерных отображений (диффеоморфизмов), которые рассматриваются в настоящей статье, как показано, похожие сценарии также возможны. Однако, в силу неориентируемости отображений, все они имеют свою специфику – описание таких сценариев дается в § 1. Здесь мы выделяем 4 вида сценариев, приводящих к возникновению соответственно неориентируемых странных гомоклинических аттракторов, таких как дискретные аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор, спиральный аттрактор и аттрактор Шильникова. В § 2 приведены результаты численного исследования трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно различного вида, иллюстрирующих конкретных реализаций указанных в § 1 сценариев, см. рис. 7-10. Мы показываем также, что у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только это уже "двухкомпонентные" гомоклинические аттракторы, содержащие седловые точки периода 2, см. рис. 3.5, соответственно каждая компонента аттрактора инвариантна относительно T^2.

2. Описание сценариев в случае трехмерных неориентируемых отображений.

Рассмотрим однопараметрическое семейство T_μ трехмерных неориентируемых отображений. Предположим, что T_μ при $\mu_0 < \mu < \mu_1$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O_μ, т.е. мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ точки O_μ такие, что $|\lambda_i| < 1$, и поскольку T_μ неориентируемо, то $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. Пусть $\mu = \mu_1$ – это значение параметра, при котором точка O_μ теряет устойчивость, но при этом не исчезает. Тогда, в общем случае, μ_1 – это бифуркационное значение параметра, отвечающее либо бифуркации удвоения периода точки O_μ, либо (дискретной) бифуркации Андронова-Хопфа. В первом случае у точки O_μ при $\mu = \mu_1$ появляется мультипликатор -1, а во втором – пара мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$ с $0 < \varphi < \pi$. Описываемые ниже сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов, содержащих точку O_μ, предполагают также, что эта точка лежит в некоторой достаточно большой поглощающей области U.

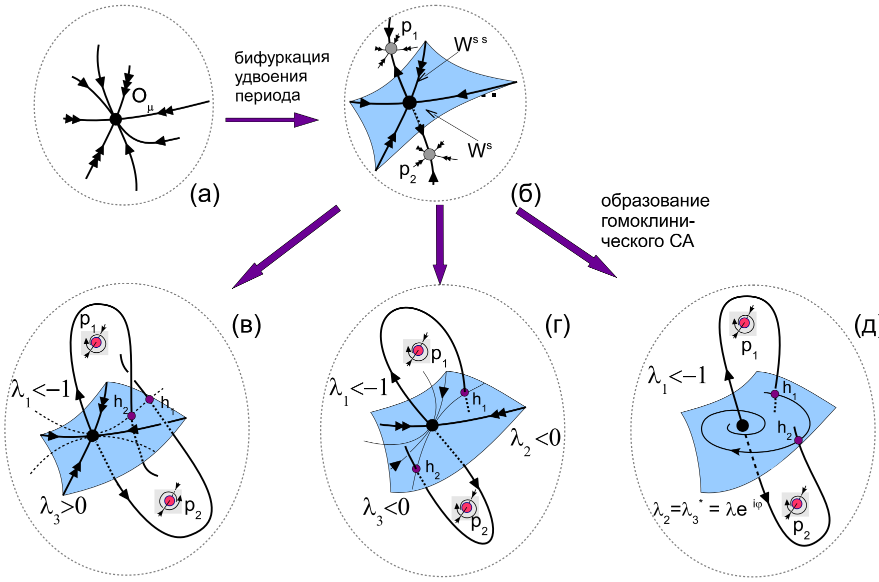


Рисунок **2.1**

Иллюстрация бифуркационных сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов: "тонкого" аттрактора Лоренца (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в)); восьмерочного аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г)); спирального аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (д)). Здесь показаны точки h_1 и h_2, принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$ и $h_2 = T_\mu(h_1)$. Эти точки расположены с одной стороны от $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$ в лоренцевском случае (в), по разные стороны от of $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$ в случае восьмерочного аттрактора (г), и гомоклинические точки лежат в $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$ на спирали, закручивающейся вокруг O_μ, в случае спирального аттрактора (д).

Первый сценарий, см. рис. 2.1 (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в)), приводит к появлению неориентируемого гомоклинического аттрактора, который мы называем "тонкий дискретный аттрактор Лоренца". Он возникает в результате цепочки: устойчивая неподвижная точка $\Rightarrow$ бифуркация удвоения периода $\Rightarrow$ образование гомоклинических пересечений многообразий седловой неподвижной точки с мультипликаторами $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$. Поскольку устойчивые мультипликаторы здесь *положительны*, то гомоклиническая точка в $W^s_{loc}(O_\mu)$ и все её образы относительно положительных итераций T_μ будут лежать в $W^s_{loc}(O_\mu)$ на одной и той же гладкой инвариантной кривой, входящей в точку O_μ (а не на разных, как в случае ориентируемого дискретного аттрактора Лоренца, ср. рис. 1.1(в) и 2.1(в) а также рис. 2.2 (а) и (г)).[4]

[4] Заметим, что в общем случае гомоклинический аттрактор можно представлять как замыкание неустойчивого многообразия точки O_μ. Поскольку неустойчивые сепаратрисы седла O_μ накапливаются сами к себе (образуя, что называется, одномерный неразложимый континуум), то их гомоклинические точки на $W^s_{loc}(O_\mu)$ будут лежать вблизи точек $h_1, h_2, ..., h_i = T^{i-1}(h_1), \ldots$. Последние же, т.к. $0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$, будут лежать на одной гладкой кривой, входящей в O_μ с одной стороны от $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$, см. рис. 2.2, – в этом случае термин "тонкий" кажется здесь вполне подходящим.

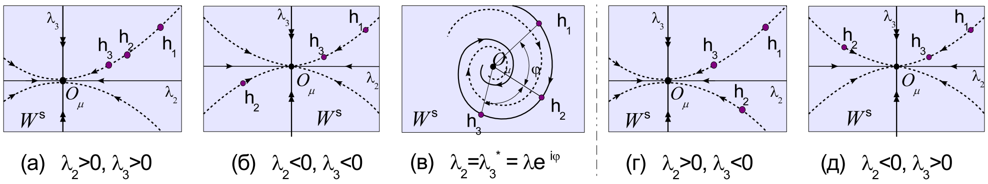


Рисунок **2.2**

Иллюстрация поведения итераций точки $h_1 \in W^{ss}_{loc}(O_\mu)$ отображения T_μ в зависимости от знаков мультипликаторов λ_2, λ_3 устойчивой (на $W^{ss}_{loc}(O_\mu)$) неподвижной точки O_μ .

Второй сценарий, образования неориентируемого дискретного восьмерочного аттрактора, см. рис. 2.1 (путь (а) ⇒ (б) ⇒ (г)), может быть реализован в тех случаях, когда все мультипликаторы точки O_μ *отрицательны*, т.е. когда $\lambda_1 < -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0$ при $\mu > \mu_1$. Возникающие здесь гомоклинические аттракторы очень похожи на те, которые имеют место в ориентируемом случае, ср. рис. 1.1(г) и 2.1(г).

Третий сценарий связан с образованием неориентируемого дискретного спирального аттрактора, см. рис. 2.1 (путь (а) ⇒ (б) ⇒ (д)). Этот сценарий можно рассматривать как промежуточный между первыми двумя сценариями (“лоренцевским” и “восьмерочным”). Здесь опять первая бифуркация потери устойчивости - это бифуркация удвоения периода точки O_μ , в результате которой она приобретает мультипликаторы $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$. То есть, точка O_μ становится седло-фокусом типа (2,1), а в её окрестности рождается устойчивая траектория периода 2. Опять в результате потери устойчивости этой траектории и других устойчивых инвариантных множеств, которые могут от неё отродиться, и последующего образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O_μ , здесь может образоваться неориентируемый дискретный спиральный аттрактор.

Этот аттрактор в какой-то степени может быть похож и на дискретный аттрактор Лоренца и на дискретный восьмерочный аттрактор. Более того, при эволюции устойчивых мультипликаторов точки O_μ они могут стать действительными одного знака. В случае, когда устойчивые мультипликаторы становятся положительными, возможен переход от спирального аттрактора к лоренцевскому, а в случае отрицательных мультипликаторов – к восьмерочному.[5]

В ряду этих новых сценариев особое место, как нам кажется, занимает (четвертый) сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Шильникова (схематическую иллюстрацию см. на рис. 2.3). Здесь, также как и в ориентируемом случае, первой бифуркацией потери устойчивости точки O_μ является бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой точка O_μ становится седло-фокусом типа (1,2) с мультипликаторами $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\psi}, -1 < \lambda_3 < 0$, где $\rho > 1$, а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ . Поначалу эта кривая является аттрактором, затем она и все ассоциированные с ней устойчивые инвариантные множества теряют устойчивость, образуется неориентируемая “воронка Шильникова” и возникает странный аттрактор, содержащий точку O_μ и ее неустойчивое инвариантное многообразие.

[5] Такие переходы мы также наблюдали в компьютерных экспериментах с трехмерными отображениями Эно.

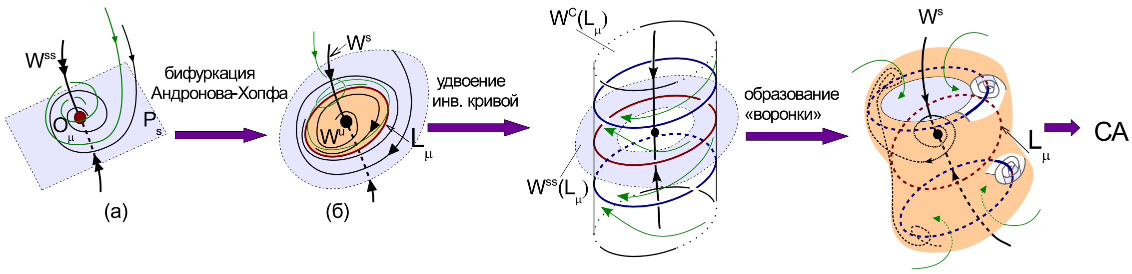


Рисунок **2.3**

Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова. Здесь в этот сценарий включен переход (б) $\rightarrow$ (в), связанный с бифуркацией удвоения кривой L_μ, см. также рис. 2.4.

Однако здесь есть принципиальные отличия от ориентируемого случая. В частности, неориентируемая “воронка Шильникова” образуется более сложным образом. После бифуркации Андронова-Хопфа точка O_μ становится седло-фокусом типа (1,2), ее неустойчивое многообразие является двумерным диском D_μ с краем L_μ. Заметим, что D_μ является частью центрального многообразия W^C_μ точки O_μ. При значениях параметра μ, близких к бифуркационному, W^C_μ – гладкая поверхность, соответственно воронки нет. Для её образования нужно, чтобы W^C_μ потеряло гладкость. В ориентируемом случае это происходило из-за “дифференцируемой бифуркации”, когда кривая L_μ меняла свой тип с узлового на фокусный [1],[2]. В неориентируемом случае этого, очевидно, не может быть, так как L_μ имеет тип “неориентируемого узла”. Однако здесь есть другие варианты такого разрушения. Один из наиболее очевидных (а главное, наблюдаемых в численных экспериментах) вариант – это когда при изменении μ кривая L_μ сначала претерпевает бифуркацию “удвоения”, в результате которой она становится седловой, а в её окрестности появляется *пара* устойчивых инвариантных кривых $\hat{L}^1_\mu$ и $\hat{L}^2_\mu$ периода 2 (таких, что $T_\mu(\hat{L}^1_\mu) = \hat{L}^2_\mu, T_\mu(\hat{L}^2_\mu) = \hat{L}^1_\mu$), переход (б) $\rightarrow$ (в) на рис. 2.3. Каждая из кривых $\hat{L}^1_\mu$ и $\hat{L}^2_\mu$ инвариантна относительно T^2_μ, поэтому с ними при изменении μ одновременно может случиться “дифференцируемая бифуркация” (кривые из узлового типа становятся фокального), в результате которой неустойчивое двумерное многообразие седла O_μ начинает навиваться на эти обе кривые, формируя уже нечто границы “двусторонней воронки”, в которую будут входить все траектории из поглощающей области, см. рис. 2.3(г). После потери устойчивости инвариантными кривыми $\hat{L}^1_\mu$ и $\hat{L}^2_\mu$ (и всеми теми устойчивыми инвариантными множествами, которые от них отрождаются) может как раз и образоваться неориентируемый дискретный аттрактор Шильникова.

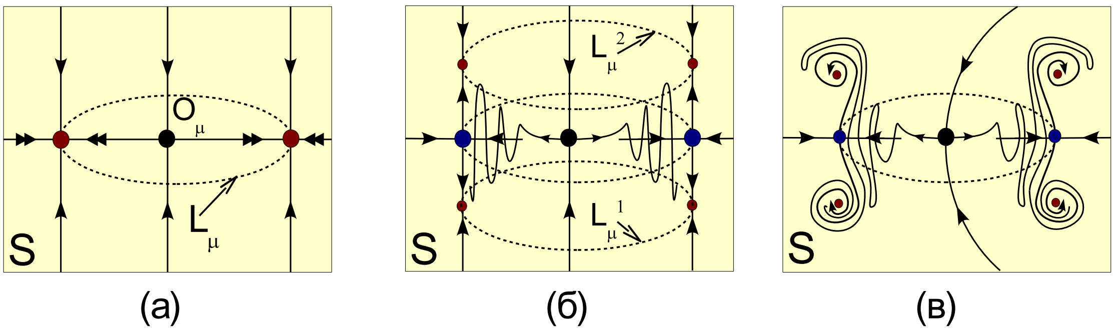


Рисунок **2.4**

Иллюстрация сценария образования неориентируемой воронки Шильникова. Здесь S – это двумерная площадка, содержащая точку O_μ и $W^s_{loc}(O_\mu)$ и пересекающая трансверсально кривую L_μ в двух точках. Площадка S пересекает трансверсально также двумерные инвариантные многообразия $W^u(O_\mu)$, $W^C(L_\mu)$ и $W^{ss}(L_\mu)$ по соответствующим кривым.

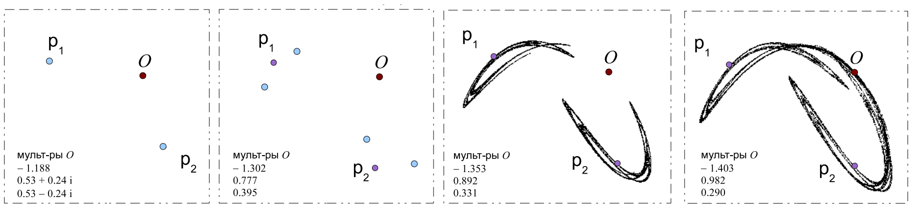
Отметим существенное отличие структуры бифуркаций удвоения инвариантных кривых в ориентируемом и неориентируемом случаях. В ориентируемом случае сама инвариантная кривая становится седловой, а в её окрестности появляется *одна* устойчивая инвариантная кривая двойной длины, обвивающая исходную кривую. В неориентируемом случае сама инвариантная кривая L_μ также становится седловой, но в ее окрестности появляются *две* устойчивые инвариантные кривые той же длины, но периода два, см. рис. 2.3(в) и и 2.4. Это связано с тем, что вблизи бифуркационного момента центральным двумерным инвариантным многообразием кривой L_μ в ориентируемом случае является лист Мёбиуса, а в неориентируемом – цилиндр. Последнее объясняется тем, что направление сильного сжатия для DT_μ, оно же ортогональное к двумерному центральному многообразию $W^C(L_\mu)$, сохраняется (на самом многообразии $W^C(L_\mu)$ вектор ортогональный кривой L_μ меняет направление на противоположное под действием DT_μ).

3. Примеры.

В этом параграфе мы рассматриваем конкретные примеры реализации рассмотренных в § 2. сценариев в случае неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z), \tag{3.1}$$

где A, B, C – коэффициенты (B – якобиан отображения (3.1)), $g(y, z)$ – функция только координат y и z, обращающаяся в нуль при $y = z = 0$ вместе с первыми производными. В этом случае отображение (3.1) всегда имеет неподвижную точку $O(0, 0, 0)$, тип которой зависит только от коэффициентов A, B, C. Например, эта точка асимптотически устойчива в области Δ_s значений A, B и C, определяемой неравенствами $C < 1 - B - A, C < A + B + 1, C > B^2 - 1 - AB$, [3]. Мы рассматриваем случай, когда отображение (3.1) неориентируемо, т.е. $B < 0$.

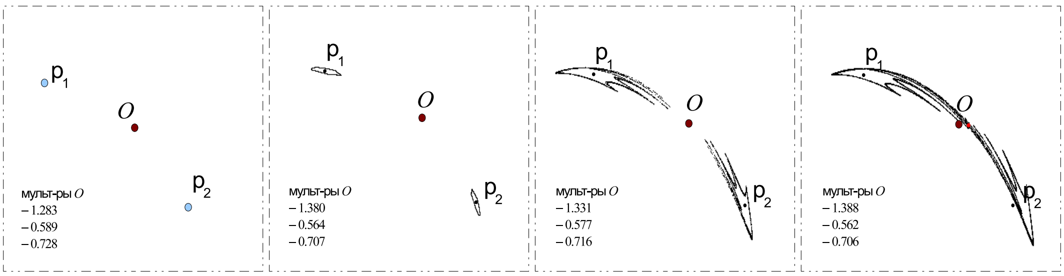


(а) C = 0.91 (б) C = 1.23 (в) C = 1.36 (г) C = 1.5

Рисунок **3.1**

Этапы возникновения неориентируемого дискретного “тонкого” аттрактора Лоренца в случае отображения (3.1) с $B = -0.4; A = -o.13; g = 1.5yz - 0.54y^3 + 0.54z^3$ при изменении C от $C = 0.9$ до $C = 1.5$.

На рис. 3.1 показаны этапы возникновения неориентируемого дискретного “тонкого” аттрактора Лоренца в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при фиксированных $B = -0.4; A = -0.13; g = 1.5yz - 0.54y^3 + 0.54z^3$, где C – параметр. Здесь точка $O(0,0,0)$ асимптотически устойчива при $-0.892 < C < 0.47$, при $C = 0.47$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама



(а) A= –2.596 (б) A= –2.651 (в) A= –2.624 (г) A= –2.655

Рисунок **3.2**

Этапы возникновения неориентируемого восьмерочного аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) с $B = -0.55; g = 1.3y^2 + 12.5yz + 2.2z^2 + 2.7z^3$ и $C = \frac{2}{3}A - 0.385$ при изменении A.

точка становится седловой (на интервале $0.47 < C < 1.53$ точка O имеет мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $\lambda_1 < -1, |\lambda_{2,3}| < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 3.1(а). В свою очередь, при изменении C цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате второй бифуркации удвоения периода, рис. 3.1(б). Эта бифуркация подсказывает [1], что здесь может возникнуть двухкомпонентный дискретный аттрактор лоренцевского или восьмерочного типа, содержащий цикл (p_1, p_2). Численный счет подтверждает это: на рис. 3.1(в) показан такой аттрактор – он содержит цикл (p_1, p_2) с мультипликаторами .... (в соответствии с [1],[3] – это двухкомпонентный квазиаттрактор, тип которого можно определить как промежуточный между лоренцевским и восьмерочным). При дальнейшем изменении C в результате образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O образуется однокомпонентный дискретный “тонкий” аттрактора Лоренца, рис. 3.1(г).

На рис. 3.2 показаны этапы возникновения неориентируемого восьмерочного аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.55; g = 1.3y^2 +$

$12.5yz + 2.2z^2 + 2.7z^3$ и $C = \frac{2}{3}A - 0.385$, где A – параметр. Здесь точка $O(0,0,0)$ асимптотически устойчива при $-2.205 < A < 1.161$, при $A = -2.823$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на всем интервале $A < -2.823$ точка O имеет мультипликаторы такие, что $\lambda_1 < -1, |\lambda_{2,3}| < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 3.2(а). При дальнейшем уменьшении A цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, после которой аттрактором

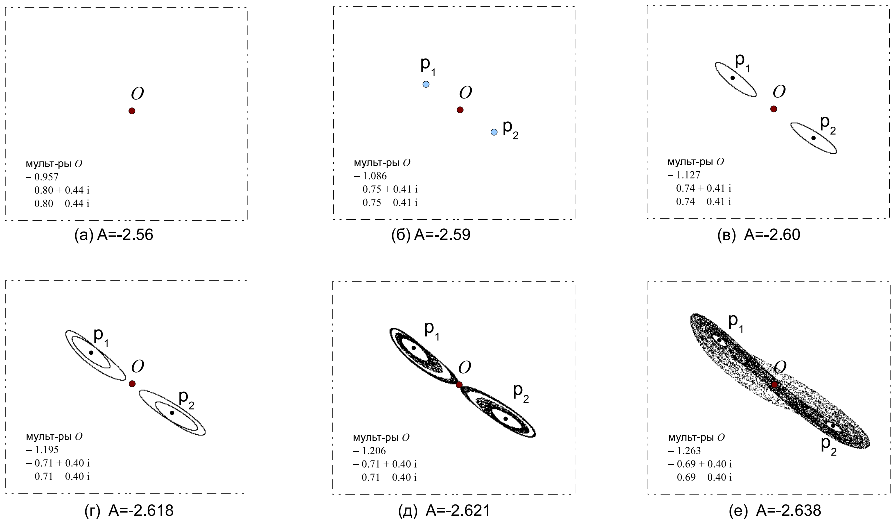


Рисунок **3.3**

Этапы возникновения неориентируемого спирального аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; C = -2.37; g(y,z) = -1.5yz - y^3 + 1.45z^3$, где A – параметр.

становится замкнутая инвариантная кривая периода 2, рис. 3.2(б); в свою очередь, эта инвариантная кривая разрушается в соответствии со сценарием Афраймовича-Шильникова [14], образуется сначала двухкомпонентный странный аттрактор типа “тор-хаос”, рис. 3.2(в), а затем и дискретный неориентируемый восьмерочный аттрактор, содержащий точку O, рис. 3.2(г).

На рис. 3.3 показаны этапы возникновения неориентируемого спирального аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; C = -2.37$; $g(y,z) = -1.5yz - y^3 + 1.45z^3$, где A – параметр. Здесь точка $O(0,0,0)$ асимптотически устойчива при $A* = -2.57 < A < -2.5125$, рис. 3.3(а); при $A = A*$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на всем интервале $A < -A*$ точка O имеет мультипликаторы такие, что $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\omega}$, где $0 < \rho < 1, 0 < \omega < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 3.3(б). При дальнейшем уменьшении A цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, после которой аттрактором становится замкнутая инвариантная кривая периода 2, рис. 3.3(в); далее с этой кривой происходит несколько бифуркаций удвоений (см. рис. 3.3(г) после первого удвоения) и возникает двухкомпонентный странный аттрактор типа “тор-хаос”, рис. 3.3(д); затем этот аттрактор трансформируется в дискретный неориентируемый спиральный аттрактор, содержащий точку O, рис. 3.3(е).

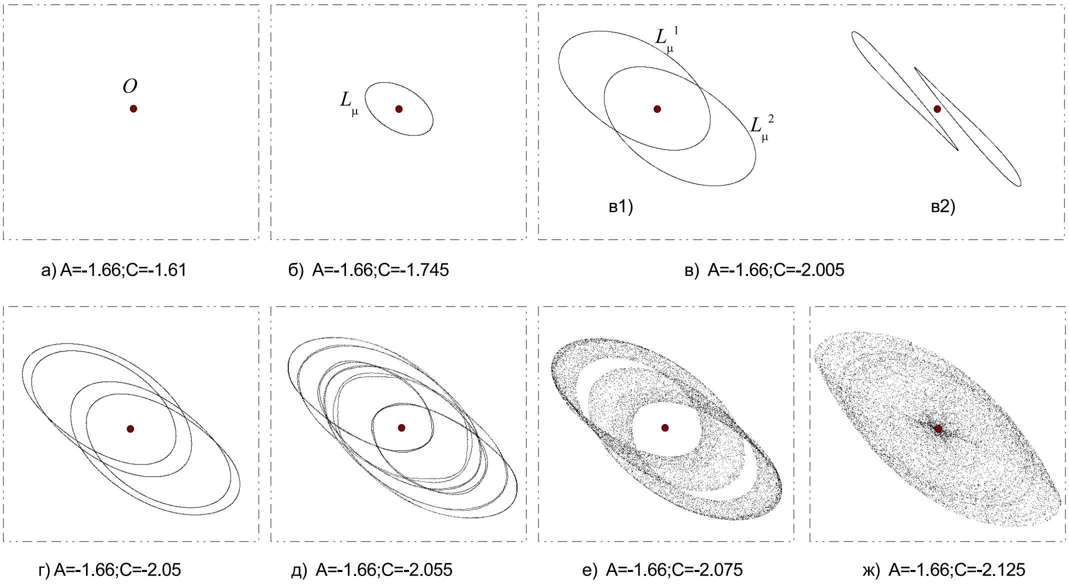


Рисунок **3.4**

Этапы возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова в в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; A = -1.66; g(y, z) = -1.5z^3 + 2.5y^3$, где C – параметр.

На рис. 3.4 показаны этапы возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; A = -1.66; g(y, z) = -1.5z^3 + 2.5y^3$, где C – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $C* = -1.688 < C < -1.46$, рис. 3.4(а) при $C < C*$ она теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа – точка O становится седло-фокусом типа (1,2), а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ, рис. 3.4(б). Эта кривая затем «удваивается» – сама кривая становится седлового типа, а в её окрестности появляются устойчивые замкнутые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ периода 2 (показаны на рис. 3.4(в) в разных ракурсах в1) и в2)), которые затем претерпевают несколько бифуркаций удвоения (рис. 3.4(г)–(д)), трансформируются в «тор-хаос», рис. 3.4(е); в конце концов возникает дискретный неориентируемый аттрактор Шильникова, содержащий точку O.

Заметим также, что у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же странные гомоклинические аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только с точками периода два (или четного периода). Такие аттракторы состоят из двух компонент, каждая из которых содержит точку цикла периода 2. Кроме того, каждая компонента аттрактора инвариантна относительно T^2. Примеры дискретных (ориентируемых) периода 2 аттракторов Лоренца, Шильникова и восьмерочного в случае отображения

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = Bx + Cy + Az - z^2 \tag{3.2}$$

показаны на рис. 3.5 (а), (б) и (в) соответственно.

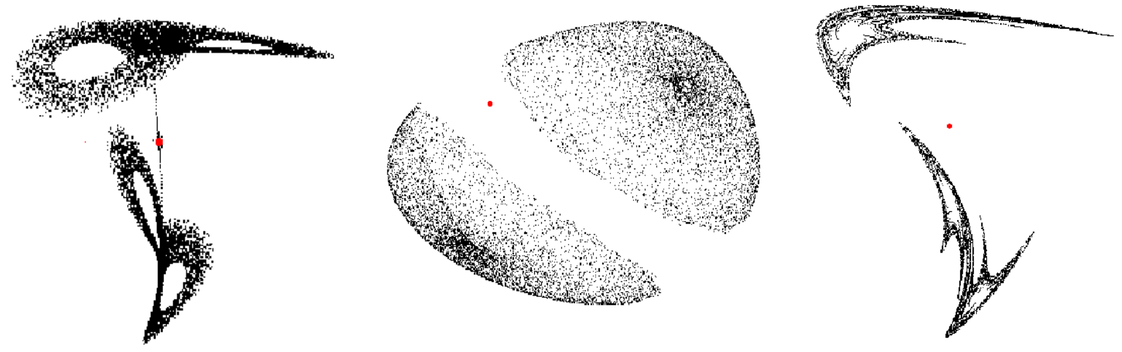


Рисунок **3.5**
Примеры дискретных ориентируемых периода 2 странных аттракторов:
(а) аттрактор Лоренца; (б) аттрактор Шильникова и (в) восьмерочный аттрактор.

Авторы благодарят Гонченко С.В. за весьма полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РНФ No. 14-41-00044 и РФФИ No. 16-01-00324. А. Гонченко также работал над статьей в рамках базовой части финансовой программы Министерства Образования и Науки РФ.

Дата поступления 30.11.2016

Список литературы

1. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П., “К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений”, *Нелинейная Динамика*, **8**:1 (2012), 3–28.

2. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D., “Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”, *Int. J. Bif. and Chaos*, **24(8)** (2014), 25 с.

3. Gonchenko A., Gonchenko S., “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *to appear in Physica D (or arXiv:1510.02252v2 [math.DS] for this version.*

4. S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, A.O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **15**:5 (2013), 521–538.

5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, “Lorenz-like attractors in a nonholonomic model of a rattleback”, *Nonlinearity*, **28** (2015), 3403–3417.

6. Л.П. Шильников, *Теория бифуркаций и модель Лоренца // Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена «Бифуркация рождения цикла и ее приложения.»*, Мир, М., 1980, 19 с.

7. S.Gonchenko, I.Ovsyannikov, C.Simo, D.Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. of Bifurcation and chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.

8. S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, D.V. Turaev, "Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps", *Math. Model. Nat. Phenom.*, **8**:5 (2013), 32–54.

9. А.Л. Шильников, "Бифуркации и хаос в системе Мориока-Шимицу", *Методы КТДУ*, Горький, 1986, 180–183.

10. A.L. Shilnikov, "On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimuizu-Morioka model", *Physica D*, **62** (1993), 338–346.

11. Lorenz E. N., "Deterministic nonperiodic flow", *J. of the Atmospheric Sciences*, **20** (1963), 130–141.

12. Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A., "Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight", *Nonlinearity*, **26** (2013), 621–678.

13. Шильников Л.П., "Теория бифуркаций и турбулентность - I", *Межвузовский сб. Методы КТДУ*, Горький, 1986, 150–163.

14. В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, "Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность", *Межвузовский сб. Методы КТДУ*, Горький, 1983, 3–26.

On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonoriented maps

© **A. S. Gonchenko**[6], **A. D. Kozlov**[7]

Abstract. For one-parameter families of three-dimensional nonorientable maps we study scenarios of appearance of strange homoclinic attractors (containing only one fixed point). We describe 4 different scenarios leading to discrete homoclinic nonorientable attractors: correspondingly, of Lorenz and figure-eight types (containing a saddle fixed point), and spiral attractors of two types (containing a saddle-focus fixed point). Some examples of realization of these scenarios in the case of three-dimensional nonorientable generalized Henon maps are given.

Key Words: strange attractor, Lorenz attractor, spiral attractor, homoclinic orbit, invariant curve, three-dimensional generalized Henon map

[6] Researcher at Research Institute of Supercomputing Technologies, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; agonchenko@mail.ru

[7] Laboratory assistant at Institute of Supercomputing Technologies, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; kozzzloff@list.ru