УДК 517.987

Локальные гомеоморфизмы стоуновского компакта и локальная обратимость измеримых отображений

© П. М. Симонов [1], А. В. Чистяков [2]

Аннотация. Доказано утверждение о том, что открытое непрерывное отображение экстремально несвязного хаусдорфового компакта счетного типа в топологическое пространство, компоненты связности которого не являются множествами первой категории по Бэру, является локальным гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда это отображение переводит все множества первой категории за исключением, быть может, подмножеств одного замкнутого нигде не плотного множества, в множества первой категории. Полученный результат используется для характеризации локальной обратимости измеримых отображений стандартных пространств с мерами. В частности, выясняется, что известное N-условие Лузина не только гарантирует измеримость образа при измеримом отображении, но и фактически является критерием локальной обратимости.

Ключевые слова: экстремально несвязный компакт, открыто-замкнутые множества, множество первой категории по Бэру, локальный гомеоморфизм, N-условие Лузина, стоуновский компакт, свойство антиинъективности

1. Введение

Вполне несвязные и, в частности, экстремально несвязные компактные пространства занимают особое место в иерархии топологических пространств ввиду глубоко нетривиальных связей с формальными алгебраическими структурами. Именно к этому классу пространств относятся канонические представления пространства максимальных идеалов булевых алгебр (М. Стоун, 1936) и пространства максимальных идеалов коммутативных банаховых алгебр (И.М. Гельфанд, 1939). В каноническом представлении абстрактная булева алгебра становится алгеброй открыто-замкнутых множеств компакта Стоуна, а абстрактная коммутативная банахова алгебра реализуется в виде алгебры непрерывных функций на компакте Гельфанда. Использование канонических реализаций оказалось чрезвычайно плодотворным подходом к решению сложнейших алгебраических и теоретико-множественных проблем. Эффективность такого подхода вполне объяснима: дискретное, сильно разрывное множество максимальных идеалов наделяется богатой дополнительной структурой непрерывности, что позволяет использовать для решения алгебраических проблем мощные аналитические и топологические методы. Естественно, для того, чтобы достичь такой непрерывности, необходимо необозримое множество точек (сходная ситуация возникает и в построенной в 1937 г. Э. Чехом и М. Стоуном теории компактных расширений вполне регулярных пространств). Фактически, в наиболее интересных случаях компакты Стоуна и Гельфанда столь велики, что мы не можем построить ни единой из их точек. Тем не менее, эти пространства полезны при изучении не только алгебраических, но и чисто аналитических проблем. Неоценимо и эвристическое значение необычной топологии экстремально несвязных пространств для понимания трудностей, возникающих в таких теориях как теория меры и связанные с ней разделы функционального анализа.

[1] Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpm@mail.ru

[2] Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Из теоремы М. Стоуна о представлении булевых алгебр следует, что каждое утверждение теории меры, в котором фигурирует только идеал множеств нулевой меры, имеет «топологическую» версию. Правила перевода здесь — следствие согласованности категории и индуцированной на стоуновском компакте меры: подмножество стоуновского компакта полной булевой алгебры с конечной мерой имеет меру нуль в том и только в том случае, если оно является множеством первой категории. В этой статье топологические аналогии используются для характеризации локальной обратимости измеримых отображений стандартных пространств с мерами. Оказывается, что для локальной обратимости измеримого отображения необходимо и достаточно, чтобы, поднятое на стоуновский компакт, оно переводило тощие множества (первой категории) в тощие множества. Этот факт заставляет по-новому понять известное условие Лузина: оно не только гарантирует измеримость образа при измеримом отображении, но и является необходимым и достаточным условием локальной обратимости.

Следует также сказать о том, что ни прямой, ни обратный перевод не является автоматическим. Она из существенных причин здесь заключается в том, что топологические утверждения существенно зависят от несчетных форм аксиомы выбора. В «прямых» доказательствах метрических фактов часто удается ограничиться более слабыми формами этой аксиомы, вплоть до счетной. В любом случае «обратный спуск» со стоуновского компакта на исходное пространство с мерой часто представляет значительные трудности (и не всегда возможен).

В основной теореме (в теореме 2) этой статьи утверждается, что непрерывное открытое отображение хаусдорфова экстремально несвязного пространства в хаусдорфово пространство, не имеющего компонент связности первой категории по Бэру и переводящее множества первой категории во множества первой категории, является локальным гомеоморфизмом. Обратное к теореме утверждение достаточно очевидно. Следовательно, теорема дает критерий локального гомеоморфизма экстремально несвязного компакта. Согласно теоремам М. Стоуна и И.М. Гельфанда экстремально несвязными компактами являются канонические реализации пространства максимальных идеалов полных булевых алгебр и некоторых важных классов коммутативных банаховых алгебр (таких, например, как алгебра $L^\infty(X,\mu)$ ограниченных μ-измеримых функций на пространстве X с полной мерой μ). Поэтому можно предположить, что сформулированный критерий окажется полезным при исследовании ряда вопросов, относящихся к теории булевых алгебр, теории банаховых алгебр и теории меры. Фактически доказанные здесь теоремы об отображениях экстремально несвязных компактов представляют собой топологическую версию утверждений, обнаруженных при изучении локальной обратимости измеримых отображений стандартных пространств с мерами.

В статье [8] показано, что в классе измеримых отображений стандартных вероятностных пространств, индуцирующих гомоморфизмы полной булевой алгебры измеримых множеств, свойство кусочно-инъективности фактически эквивалентно свойству N Лузина: мера образа любого множества нулевой меры равна нулю.

Стандартным пространством с мерой (или, по терминологии, введенной В.А. Рохлиным [5][c. 117], пространством Лебега) называется пространство с конечной мерой, метрически изоморфное полному сепарабельному метрическому пространству с борелевской мерой [5][c. 121], [2][c. 435], [6][c. 140]. Измеримое отображение $\alpha : X \to Y$ стандартного пространства X с мерой μ в стандартное пространство Y с мерой ν мы называем локально обратимым, если для любого измеримого множества $A \subset X$ с $\mu(A) > 0$ найдется измеримое подмножество $B \subset A$ такое, что $\mu(B) > 0$, множество $C := \alpha(B)$ измеримо и ограничение $\alpha_{|B} : B \to C$ является изоморфизмом по модулю множеств меры нуль (вообще говоря, не сохраняющем меру) измеримой структуры пространств (B, μ_B)

и (C, ν_C) [5][с. 113]. Согласно принципу исчерпывания [6][с. 67], [3][с. 111] локальная обратимость измеримого отображения $\alpha : X \to Y$ эквивалентна существованию не более чем счетного разбиения $X = \sqcup X_i$ пространства X_i на измеримые компоненты X_i, удовлетворяющие условиям: $\mu(X_0) = 0$; при $i > 0$ множество $Y_i := \alpha(X_i)$ измеримо, ограничение $\alpha_{X_i} : X_i \to Y_i$ обратимо и индуцирует σ-изоморфизм σ-алгебр измеримых подмножеств пространств X_i и Y_i.

Нетрудно убедиться в том, что локально обратимое измеримое $\alpha : X \to Y$ отображение удовлетворяет двум условиям:

1) для всех множеств $C \subset Y$ меры нуль мера прообраза $\alpha^{-1}(C)$ равна нулю;

2) существует подмножество $\tilde{X}$ пространства X полной меры такое, что для всех множеств $A \subset \tilde{X}$ меры нуль мера образа $\alpha(A)$ равна нулю.

Первое условие, называемое условием согласования, означает, что поточечное отображение α по правилу $\alpha^* : [C] \to \alpha^{-1}(C)$ (C — измеримое подмножество пространства Y) корректно порождает σ-гомоморфизм классов эквивалентности $[\cdot]$ измеримых множеств. Ясно, что условие согласования является инвариантом класса эквивалентности измеримых отображений и потому эквивалентные по модулю нуль отображения $\alpha : X \to Y$ индуцируют эквивалентные измеримые разбиения $\{\alpha^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ пространства X на прообразы точек. Более того, имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных $\bmod 0$ измеримых отображений пространства X в сепарабельное метрическое пространство Y, классами равных $\bmod 0$ измеримых разбиений пространства X и классами μ-эквивалентных σ-подалгебр алгебры измеримых подмножеств X (или, что эквивалентно, замкнутых подалгебр коммутативной банаховой алгебры $L^\infty(X, \mu)$).

Второе условие известно как **свойство** (N) **Н.Н. Лузина** [4][с. 231], доказавшего, что оно является критерием измеримости образа измеримого множества при измеримом отображении стандартных пространств с мерами. Эта теорема Лузина почти не встречается в монографиях по теории меры. В связи с этим приведем ее формулировку и доказательство.

Теорема 0. *Пусть $\alpha : X \to Y$ — измеримое отображение стандартных пространств с мерами. Для того, чтобы образ любого измеримого множества $A \subset X$ представлял собою измеримое множество, необходимо и достаточно, чтобы отображение обладало свойством:*

$$\text{если } \mu(A) = 0, \text{ то } \nu(\alpha(A)) = 0. \tag{N}$$

Доказательство. 1) Пусть существует множество A с $\mu(A) > 0$ такое, что $\nu^*(\alpha(A)) > 0$ (здесь ν^* — внешняя мера, порожденная мерой ν). По теореме 2.2.4 [7][с. 73] в $\alpha(A)$ имеется ν-неизмеримое подмножество C. Множество $\tilde{A} := \alpha^{-1}(C) \cap A$ имеет меру нуль и потому измеримо. Но $\alpha(\tilde{A}) = C$ — неизмеримое множество. Полученное противоречие свидетельствует о необходимости условия (N).

2) Согласно известной теореме Лузина [7][с. 89] найдется последовательность компактных подмножеств $X_n \subset X$ такая, что $X_n \subset X_{n+1}$ при всех $n = 1, \ldots$, сужение $\alpha_{X_n} : X_n \to Y$ непрерывно, а $\mu(X_0) = 0$, где $X_0 := X \setminus \cup_{n \geq 1} X_n$. Каждое измеримое множество $A \subset X$ можно представить в виде $A = A_1 \cup A_0$, где A_1 — борелевское множество типа F_σ, A_0 — множество нулевой меры. Вследствие непрерывности отображения α_{X_n} множество $\alpha(A_1 \cap X_n)$ есть множество типа F_σ. Поскольку α обладает свойством (N), то $\nu(\alpha(A_0)) = 0$ и $\nu(\alpha(A_1 \cap X_0)) = 0$. Измеримость множества очевидна ввиду равенств $\alpha(A) = \alpha(A_1 \cup A_0) = \alpha((\cup_{n \geq 0} A_1 \cap X_n) \cup A_0) = \alpha(\cup_{n \geq 1}(A_1 \cap X_n)) \cup \alpha(A_1 \cap X_0) \cup \alpha(A_0)$.

2. Почти локальные гомеоморфизмы стоуновского компакта

Топологическое пространство X называется экстремально несвязным [11][с. 540], если *для каждого открытого множества* $U \subset X$ *замыкание* $\overline{U}$ *открыто в* X.

Если X — хаусдорфов экстремально несвязный компакт, то семейство $\mathcal{U}_{oc}(X)$ всех открыто-замкнутых подмножеств составляет базу топологии пространства X. Среди необычных свойств экстремально несвязных пространств отметим следующие: непересекающиеся открытые множества обладают непересекающимися замыканиями; любое множество, состоящее более чем из двух точек, несвязно; не существует сходящихся последовательностей, состоящих из бесконечного числа (различных) точек. Мы будем предполагать, что X — экстремально несвязный компакт счетного типа. Счетность типа означает, что *любое семейство непустых попарно дизъюнктных открытых множеств не более чем счетно.*

Топологическое пространство Y назовем слабым пространством Бэра, если *любое непустое открыто-замкнутое подмножество* $V \subset Y$ *(компонента связности) не является множеством первой категории по Бэру.*

Напомним, что подмножество A топологического пространства X называется множеством первой категории по Бэру, если A *является объединением не более чем счетного семейства нигде не плотных в* X *множеств.* Множество всех подмножеств первой категории в X является σ-идеалом булевой алгебры 2^X всех подмножеств $A \subset X$, который мы обозначим через $\mathcal{J}(X)$.

Ниже запись $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ означает, что $X_n \subset X_{n+1}$ и $(X \setminus \cup_n X_n) \in \mathcal{J}(X)$. Соответственно, $X_n \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(X)}$, если $X \setminus X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha : X \to Y$ *— непрерывное открытое отображение экстремально несвязного хаусдорфова компакта* X *счетного типа в слабое пространство Бэра* Y. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) существуют не более чем счетное семейство открыто-замкнутых подмножеств $(Y_i \subset Y)_{i\in I}$ *и семейство непрерывных отображений* $(\beta_i : Y_i \to X)_{i\in I}$ *такие, что:*

a) множество $\tilde{X} := \bigcup\limits_{i\in I} \beta_i(Y_i)$ *открыто и всюду плотно;*

b) $\beta_i(y) \neq \beta_j(y)$ *при* $i \neq j$ *для всех* $y \in Y_i \cap Y_j$; *c)* $\alpha^{-1}(y) \cap \tilde{X} = \{\beta_i(y)\}_{i:y\in Y_i}$ *для всех* $y \in Y$;

2) существует не более чем счетный набор попарно дизъюнктных открыто-замкнутых множеств $(X_i \subset X)_{i\in I}$ *такой, что:*

a) множество $\tilde{X} := \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ *открыто и всюду плотно;*

b) сужение $\alpha_{|X_i} : X_i \to Y$ *инъективно для всех* $i \in I$;

3) существует, последовательность открыто-замкнутых множеств $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ *такая, что при любом* n *множество* $\alpha^{-1}(y) \cap X_n$ *содержит не более чем* n *точек;*

4) существует последовательность открыто-замкнутых подмножеств $X_n \subset X$ *такая, что* $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ *и при каждом* n *сужение* $\alpha_n := \alpha_{|X_n} : X_n \to Y$ *обладает свойством: если* $A_k \searrow \emptyset \pmod{(\mathcal{J}(X))}$, *то* $\alpha_n(A_k) \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(Y)}$;

5) существует открытое всюду плотное множество $\tilde{X} \subset X$ *такое, что сужение* $\tilde{\alpha} := \alpha|\tilde{X} : \tilde{X} \to Y$ *удовлетворяет условию: для всех* $A \in \mathcal{J}(X) \cap \tilde{X}$ *имеем* $\tilde{\alpha}(A) \in \mathcal{J}(Y)$.

В доказательстве теоремы используется следующий аналог известной в теории меры леммы об исчерпывании [3][с. 111], [6][с. 67].

Лемма 1. *Пусть семейство* $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{U}_{oc}(X)$ *удовлетворяет условию: для любого* $U \in \mathcal{U}_{oc}(X)$ *найдется множество* $P \in \mathcal{P}(X)$ *такое, что* $P \subset U$.

Тогда найдется не более чем счетное семейство попарно дизъюнктных множеств $(\tilde{X}_i \in \mathcal{P}(X))_{i\in I}$ *такое, что множество* $\tilde{X} := \bigcup_{i\in I} \tilde{X}_i$ *открыто и всюду плотно.*

Доказательство. Искомое семейство будем строить с помощью трансфинитной индукции [11][с. 25]. Начнем построение, полагая $i := 1$, $X_i := X$.

A) Из условия леммы следует, что $\mathcal{P}_i := \{U \in \mathcal{P}(X) : U \subset X_i\} \neq \emptyset$. Поэтому выберем некоторое множество $\tilde{X}_i \in \mathcal{P}(X)_i$. Положим $X_{i+1} := X_i \setminus \tilde{X}_i$. Если $X_{i+1} = \emptyset$, то исчерпывающее компакт X семейство $(\tilde{X}_i)$ уже найдено. Если $X_{i+1} \neq \emptyset$, то $X_{i+1} \in \mathcal{U}_{oc}(X)$, так как $\tilde{X}_i \in \mathcal{U}_{oc}(X)$. Следовательно, заменяя i на $i+1$ и возвращаясь в A), мы можем повторить процедуру выбора.

B) В результате итераций A) мы либо за конечное число шагов построим исчерпывающий X набор $(\tilde{X}_i)$, либо получим (бесконечную) последовательность попарно дизъюнктных множеств $\tilde{X}_j \in \mathcal{P}(X)$ $(j = 1, 2, \dots)$ и соответствующую ей убывающую последовательность множеств $(X_j) \in \mathcal{U}_{oc}(X)$. Во втором случае мы полагаем $i := \aleph$ и $X_i := X \setminus \overline{\bigcup_{j<i} X_j}$, где $\aleph$ — первый бесконечный кардинал. Так как компакт X экстремально несвязен, то замыкания открытых множеств открыты. Поэтому множество X_i открыто-замкнуто. Если $X_i \in \mathcal{J}(X)$, то $X_i = \emptyset$ и лемма доказана. В противном случае возвращаемся к процедуре выбора, описанной в A. Аналогичным образом мы поступаем и при достижении второго $i := \aleph + \aleph$ и последующих предельных ординалов. Так как любое дизъюнктное семейство непустых открытых множеств не более чем счетно, то процесс выбора множеств оборвется на некотором конечном или счетном ординале.

Доказательство теоремы начнем с самого существенного шага: $\boxed{5) \Rightarrow 1)}$. Обозначим через $\mathcal{P} := \mathcal{P}(X)$ множество всех $P \in \mathcal{U}_{oc}(X)$ таких, что сужение $\alpha_{|P} : P \to Y$ инъективно. Проверим, что семейство $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Множество открыто $\tilde{X}$ и всюду плотно, а семейство $\mathcal{U}_{oc}(X)$ является базой топологии пространства X. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $U \subset \tilde{X}$ $(U \in \mathcal{U}_{oc}(X))$. Так как отображение α непрерывно и открыто, то $B := \alpha(U)$ — непустое открыто-замкнутое подмножество пространства Y. Следовательно, сужение $\alpha_U := \alpha_{|U} : U \to B$ — непрерывное открытое отображение U на B, причем $\alpha_U(\mathcal{J}(U)) \subset \mathcal{J}(B)$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех замкнутых подмножеств A компакта $U \subset X$ таких, что $\alpha_U(A) = B$. Упорядочим множества из $\mathcal{A}$ по включению: $A_2 \preceq A_1$, если $A_2 \subset A_1$. Поскольку множество U компактно, то пересечение элементов любой цепи $(A_i)_{i\in I}$ непусто: $A := \bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Кроме того, из компактности U также следует [1][Предл. 1, с. 505], что

$$\alpha_U(A) = \alpha(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i) = B. \tag{1}$$

Таким образом, любая цепь в $\mathcal{A}$ имеет наименьший элемент. Согласно лемме Цорна множество $\mathcal{A}$ содержит минимальный элемент A.

Предположим, что $\operatorname{int} A = \emptyset$. Тогда $A \in \mathcal{J}(U)$. Из включений (1) следует, что $B = \alpha_U(U) \in \mathcal{J}(Y)$. Но множество B непусто и открыто-замкнуто, а пространство Y — слабое пространство Бэра. Поэтому, если $B \neq \emptyset$, то $B \notin \mathcal{J}(Y)$. Следовательно, принятое предположение приводит к противоречию.

Значит, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ и мы можем положить $P := \operatorname{int} A$. Проверим, что $P \in \mathcal{P}$, т.е. сужение $\alpha_{|P}$ инъективно. Если это не так, то $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ для двух различных точек $x_1, x_2 \in P$. Отделим точки x_1 и x_2 непересекающимися открыто-замкнутыми окрестностями U_1 и U_2, лежащими в P. Так как отображение α непрерывно и открыто, то множество $V := \alpha(U_1) \cap \alpha(U_2)$ открыто-замкнуто в Y. Обозначим: $A_1 := \alpha^{-1}(V) \cap U_2$ и

$\tilde{A} := A \setminus A_1$, Ясно, что множество A_1 непусто и открыто-замкнуто. Поэтому множество $\tilde{A}$ замкнуто, $\tilde{A} \subset A$ и $\tilde{A} \neq A$. Из включения

$$\alpha(\alpha^{-1}(V) \cap U_1) \supset V \cap \alpha(U_1) = V$$

следует $\alpha(\tilde{A}) = \alpha(A) = B$. Действительно, если $y \in V$, то найдется $x \in \alpha^{-1}(V) \cap U_1 \subset \tilde{A}$. Если же $y \notin V$, то найдется $x \in [(\alpha^{-1}(B) \cap A) \setminus \alpha^{-1}(V)] \subset \tilde{A}$. Отсюда заключаем, что $\tilde{A} \in \mathcal{A}$. Так как A — минимальный элемент семейства $\mathcal{A}$, то возникает противоречие.

Таким образом, система $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию леммы 1. По этой лемме найдется не более чем счетное семейство $(X_i \in \mathcal{P})_{i \in I}$ такое, что множество $\tilde{X} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$ открыто и всюду плотно. Положим $Y_i := \alpha(X_i)$ и $\alpha_i := \alpha_{|X_i} : X_i \to Y_i \quad (i \in I)$. При каждом i отображение α_i непрерывно, открыто и биективно. Это означает, что α_i является гомеоморфизмом. Следовательно, обратное отображение $\beta_i := \alpha_i^{-1} : Y_i \to X_i$ непрерывно и открыто. Так как $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\beta_i(y) \neq \beta_j(y)$ для всех $y \in Y_i \cap Y_j$. И, наконец, по построению

$$\alpha^{-1}(y) \cap \tilde{X} = \{\beta_i(y)\}_{i: y \in Y_i}$$

для всех $y \in Y$.

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$. Положим $X_i := \beta_i(Y_i)$ $(i \in I)$.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$. Положим $X_n := \bigcup_{i \leq n} \tilde{X}_i$.

$\boxed{4) \Rightarrow 5)}$. Положим $\tilde{X} := \bigcup_{n \geq 1} \tilde{X}_n$. Пусть $A \in \mathcal{J}(X) \cap \tilde{X}$. Последовательность $A_n := A \cap \tilde{X}_n$ $(n = 1, 2. \dots)$ состоит из элементов σ-идеала $\mathcal{J}(X)$. Из утверждения 4) следует, что $\alpha(A_n) \in \mathcal{J}(Y)$ для всех $n = 1, \dots$. Так как $\alpha(A_n) \searrow \alpha(A)$ и $\mathcal{J}(Y)$ — σ-идеал, то $\alpha(A) \in \mathcal{J}(Y)$.

$\boxed{3) \Rightarrow 4)}$. Для последовательности $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ при каждом n и $y \in Y$ имеем:

$$\alpha^{-1}(y) \cap X_n = \{x_i : i = 1, \dots, m(y)\}, \, m(y) \leq n.$$

Обозначим: $m_1 = \max_y m(y)$ и $Y_1 := \{y \in Y : m(y) = m_1\}$. Пусть $\bar{y} \in Y_1$. Тогда $\alpha^{-1}(\bar{y}) \cap X_n = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_1}\}$. Отделим точки $\bar{x}_i$ $(i = 1, \dots, m_1)$ открыто-замкнутыми окрестностями $U_1, \dots, U_{m_1}$ так, чтобы $\bar{x}_i \in U_i$. Множество $V_{\bar{y}} := \bigcap_{i=1}^{m_1} (\alpha(U_i))$ непусто, так как $\bar{y} \in V_{\bar{y}}$. Проверим, что сужение $\alpha_{|\alpha^{-1}(V_{\bar{y}}) \cap U_i}$ инъективно для всех $i = 1, \dots, m_1$. Пусть для определенности $i = 1$. Предположим, что найдутся две точки $x_1^{(1)}, x_1^{(2)} \in U_1$ для которых $\alpha(x_1^{(1)}) = \alpha(x_1^{(2)}) = y$. Но тогда, поскольку при $i \neq 1$ найдется точка $x_i \in U_i$, для которой $\alpha(x_i) = y$, множество $\alpha^{-1}(y)$ должно содержать по крайней мере $m_1 + 1$ точку. Ясно, что это невозможно. Поэтому $V_{\bar{y}} \subset Y_1$. Множество $V_{\bar{y}}$ — открыто-замкнутая окрестность точки $\bar{y} \in Y_1$. Отсюда следует, что множество Y_1 есть открытое подмножество пространства Y. Положим $X_{n_1} := \alpha^{-1}(Y_1) \cap X_n$. Отметим особо, что, как выше показано, у каждой точки $x \in X_{n_1}$ существует открыто-замкнутая окрестность $U = \alpha^{-1}(V_{\bar{y}}) \cap U_i$ с инъективным сужением $\alpha_{|U}$. Положим $m_2 = \max\{m(y) : y \in Y \setminus Y_1\}$ и, повторяя процесс, найдем множество X_{n_2} с тем же свойством. Продолжение этого процесса станет невозможным лишь тогда, когда будут исчерпаны все точки множества X_n. Таким образом доказано что любая точка $x \in X_n$ обладает открыто-замкнутой окрестностью U_x с инъективным сужением $\alpha_{|U_x}$. Выберем из покрытия $\{U_x\}_{x \in X_n}$ конечное подпокрытие $\{X_{ni} := U_{x_i} : i = 1, \dots, k\}$.

Сужение $\alpha_{ni} := \alpha_{|X_{ni}} : X_{ni} \to \alpha X_{ni}$ является биекцией. Так как отображение α_{ni} открыто, то оно является гомеоморфизмом и потому переводит $\mathcal{J}(X_{ni})$ на $\mathcal{J}(\alpha(X_{ni}))$.

Отсюда имеем
$$\alpha(\mathcal{J}(X_n)) = \cup_i(\alpha\mathcal{J}(X_{ni})) \subset \mathcal{J}(Y).$$
Если $A_k \in \mathcal{U}_{oc}(X_n)$ и $A_k \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(X_n)}$, то, вследствие компактности A_k, $\alpha(A_k) \searrow \alpha(A)$, где $A := \cap_k A_k \in \mathcal{J}(X_n)$. Так как $\alpha(\mathcal{J}(X_n)) \subset \mathcal{J}(Y)$, то $\alpha(A) \in \mathcal{J}(Y)$. Следовательно, $\alpha(A_k) \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(Y)}$.

3. Локальная обратимость измеримых отображений

Согласно теореме о представлении полная булева σ-алгебра $\mathcal{A}$ имеет каноническую реализацию в виде фактор-алгебры $\mathcal{B}/\mathcal{I}$, где $\mathcal{B}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая поле $\mathcal{B}_{oc}$ открыто-замкнутых множеств экстремально несвязного пространства $\mathcal{X}$ (пространства Стоуна этой алгебры), $\mathcal{I}$ — идеал множеств первой категории в $\mathcal{X}$. Поэтому вполне естественно использовать теорему 1 для изучения свойств σ-гомоморфизмов полных булевых алгебр. Одним из наиболее важных примеров таких алгебр являются σ-алгебры с полной конечной мерой. Они имеют счетный тип и потому их пространство Стоуна тоже счетного типа. Мы применим теорему 1 для изучения σ-гомоморфизмов так называемых стандартных пространств с мерой (полных сепарабельных метрических пространств и их борелевских подмножеств с борелевской алгеброй и определенной на ней борелевской мерой). Приведем предварительно некоторые следствия из теоремы о представлении σ-алгебр.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, Σ_0 — идеал множеств меры нуль. По теореме о представлении фактор-алгебра $\mathcal{A} := \Sigma/\Sigma_0$ изоморфна фактор-алгебре $\hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ алгебры $\hat{\Sigma}$, порожденной полем $\hat{\Sigma}_{oc}$ открыто-замкнутых множеств стоуновского компакта $\hat{X}$ по идеалу $\hat{\Sigma}_0$ множеств первой категории. Здесь уместно заметить, что $\mathcal{A}$ регулярна и потому каждое множество первой категории в $\hat{X}$ на самом деле нигде не плотно. Отметим также, что экстремально несвязный компакт $\hat{X}$ изоморфен компакту Гельфанда банаховой алгебры $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, что позволяет смотреть на классы эквивалентности измеримых ограниченных функций как на функции непрерывные.

Ввиду изометрии $\Sigma/\Sigma_0 \cong \hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ мы имеем возможность “поднимать” возникающие в теории меры проблемы на стоуновский компакт.

Мы коснемся одной из таких проблем — характеризации свойства локальной обратимости σ-гомоморфизмов алгебр с мерами. Мы потому рассматриваем стандартную ситуацию, что только в стандартной ситуации каждый σ-гомоморфизм порождается поточечным отображением.

Пусть (X, Σ, μ) и $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ — стандартные пространства с мерами. Рассмотрим измеримое отображение $\alpha : X \to Y$, удовлетворяющее **условию согласования (условию «независания»)**:
$$\text{если } B \in \mathcal{S} \text{ и } \nu(B) = 0, \text{ то } \mu(\alpha^{-1}(B)) = 0.$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы по правилу
$$h : [B]_{\mathcal{S}_0} \to [\alpha^{-1}(B)]_{\Sigma_0} \ (B \in \mathcal{S})$$
корректно порождался σ-гомоморфизм $h : \mathcal{S}/\mathcal{S}_0 \to \Sigma/\Sigma_0$. Наличие канонических изоморфизмов
$$\Sigma/\Sigma_0 \cong \hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0 \text{ и } \mathcal{S}/\mathcal{S}_0 \cong \hat{\mathcal{S}}/\hat{\mathcal{S}}_0$$
позволяет перенести σ-гомоморфизм h на σ-гомоморфизм $\hat{h} : \hat{\mathcal{S}}/\hat{\mathcal{S}}_0 \to \hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ их канонических представлений. Известно, что этот гомоморфизм порождается поточечным отображением $\hat{\alpha} : \hat{X} \to \hat{Y}$, которое непрерывно и удовлетворяет условию: если множество $\hat{B}$ нигде не плотно в $\hat{Y}$, то $\hat{\alpha}^{-1}(B)$ нигде плотно в $\hat{X}$. Изучим это условие отдельно.

Обозначим через $\mathcal{R}(X)$ класс нигде не плотных множеств топологического пространства X. Соответственно, через $\mathcal{R}(Y)$ — класс нигде не плотных подмножеств топологического пространства Y.

Непрерывное отображение $\alpha : X \to Y$ будем называть **$\mathcal{R}$-непрерывным**, если для всех $B \in \mathcal{R}(Y)$ получаем $\alpha^{-1}(B) \in \mathcal{R}(X)$.

Следующее утверждение дает нам возможность воспользоваться теоремой 1.

Лемма 2. *Пусть X и Y — экстремально несвязные компакты. Тогда любое $\mathcal{R}$-непрерывное отображение $\alpha : X \to Y$ открыто.*

Доказательство. Открыто-замкнутые множества образуют базу топологий пространств X и Y. Поэтому достаточно проверить, что $\alpha(U)$ — открытое в Y множество для каждого открыто-замкнутого подмножества $U \subset X$.

Предположим сначала, что $\operatorname{int} V = \emptyset$. Из непрерывности отображения α и компактности множества U следует, что V есть замкнутое подмножество пространства Y. Так как по предположению его внутренность пуста, то V нигде не плотно, т.е. $V \in \mathcal{R}(Y)$. Ввиду $\mathcal{R}$-непрерывности $\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{R}(X)$. Следовательно, $\operatorname{int} \alpha^{-1}(V) = \emptyset$. Но $\operatorname{int} \alpha^{-1}(V) = \alpha^{-1}(\alpha(U)) \supset U \neq \emptyset$. Получено противоречие.

Таким образом, $\operatorname{int} V \neq \emptyset$. По характеристическому свойству экстремально несвязности $V_1 = \overline{\operatorname{int} V}$ — открытое множество. Так как $V_1 \subset V$, то $V_1 = \operatorname{int} V$.

Предположим теперь, что $V_1 \neq V$. Тогда множество $U_2 := U \setminus \alpha^{-1}(V_1)$ должно быть непустым открыто-замкнутым подмножеством пространства X. Ясно, что $\alpha(U_2) = V_2 := V \setminus V_1$ и $\operatorname{int} V_2 = \emptyset$. Этот вывод противоречит факту, установленному выше. Поэтому $\alpha(U) = V = V_1$ и, следовательно, множество $\alpha(U)$ является открыто-замкнутым подмножеством пространства Y

Теперь у нас все подготовлено для того, чтобы сформулировать утверждение о локальной обратимости измеримого отображения.

Теорема 2. *Пусть $\alpha : X \to Y$ — измеримое отображение стандартных пространств с мерами (X, Σ, μ) и $(Y, \mathcal{S}, \nu)$, удовлетворяющее условию согласования: если $B \in \mathcal{S}$ и $\nu(B) = 0$, то $\mu(\alpha^{-1}(B)) = 0$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) существует множество $\tilde{X}$ полной меры такое, что сужение $\tilde{\alpha} := \alpha_{|\tilde{X}} : \tilde{X} \to Y$ удовлетворяет **N-условию Лузина***: если $A \in \Sigma \cap \tilde{X}$ и $\mu(A) = 0$, то $\nu(\alpha(A)) = 0$;*

2) существует не более чем счетный набор $\{A_i \in \Sigma : i = 0, 1, \dots\}$ попарно дизъюнктных множеств такой, что: a) $\mu(X_0) = 0,\ \mu(X_i) > 0$ при $i > 0$ и $\cup_{i \geq 0} X_i = X$;

b) при $i > 0$ множество $Y_k := \alpha(X_k)$ измеримо, сужение $\alpha_k := \alpha_{|X_k} : X_k \to Y_k$ обратимо и обратное отображение $\beta_k := \alpha_k^{-1} : Y_k \to X_k$ удовлетворяет условию согласования;

3) для отображения $\hat{\alpha} : \hat{X} \to \hat{Y}$, индуцированного в канонических стоуновских представлениях, существует открытое всюду плотное множество $\tilde{\hat{X}}$ такое, что сужение $\tilde{\hat{\alpha}} := \hat{\alpha}_{\tilde{\hat{X}}} : \tilde{\hat{X}} \to \hat{Y}$ удовлетворяет условию: если $\hat{A} \in \mathcal{J}(\hat{X}) \cap \tilde{\hat{X}}$, то $\hat{\alpha}(\hat{A}) \in \mathcal{J}(\hat{Y})$.

Заметим, что утверждение 2) этой теоремы эквивалентно свойству локальной обратимости: для любого множества $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ найдется множество $A_1 \in \Sigma$ такое, что: $A_1 \subset A,\ \mu(A_1) > 0,\ \alpha(A_1) \in \mathcal{T}$, отображение $\alpha_{|A_1} : A_1 \to \alpha(A_1)$ обратимо и обратное отображение удовлетворяет условию согласования.

По содержанию теоремы можно сказать следующее. В утверждении 1) выясняется новая роль условия Лузина: оно не только гарантирует измеримость образа измеримого множества при измеримом отображении, но и является скрытым критерием локальной обратимости этого отображения. Переформулировка этого условия в утверждении 3) фактически является нестандартным критерием локальной обратимости.

Мы приведем здесь только краткое **доказательство**, опуская громоздкие чисто технические детали.

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$. Предположим, что утверждение 2) неверно. Тогда, как следует из леммы 2 найдется множество X_0 с $\mu(X_0) > 0$ такое, что сужение $\alpha_0 := \alpha_{|X_0}$ обладает свойством **антиинъективности** [12], [9], [10]: если $A \in \Sigma \cap X_0$ и $\alpha_{|A}$ — инъекция, то $\mu(A) = 0$.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $X_0 = X$. В лемме 2 фактически установлено, что антиинъективность отображения $\alpha : X \to Y$ эквивалентна существованию σ-подалгебры $\Sigma_\tau \subset \Sigma$ такой, что: 1) $\mu_{|\Sigma_\tau}$ — диффузная (не имеющая атомов) мера; 2) σ-подалгебры Σ_τ и $\Sigma_\alpha := \alpha^{-1}(\mathcal{S})$ независимы.

Наименьшую σ-подалгебру $\sigma(\Sigma_\alpha, \Sigma_\tau)$, содержащую подалгебры Σ_α и Σ_τ, можно отождествить с проективным тензорным произведением $\Sigma_1 := \Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau$, тем самым вложив $\Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau$ в Σ. Так как $\alpha^{-1}(\mathcal{S}) = \Sigma_\alpha \times X$, то при таком вложении $i : \Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau \cong \sigma(\Sigma_\alpha, \Sigma_\tau) \to \Sigma$ σ-гомоморфизм $\alpha^{-1} : \mathcal{S} \to \Sigma$ «пропускается» через оператор тождественного вложения $i_\alpha : \Sigma \times X \to \Sigma$, т.е $i_\alpha(\alpha^{-1}) = \alpha^{-1}$. Отсюда следует, что $\alpha_\Sigma = \alpha(p_\alpha)$, где $p_\alpha : \Sigma_1 := \Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau \to \Sigma_\alpha \cong \Sigma_\alpha \times X$ — «проекция» на первый множитель тензорного произведения Σ_1. На образующих элементах $A \times B$ $(A \in \Sigma_\alpha, B \in \Sigma_\tau)$ этого произведения проекция действует по правилу: $A \times B \longmapsto A \times X$. Учитывая, что сужение $\mu_\tau := \mu_{|X \times \Sigma_\tau}$ является диффузной мерой, мы можем сказать, что для всех базовых множеств $C := A \times B$, для которых $\mu_\alpha(A) > 0$, а $\mu_\tau(B) = 0$, образ $\alpha(C)$ имеет ненулевую меру: $\nu(\alpha(C)) = \mu(A) > 0$, но $\mu(C) = 0$. Поскольку таких базовых множеств имеется более чем счетное кардинальное число (а именно, 2^c, где c — континуум), то полученный вывод несовместим с утверждением 1).

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$. Достаточно положить $\tilde{X} = \cup_{i>0} X_i$.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$. Согласно теореме М. Стоуна для каждого ненулевого класса μ-эквивалентности $[A]_{\Sigma_0}$ $(A \subset \Sigma,\ \mu(A) > 0)$ найдется единственное открыто-замкнутое множество $\hat{A} \subset \hat{X}$ такое, что $h_0[A] = \hat{A}$. Здесь $h_0 : \Sigma/\Sigma_0 \to \hat{\Sigma}_{oc}$— изоморфизм полной булевой σ-алгебры Σ/Σ_0 на поле $\hat{\Sigma}_{oc}$ открыто-замкнутых подмножеств ее стоуновского компакта $\hat{X}$. Поэтому при $i > 0$ σ-алгебра Σ_i/Σ_{i0} $(\Sigma_i := \Sigma \cap X_i, \Sigma_{i0} := \Sigma_0 \cap X_i$, являющаяся компонентой (полосой) σ-алгебры Σ/Σ_0, канонически изоморфна σ-алгебре $\hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ $(\hat{\Sigma}_i := \hat{\Sigma} \cap \hat{X}_i, \hat{\Sigma}_{i0} := \hat{\Sigma}_0 \cap \hat{X}_i$. В утверждении 2) говорится о том, что отображение $\alpha_i := \alpha_{|X_i} : X_i \to Y_i$ порождает σ-изоморфизм $\alpha^{-1} : \mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i0} \to \Sigma_i/\Sigma_{i0}$. По теореме о представлении отображение $\hat{\alpha}_i : \hat{\alpha}_{|\hat{X}_i} : \hat{X}_i \to \hat{Y}_i$ также порождает σ-изоморфизм $\hat{\alpha}_i^{-1} : \hat{\mathcal{S}}_i/\hat{\mathcal{S}}_{i0} \to \hat{\Sigma}_i/\hat{\Sigma}_{i0}$. Ясно, что обратный к $\hat{\alpha}_i^{-1}$ σ-изоморфизм имеет вид $\hat{\alpha} : \hat{\Sigma}_i/\hat{\Sigma}_{i0} \to \hat{\mathcal{S}}_i/\hat{\mathcal{S}}_{i0}$ и потому

$$\hat{\alpha}_i(\hat{\Sigma}_{i0}) = \hat{\alpha}_i(\hat{\Sigma} \cap \hat{X}_i) \subset \hat{\mathcal{S}}_{i0} = \hat{\mathcal{S}}_0 \cap \hat{Y}_i \subset \hat{\mathcal{S}}_0.$$

При этом, поскольку $\mu(\cup_{i>0} X_i) = \mu(X)$, то открытое множество $\tilde{\hat{X}} := \cup_{i>0} \hat{X}_i$ всюду плотно в $\hat{X}$.

$\boxed{3) \Rightarrow 2)}$. Порождающее σ-гомоморфизм канонических представлений отображение $\hat{\alpha} : \hat{X} \to \hat{Y}$ $\Re$-непрерывно. Согласно лемме 2 отсюда следует, что отображение $\hat{\alpha}$ открыто. При этом имеет место утверждение 5) теоремы 1. Следовательно, справедливо и утверждение 2) этой теоремы: найдется не более чем счетный набор $\{\hat{X}_i \subset \hat{X} : i = 1, \ldots\}$ попарно дизъюнктных открыто-замкнутых подмножеств пространства $\hat{X}$ такой, что открытое множество $\tilde{\hat{X}} := \cup_{i \geq 1} \hat{X}_i$ всюду плотно и сужение $\hat{\alpha}_i := \hat{\alpha}_{|\hat{X}_i} : \hat{X}_i \to \hat{Y}$ инъективно при всех $i = 1, \ldots$. Так как отображение $\hat{\alpha}$ открыто, то отображение $\hat{\alpha}_i : \hat{X}_i \to \hat{Y}_i := \hat{\alpha}(\hat{X}_i)$ является гомеоморфизмом, порождающим σ-изоморфизм $\hat{\Sigma}_i/\hat{\Sigma}_{i0} \to \hat{\mathcal{S}}_i/\hat{\mathcal{S}}_{i0}$. Выберем борелевских представителей X_i и Y_i из классов эквивалентностей $h_0^{-1}(\hat{X}_i)$ и $h_0^{-1}(\hat{Y}_i)$ Далее заметим, что σ-изоморфизм $\hat{\alpha}_i$ индуцирует σ-изоморфизм $h_i : \Sigma_i/\Sigma_{i0} \to \mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i0}$ соответствующих фактор-алгебр. Согласно теореме он порождается некоторым поточечным отображением $\tilde{\alpha} : X_i \to Y_i \subset Y$, эквивалентным сужению $\alpha_i := \alpha_{|X_i}$.

Замечание. Формулой $\hat{\mu}(\hat{A}) := \mu(A)$ $(A \in h_0^{-1}(\hat{A}))$ мера μ переносится с σ-алгебры Σ на поле $\hat{\Sigma}_{oc}$ открыто-замкнутых подмножеств стоуновского компакта $\hat{X}$ σ-алгебры Σ/Σ_0. Распространение этой меры на наименьшую σ-алгебру $\hat{\Sigma}$, содержащую $\hat{\Sigma}_{oc}$, приводит к появлению пространства с мерой $(\hat{X}, \hat{\Sigma}, \hat{\mu})$, метрически изоморфного пространству (X, Σ, μ). Замечательным свойством меры $\hat{\mu}$ является ее согласованность с категорией: $\hat{\mu}(\hat{A}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{A}$ является множеством первой категории.

Для пространства $(\hat{X}, \hat{\Sigma}, \hat{\mu})$ ввиду такой согласованности эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3) становится тавтологией, а эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3) — тавтологичной переформулировкой эквивалентности 2) $\Longleftrightarrow$ 5) утверждением теоремы 1.

Замечание. Утверждение 2) теоремы 2 допускает трактовку в терминах σ-гомоморфизмов классов эквивалентностей. Это утверждение является, по существу, переформулировкой утверждения 2) теоремы 1. В отличие от этого, утверждение 1), хотя и кажется на первый взгляд тавтологичным переводом утверждения 5) теоремы 1, на самом деле таковым не является: оно не имеет выражения в терминах классов эквивалентностей измеримых множеств

Предложение 1. *Пусть $\alpha : X \to Y$ — непрерывное отображение компакта X в топологическое пространство Y и $(A_i)_{i\in I}$ — направленное по убыванию семейство замкнутых подмножеств компакта X с пересечением A. Тогда*

$$\alpha(A) = \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i).$$

Доказательство. При всех $i \in I$ $\alpha(A) \subset \alpha(A_i)$, так как $A \subset A_i$ Отсюда $\alpha(A) \subset \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i)$. Проверим включение $\bigcap_{i\in I} \alpha(A_i) \subset \alpha(A)$.

Пусть $y \in \bigcap_{i\in I} \alpha(A_i)$. При каждом $i \in I$ множество $A_{iy} := A_i \cap \alpha^{-1}(y)$ замкнуто. Семейство $(A_{iy})_{i\in I}$ направлено по убыванию. Ввиду компактности X пересечение $A_y := \bigcap_{i\in I} \alpha(A_{iy})$ непусто. Но $A_y = A \cap \alpha^{-1}(y)$. Поэтому

$$\alpha(A) \cap \{y\} \supset \alpha(A_y) \neq \emptyset,$$

т.е. $y \in \alpha(A)$.

Предложение 2. *Каждое бесконечное подмножество A экстремально несвязного хаусдорфова компакта X содержит подмножество B, гомеоморфное расширению Стоуна–Чеха $\beta\mathbb{N}$ пространства $\mathbb{N}$ натуральных чисел.*

Доказательство. По следующей итеративной схеме построим последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$ и последовательность открытых множеств $V_1, V_2, \ldots$ таких, что $a_i \in V_i$, $V_i \cap V_j$ при $i \neq j$ и $A_d := \{a_1, a_2, \ldots\} \subset A$.

Положим $X_1 := X$, $A_0 := A$ и $A_1 := A_0 \cap X_1$. Ввиду регулярности пространства X для двух (произвольно) выбранных точек x_1 и x_2 множества A_1 найдутся их окрестности U_1 и U_2 с непересекающимися замыканиями $\overline{U_1}$ и $\overline{U_2}$. Обозначим через C одно из замкнутых множеств $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$ и $X \setminus (U_1 \cup U_2)$, содержащее бесконечно много точек множества A_1. Из точек x_1 и x_2 выберем точку a_1, которая не принадлежит множеству C. Отделим точку a_1 от замкнутого множества C открытыми множествами V_1 и X_2: $a_1 \in V_1$, $C \subset X_2$ и $V_1 \cap X_2$. В результате первого шага построения найдены точка a_1 и открытое множество V_1, также указано открытое в X подпространство X_2, необходимое для продолжения построения.

Множество A_d является счетным дискретным топологическим пространством. Поэтому его расширение Стоуна–Чеха βD гомеоморфно пространству $\beta\mathbb{N}$. Проверим, что βD совпадает с замыканием $B := \overline{A_d}$ множества в топологии экстремально несвязного компакта X. Согласно известному критерию [11][с. 267] достаточно показать, что каковы бы ни были непересекающиеся подмножества I_1 и I_2 натурального ряда N замыкания в A подмножеств $A_1 := \{a_i : i \in I_1\}$ и $A_2 := \{a_i \in I_2\}$ множества A не пересекаются. Но это очевидно, так как вследствие экстремальной несвязности X замыкания непересекающихся открытых множеств $U_1 := \bigcup\{V_i : i \in I_1\}$ и $U_2 := \bigcup\{V_i : i \in I_2\}$, содержащих, соответственно, множества A_1 и A_2, не пересекаются.

Для завершения доказательства осталось заметить, что поскольку A замкнуто в X, то $B = \overline{A_d} \subset A$.

Как известно [11][с. 268], мощность пространства $\beta\mathbb{N}$ равна 2^c ($c = 2^{\aleph_0}$). Поэтому из доказанного предложения вытекает

Следствие. *Мощность любого бесконечного замкнутого подмножества экстремально несвязного хаусдорфова компакта не меньше* 2^c.

Работа выполнена при поддержке АО «ПРОГНОЗ».

Дата поступления 27.10.2016

Список литературы

1. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах*, Наука, М., 1977, 600 с.

2. В. Г. Винокуров, “Компактные меры и произведения пространств Лебега”, *Мат. сборник. Новая серия*, **74 (116)**:3 (1967), 434–472.

3. Д. А. Владимиров, *Булевы алгебры*, Наука, М., 1969, 320 с.

4. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974, 480 с.

5. А. В. Рохлин, “Об основных понятиях теории меры”, *Мат. сборник*, **25**:1 (1949), 107–150.

6. А. А. Самородницкий, *Теория меры*, Из-во Ленинград. ун-та, Л., 1990, 268 с.

7. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1987, 760 с.

8. А. В. Чистяков, “О кусочно-инъективных измеримых отображениях”, *Известия вузов. Математика.*, 2006, № 5, 67–72.

9. А. В. Чистяков, “Об ограниченных решениях стохастических систем Ито”, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, 2009, № 3(29), 103–121.

10. А. В. Чистяков, “Сильная необратимость операторов сдвига вдоль траекторий броуновского движения”, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, 2009, № 7(33), 84–89.

11. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 752 с.

12. N. J. Kalton, “Isomorphisms between L_p-function spaces when $p < 1$”, *J. of Funct. Anal*, **42**:3 (1981), 299–337.

Local homeomorphisms of Stone's compact and local convertibility measures mappings

© P. M. Simonov[3], A. V. Chistyakov[4]

Abstract. The paper is about open continuous mappings from extremely disconnected Hausdorf's compact of countable type into topological space with connectivity components that are not sets of the Baire first category. It is proved that such mapping is local homomorphism if and only if it maps all first-cathegory sets (maybe, except subsets of unique closed nowhere dense set) into first-cathegory sets. The obtained result is used for characterization of local reversibility of measurable mappings that act on standard spaces with measures. In particular, it is found out that Luzin's N-condition does not only guarantee the measurability of an image but actually is also a criterion of local reversibility.

Key Words: extremely disconnected compact, open-and-closed sets, a set of first Baire category, local homeomorphism, Luzin's N-condition, Stone compact, anti-injective property

[3] Professor of Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm; simpm@mail.ru

[4] Udmurt State University, Izhevsk