УДК 517.968

Квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с вырожденным ядром и интегральным условием

© Т. К. Юлдашев [1] К. Х. Шабадиков[2]

Аннотация. Рассмотрены вопросы об однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для одного квазилинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа с вырожденным ядром и отражением первого аргумента. Развит метод вырожденного ядра для случая рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка. Применен метод Фурье разделения переменных. С помощью обозначения интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа сведено к системе из счетных систем алгебраических уравнений со сложной правой частью. После несложного преобразования получена счетная система нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой доказана методом последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: нелокальная смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, отражение аргумента, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]–[3]. Изучению дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка посвящено большое количество публикаций многих математиков, в частности работы автора [4]–[7].

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [8]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах [9], в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т.д. Изучению уравнений в частных производных третьего порядка посвящено большое количество работ (см. [10]–[16]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [17]–[19]. В настоящей работе предлагается методика изучения нелокальной смешанной задачи для

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

[2] Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан; konak.shabadikov@mail.ru

нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка с вырожденным ядром. Метод вырожденного ядра развивается в [20], [21] для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

В области Ω рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial t\,\partial x^2} - \mu \int\limits_{-T}^{T} K(t,s)\frac{\partial^2 U(-s,x)}{\partial x^2}\,ds =$$

$$= \eta(t)\int\limits_{-T}^{T} U(\theta,x)d\theta + f\left(x, \int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{l} H(\theta,y)\,U(\theta,y)\,dy\,d\theta\right) \tag{1.1}$$

с интегральным условием

$$U(0,x) + \int\limits_{-T}^{T} \Theta(t)\,U(t,x)\,dt = \varphi(x),\ x\in\Omega_l \tag{1.2}$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t,0) = U(t,l) = 0,\ t\in\Omega_T, \tag{1.3}$$

где $\eta(t)\in C(\Omega_T)$, $f(x,\gamma)\in C(\Omega_l\times R)$, $\Theta(t)\in C^1(\Omega_T)$, $\varphi(x)\in C^3(\Omega_l)$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $0<\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{l}|H(t,x)|\,dx\,dt<\infty$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{m}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C(\Omega_T)$, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[-T,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, μ – действительный спектральный параметр.

Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Определение. Под решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) понимаем функцию $U(t,x)\in C^{1,2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3).

2. Счетная система нелинейных интегральных уравнений

В уравнении (1.1) в интегральном слагаемом сделаем замену переменной: $s=-\tau$, отсюда $ds=-d\tau$. Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial t\,\partial x^2} + \mu \int\limits_{-T}^{T} K(t,-\tau)\frac{\partial^2 U(\tau,x)}{\partial x^2}\,d\tau =$$

$$= \eta(t)\int\limits_{-T}^{T} U(\theta,x)\,d\theta + f\left(x, \int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{l} H(\theta,y)\,U(\theta,y)\,dy\,d\theta\right). \tag{2.4}$$

Решение данной задачи разыскиваем в виде ряда Фурье:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\vartheta_n(x), \tag{2.5}$$

где функции $\vartheta_n(x)$ определяются как собственные функции спектральной задачи $\vartheta''(x)+$ $+\lambda^2\vartheta(x)=0$, $\vartheta(0)=\vartheta(l)=0$, $0<\lambda$ и образуют полную систему ортонормированных собственных функций $\left\{\vartheta_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$, а λ_n – соответствующие собственные значения.

По предположению
$$f\,(x,\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma)\,\vartheta_n(x), \tag{2.6}$$
где $f_n(\gamma)=\int\limits_0^l f\,(y,\gamma)\,\vartheta_n(y)\,dy$, $\gamma=\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_0^l H(\theta,z)\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\theta)\,\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta$.

Кроме того, учтем, что
$$\vartheta''_n(x)=-\lambda_n^2\,\vartheta_n(x). \tag{2.7}$$

Подставляя ряды (2.5) и (2.6) в уравнение (2.4), с учетом (2.7) получим следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений:
$$u'_n(t)-\mu\,\omega_n\int\limits_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,b_i(-\tau)\,u_n(\tau)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{1+\lambda_n^2}\,\eta(t)\int\limits_{-T}^{T} u_n(\theta)\,d\theta+\frac{1}{1+\lambda_n^2}\,f_n(\gamma), \tag{2.8}$$
где $\omega_n=\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}$, $u_n(t)=\int\limits_0^l U(t,y)\,\vartheta_n(y)\,dy$.

С помощью обозначения
$$c_{in}=\int\limits_{-T}^{T} b_i(-\tau)\,u_n(\tau)\,d\tau \tag{2.9}$$
уравнение (2.8) перепишется в следующем виде
$$u'_n(t)=\mu\,\omega_n\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,c_{in}+\frac{\eta(t)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_{-T}^{T} u_n(\theta)\,d\theta+\frac{1}{1+\lambda_n^2}\,f_n(\gamma). \tag{2.10}$$

Интегральное условие (1.2) для уравнения (2.10) запишем в следующем виде:
$$u_n(0)+\int\limits_{-T}^{T}\Theta(t)\,u_n(t)\,dt=\varphi_n, \tag{2.11}$$
где $\varphi_n=\int\limits_0^l \varphi(y)\,\vartheta_n(y)\,dy$.

Тогда путем интегрирования по t из (2.10) с учетом (2.11) получаем
$$u_n(t)=\varphi_n\,h-h\int\limits_{-T}^{T}\Theta(t)\left[\mu\,\omega_n\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\,c_{in}+\frac{p(t)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_{-T}^{T} u_n(\theta)\,d\theta+\frac{t}{1+\lambda_n^2}f_n(\gamma)\right]dt+$$
$$+\mu\,\omega_n\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\,c_{in}+\frac{p(t)}{1+\lambda_n^2}\int\limits_{-T}^{T} u_n(\theta)\,d\theta+\frac{t}{1+\lambda_n^2}\,f_n(\gamma), \tag{2.12}$$
где $h^{-1}=\left(1+\int\limits_{-T}^{T}\Theta(t)\,dt\right)$, $p(t)=\int\limits_0^t \eta(\tau)\,d\tau$, $q_i(t)=\int\limits_0^t a_i(\tau)\,d\tau$, $i=\overline{1,m}$.

Подстановка выражения (2.12) в (2.9) дает систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$c_{in}+\mu\,\omega_n\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\,c_{jn}=B_{in},\ i=\overline{1,m}, \tag{2.13}$$

где

$$A_{ij}=-\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\,q_j(\tau)\,d\tau+h\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\int_{-T}^{T}\Theta(\xi)\,q_j(\xi)\,d\xi\,d\tau,$$

$$B_{in}=h\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\int_{-T}^{T}\Theta(\xi)\left[\frac{p(\xi)}{1+\lambda_n^2}\int_{-T}^{T}u_n(\theta)\,d\theta+\frac{\xi}{1+\lambda_n^2}\,f_n(\gamma)\right]d\xi\,d\tau-$$

$$-\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\left[\varphi_n\,h+\frac{p(\tau)}{1+\lambda_n^2}\int_{-T}^{T}u_n(\theta)\,d\theta+\frac{s}{1+\lambda_n^2}\,f_n(\gamma)\right]d\tau. \tag{2.14}$$

СССАУ (2.13) однозначно разрешима при любых конечных B_{in}, если выполняется следующее условие

$$\Delta_n(\mu)=\begin{vmatrix}1+\mu\,\omega_nA_{11} & \mu\,\omega_nA_{12} & \dots & \mu\,\omega_nA_{1m}\\ \mu\,\omega_nA_{21} & 1+\mu\,\omega_nA_{22} & \dots & \mu\,\omega_nA_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu\,\omega_nA_{m1} & \mu\,\omega_nA_{m2} & \dots & 1+\mu\,\omega_nA_{mm}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{2.15}$$

Определитель $\Delta_n(\mu)$ в (2.15) есть многочлен относительно μ степени не выше m. Уравнение $\Delta_n(\mu)=0$ имеет не более m различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1). Другие значения μ называются регулярными, при которых условие (2.15) выполняется. Для регулярных значений μ система (2.13) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра μ устанавливается однозначная разрешимость поставленной задачи (1.1)–(1.3).

Тогда решения СССАУ (2.13) записываются в виде

$$c_{in}=\frac{\Delta_{in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)},\ i=\overline{1,m}, \tag{2.16}$$

где

$$\Delta_{in}(\mu)=\begin{vmatrix}1+\mu\,\omega_nA_{11} & \dots & \mu\,\omega_nA_{1(i-1)} & B_{1n} & \mu\,\omega_nA_{1(i+1)} & \dots & \mu\,\omega_nA_{1m}\\ \mu\,\omega_nA_{21} & \dots & \mu\,\omega_nA_{2(i-1)} & B_{2n} & \mu\,\omega_nA_{2(i+1)} & \dots & \mu\,\omega_nA_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu\,\omega_nA_{m1} & \dots & \mu\,\omega_nA_{m(i-1)} & B_{mn} & \mu\,\omega_nA_{m(i+1)} & \dots & 1+\mu\,\omega_nA_{mm}\end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in}(\mu)$ находятся B_{in}. В свою очередь, в составе B_{in} находятся неизвестные функции $u_n(t)$. В самом деле, эти неизвестные функции находились в правой части СССАУ (2.13). Чтобы вывести их из знака определителей, выражение в (2.14) запишем в следующем виде

$$B_{in}=B_{1in}+B_{2in}\int_{-T}^{T}u_n(\theta)\,d\theta+B_{3in}\,f_n(\gamma),$$

где

$$B_{1in} = \varphi_n h \int_{-T}^{T} b_i(-\tau)\, d\tau,$$

$$B_{2in} = \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_{-T}^{T} b_i(-\tau) \left[-p(\tau) + h \int_{-T}^{T} \Theta(\xi)\, p(\xi)\, d\xi \right] d\tau,$$

$$B_{3in} = \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_{-T}^{T} b_i(-\tau) \left[-\tau + h \int_{-T}^{T} \xi\, \Theta(\xi)\, d\xi \right] d\tau.$$

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_{in}(\mu) = \Delta_{1in}(\mu) + \Delta_{2in}(\mu) \int_{-T}^{T} u_n(\theta)\, d\theta + \Delta_{3in}(\mu)\, f_n(\gamma),$$

где $\Delta_{kin}(\mu) =$

$$= \begin{vmatrix} 1+\mu\,\omega_n A_{11} & \ldots & \mu\,\omega_n A_{1(i-1)} & B_{k1n} & \mu\,\omega_n A_{1(i+1)} & \ldots & \mu\,\omega_n A_{1m} \\ \mu\,\omega_n A_{21} & \ldots & \mu\,\omega_n A_{2(i-1)} & B_{k2n} & \mu\,\omega_n A_{2(i+1)} & \ldots & \mu\,\omega_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu\,\omega_n A_{m1} & \ldots & \mu\,\omega_n A_{m(i-1)} & B_{kmn} & \mu\,\omega_n A_{m(i+1)} & \ldots & 1+\mu\,\omega_n A_{mm} \end{vmatrix}, \; k = \overline{1,3}.$$

Тогда формула (2.16) принимает вид

$$c_{in} = \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} + \frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} \int_{-T}^{T} u_n(\theta)\, d\theta + \frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}\, f_n(\gamma), \; i = \overline{1,m}. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.12), имеем следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ)

$$u_n(t) = \Im_1(t; u_n) \equiv Q_n(t) + G_n(t) \int_{-T}^{T} u_n(\theta)\, d\theta +$$

$$+\Phi_n(t) \int_0^l f\left(y, \int_{-T}^{T} \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta)\, \vartheta_k(z)\, dz\, d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \tag{2.18}$$

где

$$Q_n(t) = h\,\varphi_n - \mu\,\omega_n h \int_{-T}^{T} \Theta(t) \sum_{i=1}^{m} q_i(t) \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} dt + \mu\,\omega_n \sum_{i=1}^{m} q_i(t) \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)},$$

$$G_n(t) = \frac{p(t)}{1+\lambda_n^2} - h \int_{-T}^{T} \Theta(t) \frac{p(t)}{1+\lambda_n^2}\, dt -$$

$$-\mu\,\omega_n h\int\limits_{-T}^{T}\Theta(t)\sum_{i=1}^{m}q_i(t)\frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dt+\mu\,\omega_n\sum_{i=1}^{m}q_i(t)\frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)},$$

$$\Phi_n(t)=\frac{t}{1+\lambda_n^2}-h\int\limits_{-T}^{T}\Theta(t)\frac{t}{1+\lambda_n^2}dt-$$

$$-\mu\,\omega_n h\int\limits_{-T}^{T}\Theta(t)\sum_{i=1}^{m}q_i(t)\frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}dt+\mu\,\omega_n\sum_{i=1}^{m}q_i(t)\frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}.$$

3. Однозначная разрешимость ССНИУ

В множестве $\Big\{u(t)=\big(u_n(t)\big)|u_n(t)\in C(\Omega_T),n=1,2,3,\ldots\Big\}$ определяются операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. Тогда данное множество становится линейным векторным пространством. Берем те элементы этого векторного пространства, которые удовлетворяют условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\max_{t\in\Omega_T}\Big|u_n(t)\Big|\Big)^2<\infty$. С введением нормы

$$\big\|u(t)\big\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{t\in\Omega_T}\Big|u_n(t)\Big|\right)^2}$$

оно становится банаховым пространством и обозначается через $B_2(\Omega_T)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* (2.15). *Если*
1. $\beta_1=\big\|Q(t)\big\|_{B_2(\Omega_T)}<\infty$; $\beta_2=\big\|G(t)\big\|_{B_2(\Omega_T)}<\infty$; $\beta_3=\big\|\Phi(t)\big\|_{B_2(T)}<\infty$;
2. $M=\big\|f(x,\gamma)\big\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty$; $\Big|f(x,\gamma_1)-f(x,\gamma_2)\Big|\le L(x)\Big|\gamma_1-\gamma_2\Big|$;
3. $\rho=\beta_2T+\beta_3\delta_1\delta_2<1$; $\delta_1=\big\|L(x)\big\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty$; $\delta_2=\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{l}\Big|H(t,x)\Big|dxdt<\infty$.

Тогда ССНИУ (2.18) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(\Omega_T)$. *Это решение может быть найдено из следующего итерационного процесса*

$$\begin{cases}u_n^0(t)=Q_n(t),\\ u_n^{j+1}(t)=\Im_1(t;u_n^j),\ j=0,1,2,\ldots.\end{cases}\tag{3.19}$$

Доказательство. Рассмотрим шар $S\Big(u_n^0;r_1\Big)$ с радиусом $r_1=\beta_1+\dfrac{\beta_3M}{1-\beta_2T}$. В силу первого условия теоремы из (3.19) для нулевого приближения имеем

$$\big\|u^0(t)\big\|_{B_2(\Omega_T)}\le\beta_1.\tag{3.20}$$

В силу условий теоремы и неравенства (3.20), из (3.19) для первой разности получаем оценку

$$\big\|u^1(t)-u^0(t)\big\|_{B_2(\Omega_T)}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{t\in\Omega_T}\Big|G_n(t)\Big|\right)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-T}^{T}\Big|Q_n(t)\Big|^2dt+}$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\max_{t\in\Omega_T}\left|\Phi_n(t)\right|\int_0^l\left|f\left(y,\int_{-T}^{T}\int_0^l H(t,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^0(t)\,\vartheta_k(z)dzdt\right)\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\leq$$

$$\leq\left\|Q(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\beta_2 T+\beta_3\left\|f(x,\gamma)\right\|_{L_2(\Omega_l)}=\beta_1\beta_2\,T+\beta_3\,M. \qquad (3.21)$$

В силу условий теоремы и оценки (3.21), из (3.19) для разности $u^2(t)-u^0(t)$ получим оценку

$$\left\|u^2(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|G_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\left|u_n^1(t)-u_n^0(t)\right|dt\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|\Phi_{2n}(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\,\vartheta_n(y)\right|\,dy\right]^2}\leq$$

$$\leq\left(\beta_1\beta_2T+\beta_3M\right)\beta_2T+\beta_3M=\beta_1(\beta_2T)^2+\left(\beta_2T+1\right)\beta_3M, \qquad (3.22)$$

где $\gamma^1=\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_0^l H(t,z)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|u_k^1(t)\right|\vartheta_k(z)\,dz\,dt$.

Далее, из (3.19) с учетом (3.22) имеем

$$\left\|u^3(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq\Big(\beta_1\,\beta_2\,T+\beta_3\,M\Big)\left(\beta_2\,T\right)^2+\left(\beta_2\,T+1\right)\beta_3\,M=$$

$$=\beta_1(\beta_2T)^3+\Big(\left(\beta_2\,T\right)^2+\beta_2\,T+1\Big)\,\beta_3\,M. \qquad (3.23)$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.23) получаем

$$\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq\beta_1(\beta_2T)^j+$$

$$+\Big(\left(\beta_2\,T\right)^{j-1}+\left(\beta_2\,T\right)^{j-2}+\ldots+\left(\beta_2\,T\right)^2+\beta_2\,T+1\Big)\,\beta_3\,M. \qquad (3.24)$$

Из последнего условия теоремы следует, что $\beta_2\,T<1$. Поэтому из (3.24) с переходом к пределу при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq\lim_{j\to\infty}\Big[\beta_1(\beta_2T)^j+$$

$$+\Big(\left(\beta_2\,T\right)^{j-1}+\left(\beta_2\,T\right)^{j-2}+\ldots+\left(\beta_2\,T\right)^2+\beta_2\,T+1\Big)\,\beta_3\,M\Big],$$

имеем

$$\left\|u^\infty(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}<\beta_1+\frac{\beta_3\,M}{1-\beta_2\,T}=r_1. \qquad (3.25)$$

Из (3.25) следует, что оператор в правой части (2.18) отображает шар $S\Big(u_n^0;r_1\Big)$ в себя. Теперь для произвольной разности $u^{j+1}(t)-u^j(t)$ получим оценку

$$\left\|u^{j+1}(t)-u^j(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|G_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\left|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right|dt\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|\Phi_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l L(y)\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\int_0^l |H(t,z)|\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k^j(t)-u_k^{j-1}(t)\right|\,\left|\vartheta_k(z)\right|dz\,dt\right]^2}\leq$$

$$\leq\left[\beta_2 T+\beta_3\delta_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l L(y)\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right)^2}\right]\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq$$

$$\leq\rho\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}. \tag{3.26}$$

В силу последнего условия теоремы и из оценки (3.26) следует, что оператор в правой части (2.18) является сжимающим. Из оценок (3.20), (3.25) и (3.26) мы заключаем, что для оператора (2.18) существует единственная неподвижная точка (см. [22], стр. 389–401]). Следовательно, ССНИУ (2.18) имеет единственное решение $u(t)\in B_2(\Omega_T)$. Кроме того, для скорости сходимости справедлива оценка

$$\left\|u^{j+1}(t)-u(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\leq\frac{\rho^{j+1}}{1-\rho}\Big(\beta_1\,\beta_2\,T+\beta_3\,M\Big).$$

Дифференцируя ССНИУ (2.18) по t, имеем

$$u'_n(t)=\Im_2(t;u'_n)\equiv Q'_n(t)+G'_n(t)\int_{-T}^{T}u_n(\theta)\,d\theta+$$

$$+\Phi'_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_{-T}^{T}\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\,\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy, \tag{3.27}$$

где $Q'_n(t)\in C^1(\Omega_T)$, $G'_n(t)\in C^1(\Omega_T)$, $\Phi'_n(t)\in C^1(\Omega_T)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.1. *и* $N_0=\left\|Q'(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}<\infty$; $N_1=\left\|G'(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}<\infty$; $N_2=\left\|\Phi'(t)\right\|_{B_2(\Omega_T)}<\infty$. *Тогда* $u'(t)\in B_2(\Omega_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим шар $S\Big(\dfrac{d}{dt}u_n^0;\,r_2\Big)$ с радиусом

$$r_2=\max\left\{N_0;N_1T\,\left(\beta_1+\frac{1}{1-\beta_2T}\right)+N_2\,M\right\}.$$

Для оператора (3.27) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u_n^0(t)=Q'_n(t),\\ \dfrac{d}{dt}u_n^{j+1}(t)=\Im_2(t;u_n^j),\ j=0,1,2,\ldots.\end{cases} \tag{3.28}$$

Покажем, что последовательные приближения (3.28) не выходят из шара $S\Big(\dfrac{d}{dt}u_n^0;r_2\Big)$.

В силу первого условия теоремы, из (3.28) для нулевого приближения имеем

$$\Big\|\frac{d}{dt}u^0(t)\Big\|_{B_2(\Omega_T)} \le N_0. \tag{3.29}$$

В силу условий теоремы и неравенства (3.20), из (3.28) для первой разности получаем оценку

$$\Big\|\frac{d}{dt}u^1(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\Big\|_{B_2(\Omega_T)} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|G'_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-T}^{T}\left|u_n^0(t)\right|^2dt}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\max_{t\in\Omega_T}\left|\Phi'_n(t)\right|\int\limits_0^l\left|f\left(y,\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_0^l H(t,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^0(t)\,\vartheta_k(z)\,dz\,dt\right)\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\le$$

$$\le N_1\,\beta_1\,T+N_2\,M.$$

В силу условий теоремы и оценки (3.21), из (3.28) для разности $\dfrac{d}{dt}u^2(t)-\dfrac{d}{dt}u^0(t)$ получим

$$\Big\|\frac{d}{dt}u^2(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\Big\|_{B_2(\Omega_T)} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|G'_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_{-T}^{T}\left|u_n^1(t)-u_n^0(t)\right|dt\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|\Phi'_n(t)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\,\vartheta_n(y)\right|\,dy\right]^2}\le(\beta_1\,\beta_2\,T+\beta_3\,M)\,N_1\,T+N_2\,M.$$

Далее, из (3.28) с учетом (3.22) имеем

$$\Big\|\frac{d}{dt}u^3(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\Big\|_{B_2(\Omega_T)} \le N_1\,T\,\Big(\beta_1(\beta_2\,T)^2+(\beta_2\,T+1)\,\beta_3\,M\Big)+N_2\,M. \tag{3.30}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.30) получаем

$$\Big\|\frac{d}{dt}u^j(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\Big\|_{B_2(\Omega_T)} \le N_1\,T\,\Big[\beta_1(\beta_2\,T)^j+$$

$$+\Big((\beta_2\,T)^{j-1}+(\beta_2\,T)^{j-2}+\ldots+(\beta_2\,T)^2+\beta_2\,T+1\Big)\,\beta_3\,M\Big]+N_2\,M. \tag{3.31}$$

Из последнего условия теоремы 3.1. следует, что $\beta_2 T<1$. Поэтому из (3.31) с переходом к пределу при $j\to\infty$ имеем

$$\Big\|\frac{d}{dt}u^\infty(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\Big\|_{B_2(\Omega_T)} < N_1\,T\,\left(\beta_1+\frac{1}{1-\beta_2 T}\right)+N_2\,M\le r_2. \tag{3.32}$$

Из (3.29) и (3.32) заключаем, что оператор в правой части (3.27) отображает шар $S\Big(\dfrac{d}{dt}u_n^0;r_2\Big)$ в себя. Отсюда следует, что $u'(t)\in B_2(\Omega_T)$.

4. Сходимость ряда Фурье

Подставляя (2.18) в ряд Фурье (2.5), получаем формальное решение смешанной задачи (1.1)–(1.3):

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\,\Im_1(t;u_n)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\,\left\{Q_n(t)+G_n(t)\int_{-T}^{T}u_n(\theta)\,d\theta+\right.$$

$$\left.+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_{-T}^{T}\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\,\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\right\}. \tag{4.33}$$

Также подставляем (3.19) в ряд (2.5):

$$U^{j+1}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\,\Im_1(t;u_n^j)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\,\left\{Q_n(t)+G_n(t)\int_{-T}^{T}u_n^j(\theta)\,d\theta+\right.$$

$$\left.+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_{-T}^{T}\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^j(\theta)\,\vartheta_k(z)\,dz\,d\theta\right)\vartheta_n(y)\,dy\right\}. \tag{4.34}$$

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.2. *и* $u(t)\in B_2(\Omega_T)$ *является единственным решением ССНИУ* (2.18). *Тогда последовательность функций* (4.34) *сходится к функции* (4.33) *при* $j\to\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $u(t)\in B_2(\Omega_T)$ является единственным решением ССНИУ (2.18), то можно полагать, что

$$\left\|\Im_1(t;u^j)-\Im_1(t;u)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\le\frac{\varepsilon}{\delta_3},$$

где $0<\delta_3=const$, $0<\varepsilon$ – малое число. Тогда для разности функций (4.34) и (4.33) получаем

$$\left|U^{j+1}(t,x)-U(t,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^{j+1}(t)-u_n(t)\right|\left|\vartheta_n(x)\right|\le$$

$$\le\delta_3\cdot\left\|\Im_1(t;u^j)-\Im_1(t;u)\right\|_{B_2(\Omega_T)}\le\delta_3\,\frac{\varepsilon}{\delta_3}=\varepsilon.$$

Так как для оператора (3.27) имеет место $u'(t)\in B_2(\Omega_T)$, то имеем

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Im_2(t;u_n')\right|\left|\vartheta_n(x)\right|\le\delta_3\left\|\Im_2(t;u')\right\|_{B_2(\Omega_T)}<\infty.$$

Дифференцируя (4.33) два раза по x и учитывая (2.7), получаем

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\Im_1(t;u_n)\,\vartheta_n''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\Im_1(t;u_n)\,\vartheta_n(x). \tag{4.35}$$

Интегрируя два раза по частям интеграла $u_n(t)=\int\limits_0^l U\,(t,y)\;\vartheta_n(y)\,dy$, имеем

$$u_n(t)=-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l\frac{\partial^2U(t,y)}{\partial y^2}\,\vartheta_n(y)dy. \tag{4.36}$$

Подставляя (4.36) в (1.3) и используя неравенства Бесселя, окончательно получаем оценку

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \Im_1(t; u_n)\, \vartheta_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2}\, \vartheta_n(y)\, dy\, \vartheta_n(x) \right| \leq$$

$$\leq \delta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \right| \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq \delta_3 \left\| \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

Дата поступления 21.10.2016

Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Замышляева А. А., “Математические модели соболевского типа высокого порядка”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Матем. моделир. и программирование*, **7**:2 (2014), 5—28.

3. Benney D. J., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309—313.

4. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **28**:3 (2012), 17—29.

5. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени”, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*, **5**:1 (2013), 69—75.

6. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 277—295.

7. Юлдашев Т. К., Середкина А. И., “Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **32**:3 (2013), 46—55.

8. Шхануков М. Х., “О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах”, *Дифференц. уравнения*, **18**:4 (1982), 689—699.

9. Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.

10. Андреев А. А., Яковлева Ю. О., “Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **30**:1 (2013), 31—36.

11. Бештоков М. Х., "Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа", *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, **54**:9 (2014), 1497—1514.

12. Зикиров О. С., "О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка", *Изв. вузов. Математика*, 2014, № 7, 63—71.

13. Репин О. А., Кумыкова С. К., "Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **29**:4 (2012), 17—25.

14. Сопуев А., Аркабаев Н. К., "Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка", *Вестник ТомГУ. Математика. Механика*, **21**:1 (2013), 16—23.

15. Юлдашев Т. К., "Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка", *Вестник СамГУ. Серия естественнонаучная*, 2013, № 1, 58—66.

16. Юлдашев Т. К., "Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **34**:1 (2014), 56—65.

17. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., "Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды", *Матем. моделирование*, **12**:1 (2000), 94—103.

18. Иванчов Н. И., "Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием", *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547—564.

19. Пулькина Л. С., "Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени", *Изв. вузов. Математика*, 2012, № 10, 32—44.

20. Юлдашев Т. К., "Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка", *Изв. вузов. Математика*, 2015, № 9, 74—79.

21. Юлдашев Т. К., "О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 158—163.

22. Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 495 с.

A pseudoparabolic type quasilinear integro-differential equation with degenerate kernel and integral condition

© T. K. Yuldashev[3] K. H. Shabadikov[4]

Abstract. Nonlocal mixed-value problem for a quasinlinear pseudoparabolic type integro-differential equation with degenerate kernel and reflective first argument is considered. The questions of one-value solvability of such equations are examined. For equations of the third order the method of degenerate kernel is developed. Fourier method of variables' separation is used. After some denoting the examined equation is reduced to a system of countable algebraic equations' systems with complex right-hand side. After simple transformation countable system of nonlinear integral equations is obtained. One-value solvability of this system is proved by method of successive approximations combined with method of contractive mappings.

Key Words: nonlocal mixed-value problem, integro-differential equation, degenerate kernel, argument reflection, one-valued solvability

[3] Associate professor of Higher Mathematics Department, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

[4] Associate professor of Mathematical Analysis and Differential Equations Department, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, konak.shabadikov@mail.ru