УДК 517.968

Нелокальная задача для смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка в трехмерной области

© Т. К. Юлдашев [1] А. В. Багрова [2]

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной смешанной задачи для трехмерного однородного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и доказана соответствующая теорема.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, уравнение четвертого порядка, трехмерная область, интегральные условия, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач, в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1]– [6]). Исследованию дифференциальных уравнений четвертого порядка посвящено большое количество публикаций многих математиков, в частности работы автора [7]– [10].

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [11]– [13].

Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см. [14]– [16]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности, в [17]– [26].

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной смешанной задачи для трехмерного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Итак, в трехмерной области $\Omega = \{(t,x,y)\,|\, -\alpha < t < \beta,\ 0 < x,y < l\}$ рассматривается смешанное уравнение вида

$$\Im U \equiv U_{tt} - (U_{ttxx} + U_{ttyy}) + (\operatorname{sgn} t)(U_{xx} + U_{yy}) = 0, \tag{1.1}$$

где α, β и l — заданные положительные действительные числа.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

[2] Студентка инженерно-экономического института, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, nastyabagrova96@gmail.com

Задача. Найти в трехмерной области Ω функцию $U(t,x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$U(t,x,y)\in C\big(\overline{\Omega}\big)\cap C^1\big(\Omega\cup\{x=0\}\cup\{x=l\}\cup\{y=0\}\cup\{y=l\}\big)\cap C^2(\Omega_+\cup\Omega_-), \quad (1.2)$$

$$\Im U(t,x,y)\equiv 0, \quad (t,x,y)\in(\Omega_+\cup\Omega_-), \quad (1.3)$$

$$U(t,0,y)=U(t,l,y)=U(t,x,0)=U(t,x,l)=0,\ -\alpha\leqslant t\leqslant\beta, \quad (1.4)$$

$$\int_0^\beta U(t,x,y)\,t\,dt=\varphi(x,y),\ \int_{-\alpha}^0 U(t,x,y)\,t\,dt=\psi(x,y),\ 0\leqslant x,y\leqslant l, \quad (1.5)$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=\psi(0,y)=\psi(l,y)=0$, $\varphi(x,0)=\varphi(x,l)=\psi(x,0)=\psi(x,l)=0$, $\Omega_-=\{(t,x,y)\,|-\alpha<t<0,\ 0<x,y<l\}$, $\Omega_+=\{(t,x,y)\,|\,0<t<\beta,\ 0<x,y<l\}$.

Отметим, что в двумерном случае уравнение (1.1) при других граничных условиях рассмотрено в [25].

2. Поиск частных решений

Нетривиальные частные решения уравнения (1.1) в области Ω будем искать в виде $U(t,x,y)=T(t)\,V(x,y)$. Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$T''(t)\,V(x,y)-T''(t)\,V_{xx}(x,y)-T''(t)\,V_{yy}(x,y)=-(\operatorname{sgn}t)\Big(T(t)\,V_{xx}(x,y)+T(t)\,V_{yy}(x,y)\Big).$$

Здесь почленно разделим на $-(\operatorname{sgn}t)T(t)\,V(x,y)$:

$$-\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn}t)T(t)}+\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn}t)T(t)}\left(\frac{V_{xx}(x,y))}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y))}{V(x,y)}\right)=\frac{V_{xx}(x,y))}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y))}{V(x,y)}.$$

В последнем равенстве положим, что

$$\frac{V_{xx}(x,y))}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y))}{V(x,y)}=-\mu^2,\ -\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn}t)T(t)}+\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn}t)T(t)}\left(\frac{V_{xx}(x,y))}{V(x,y)}+\frac{V_{yy}(x,y))}{V(x,y)}\right)=-\mu^2,$$

где $-\mu^2$ — постоянная разделения, $0<\mu$.

Отсюда с учетом граничных условий (1.4) получаем

$$V_{xx}(x,y)+V_{yy}(x,y)+\mu^2V(x,y)=0,\ 0<x,y<l, \quad (2.1)$$

$$V(0,y)=V(l,y)=V(x,0)=V(x,l)=0, \quad (2.2)$$

$$T''(t)-\lambda^2T(t)=0,\ 0<t<\beta, \quad (2.3)$$

$$T''(t)+\lambda^2T(t)=0,\ -\alpha<t<0, \quad (2.4)$$

где $\lambda^2=\dfrac{\mu^2}{1+\mu^2}$.

Спектральная задача (2.1) и (2.2) имеет решение

$$V_{n,m}(x,y)=X_n(x)\,Y_m(y), \quad (2.5)$$

где $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n}{l}x$, $Y_m(y)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi m}{l}y$, $n,\ m=1,2,\ldots$; $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi(n+m)}{l}$.

Тогда общие решения дифференциальных уравнений (2.3) и (2.4) имеют вид

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} a_{n,m}e^{\lambda_{n,m}t} + b_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}t}, \ t > 0, \\ c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}t + d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}t, \ t < 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ — произвольные постоянные, $\lambda_{n,m} = \sqrt{\dfrac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}}$.

Поскольку решения $U_{n,m}(t,x) = T_{n,m}(t)\,X_n(x)\,Y_m(y)$ должны удовлетворять условию (1.2), то постоянные $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ подберем так, чтобы выполнялись условия

$$T_{n,m}(0+0) = T_{n,m}(0-0), \quad T'_{n,m}(0+0) = T'_{n,m}(0-0). \tag{2.7}$$

Из (2.6) с учетом условий (2.7) получаем, что $c_{n,m} = a_{n,m}+b_{n,m}$ и $d_{n,m} = a_{n,m}-b_{n,m}$. Тогда функции (2.6) принимают вид

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} c_{n,m}\operatorname{ch}\lambda_{n,m}t + d_{n,m}\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t, \ t > 0, \\ c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}t + d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}t, \ t < 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

С учетом функций (2.5) решение задачи (1.2)–(1.5) в трехмерной области Ω, согласно методу Фурье разделения переменных, представим в виде

$$U(t,x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y,$$

где

$$u_{n,m}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy, \ n,\,m = 1,2,\ldots. \tag{2.9}$$

3. Определение коэффициентов Фурье (2.9)

Покажем, что функции (2.9) удовлетворяют уравнениям (2.3), (2.4) в соответствующих интервалах и условию (2.7). Дифференцируя по t равенства (2.9) два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{gathered} u''_{n,m}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U_{tt}(t,x,y)\,\sin\frac{\pi n}{l}\,x\,\sin\frac{\pi m}{l}\,y\,dx\,dy = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l (U_{ttxx}+U_{ttyy}-U_{xx}-U_{yy})\,\sin\frac{\pi n}{l}\,x\,\sin\frac{\pi m}{l}\,y\,dx\,dy = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l (U_{ttxx}-U_{xx})\,\sin\frac{\pi n}{l}\,x\,\sin\frac{\pi m}{l}\,y\,dx\,dy + \\ + \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l (U_{ttyy}-U_{yy})\,\sin\frac{\pi n}{l}\,x\,\sin\frac{\pi m}{l}\,y\,dx\,dy, \ t > 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} u''_{n,m}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U_{tt}(t,x,y)\,\sin\frac{\pi n}{l}\,x\,\sin\frac{\pi m}{l}\,y\,dx\,dy = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l (U_{ttxx}+U_{ttyy}+U_{xx}+U_{yy})\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy = \end{gathered}$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l (U_{ttxx}+U_{xx})\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy+$$

$$+\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l (U_{ttyy}+U_{yy})\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy,\ t<0. \tag{3.2}$$

Интегрируя два раза по частям по x в первых интегралах в правых частях (3.1) и (3.2), затем интегрируя два раза по частям по y во вторых интегралах в правых частях (3.1) и (3.2), с учетом условий (1.4) получаем следующие уравнения

$$u''_{n,m}(t)-\lambda^2_{n,m}u_{n,m}(t)=0,\ t>0, \tag{3.3}$$

$$u''_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}u_{n,m}(t)=0,\ t<0, \tag{3.4}$$

где $\lambda^2_{n,m}=\dfrac{\mu^2_{n,m}}{1+\mu^2_{n,m}}$, $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi(n+m)}{l}$.

Дифференциальные уравнения (3.3) и (3.4) при $\lambda=\lambda_{n,m}$ совпадают соответственно с уравнениями (2.3) и (2.4). Далее с учетом условий (1.2) из (2.9) получаем

$$u_{n,m}(0+0)=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(0+0,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(0-0,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=u_{n,m}(0-0). \tag{3.5}$$

Дифференцируя функции (2.9) один раз по t, в силу условий (1.2) имеем

$$u'_{n,m}(0+0)=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U_t(0+0,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U_t(0-0,x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=u'_{n,m}(0-0). \tag{3.6}$$

Условия (3.5) и (3.6) совпадают с условиями (2.7). Тогда для задачи (3.3)–(3.6) аналогично формуле (2.8) имеем

$$u_{n,m}(t)=\begin{cases} c_{n,m}\operatorname{ch}\lambda_{n,m}t+d_{n,m}\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t,\ t>0,\\ c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}t+d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}t,\ t<0.\end{cases} \tag{3.7}$$

Для нахождения постоянных $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ воспользуемся интегральными условиями (1.5) и формулой (2.9)

$$\int_0^\beta u_{n,m}(t)\,t\,dt=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\int_0^\beta U(t,x,y)\,t\,dt\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \varphi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=\varphi_{n,m}, \tag{3.8}$$

$$\int_{-\alpha}^0 u_{n,m}(t)\,t\,dt=\frac{2}{l}\int_0^1\int_0^1\int_{-\alpha}^0 U(t,x,y)\,t\,dt\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=\psi_{n,m}. \tag{3.9}$$

При $t>0$ из (3.7) и (3.8) получаем

$$\varphi_{n,m}=\int_0^\beta u_{n,m}(t)\,t\,dt=\int_0^\beta \left(c_{n,m}\operatorname{ch}\lambda_{n,m}t+d_{n,m}\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t\right)\,t\,dt=c_{n,m}\left[\frac{\beta}{\lambda_{n,m}}\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda_{n,m}^2}(\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta-1)\right]+d_{n,m}\left[\frac{\beta}{\lambda_{n,m}}\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta-\frac{1}{\lambda_{n,m}^2}\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta\right]. \qquad (3.10)$$

При $t<0$ из (3.7) и (3.9) получаем

$$\psi_{n,m}=\int_{-\alpha}^0 u_{n,m}(t)\,t\,dt=\int_{-\alpha}^0 \left(c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}t+d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}t\right)\,t\,dt=c_{n,m}\left[-\frac{\alpha}{\lambda_{n,m}}\sin\lambda_{n,m}\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda_{n,m}^2}(\cos\lambda_{n,m}\alpha-1)\right]+d_{n,m}\left[-\frac{\alpha}{\lambda_{n,m}}\cos\lambda_{n,m}\alpha+\frac{1}{\lambda_{n,m}^2}\sin\lambda_{n,m}\alpha\right]. \qquad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$:

$$\begin{cases} c_{n,m}\Big[1+\lambda_{n,m}\beta\,\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta-\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta\Big]+ \\ +d_{n,m}\Big[\lambda_{n,m}\beta\,\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta-\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta\Big]=\lambda_{n,m}^2\varphi_{n,m}, \\ c_{n,m}\Big[1-\lambda_{n,m}\alpha\,\sin\lambda_{n,m}\alpha-\cos\lambda_{n,m}\alpha\Big]+ \\ +d_{n,m}\Big[-\lambda_{n,m}\alpha\,\cos\lambda_{n,m}\alpha+\sin\lambda_{n,m}\alpha\Big]=\lambda_{n,m}^2\psi_{n,m}. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Система однозначно разрешима, если ее определитель не обращается в нуль при любых $0<\alpha$ и $0<\beta$:

$$\Delta_{n,m}(\alpha,\beta)=A_{n,m}\Big[-\lambda_{n,m}\alpha\,\cos\lambda_{n,m}\alpha+\sin\lambda_{n,m}\alpha\Big]-$$

$$-B_{n,m}\Big[1-\lambda_{n,m}\alpha\,\sin\lambda_{n,m}\alpha-\cos\lambda_{n,m}\alpha\Big]\neq 0, \qquad (3.13)$$

где $A_{n,m}=1+\lambda_{n,m}\beta\,\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta-\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta$, $B_{n,m}=\lambda_{n,m}\beta\,\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta-\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta$. Так как $0<\lambda_{n,m}<1$ и $0<\beta<\infty$, то $\Big|A_{n,m}\Big|<\infty$, $\Big|B_{n,m}\Big|<\infty$.

Пусть выполняется условие (3.13). Тогда из (3.12) находим

$$c_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha,\beta)}\Big[\varphi_{n,m}\big(-\lambda_{n,m}\alpha\,\cos\lambda_{n,m}\alpha+\sin\lambda_{n,m}\alpha\big)-\psi_{n,m}B_{n,m}\Big],$$

$$d_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha,\beta)}\Big[\varphi_{n,m}\big(\lambda_{n,m}\alpha\,\sin\lambda_{n,m}\alpha+\cos\lambda_{n,m}\alpha-1\big)+\psi_{n,m}A_{n,m}\Big].$$

Подставляя эти коэффициенты в формулы (3.12), получим

$$u_{n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha,\beta)}\Big\{\varphi_{n,m}\Big[\lambda_{n,m}\alpha\big(-\operatorname{ch}\lambda_{n,m}t\,\cos\lambda_{n,m}\alpha+\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t\,\sin\lambda_{n,m}\alpha\big)+$$

$$+\big(\operatorname{ch}\lambda_{n,m}t\,\sin\lambda_{n,m}\alpha+\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t\,\cos\lambda_{n,m}\alpha\big)-\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t\Big]+$$

$$+\psi_{n,m}\Big[-\lambda_{n,m}\beta\,\operatorname{ch}\lambda_{n,m}(t-\beta)-\operatorname{sh}\lambda_{n,m}(t-\beta)+\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t\Big]\Big\},\ t>0, \qquad (3.14)$$

$$u_{n,m}(t)=\frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha,\beta)}\Big\{\varphi_{n,m}\Big[-\lambda_{n,m}\,\alpha\,\cos\lambda_{n,m}(t-\alpha)+\sin\lambda_{n,m}(t+\alpha)-\sin\lambda_{n,m}t\Big]+$$
$$+\psi_{n,m}\Big[\lambda_{n,m}\beta\left(\sin\lambda_{n,m}t\,\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta\right)-\cos\lambda_{n,m}t\,\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta\big)+$$
$$+\big(\cos\lambda_{n,m}t\,\operatorname{sh}\lambda_{n,m}\beta-\sin\lambda_{n,m}t\,\operatorname{ch}\lambda_{n,m}\beta\big)+\sin\lambda_{n,m}t\Big]\Big\},\ t<0. \tag{3.15}$$

Теперь предположим, что $\varphi(x,y)\equiv 0$, $\psi(x,y)\equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m}=0$, $\psi_{n,m}=0$ и из формул (2.9), (3.14) и (3.15) следует, что

$$\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy=0,\quad n,\,m=1,2,\ldots\,.$$

Отсюда, в силу полноты систем собственных функций $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n}{l}x\right\}$, $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi m}{l}y\right\}$ в $L_2[0,l]$, заключаем, что $U(t,x,y)\equiv 0$ для всех $x,\,y\in[0,l]$ и $t\in[-\alpha,\,\beta]$.

4. Существование решения

Рассмотрим случай, когда нарушается условие (3.13). Пусть $\Delta_{n,m}(\alpha,\beta)=0$ при некоторых значениях α. Это условие эквивалентно равенству

$$\big(B_{n,m}-A_{n,m}\lambda_{n,m}\alpha\big)\cos\lambda_{n,m}\alpha+\big(B_{n,m}+A_{n,m}\lambda_{n,m}\alpha\big)\sin\lambda_{n,m}\alpha=B_{n,m},$$

где $0<\lambda_{n,m}=\sqrt{\dfrac{\mu_{n,m}^2}{1+\mu_{n,m}^2}}<1$, $\mu_{n,m}=\dfrac{\pi\,(n+m)}{l}$, $\lambda_{n,m}\to 1$ при $n,\,m\to\infty$.

Последнее уравнение записываем в следующем виде

$$\cos(\lambda_{n,m}\alpha-\theta_{n,m})=\frac{B_{n,m}}{\sqrt{\left(1+\lambda_{n,m}^2\alpha^2\right)\left(A_{n,m}^2+B_{n,m}^2\right)}},$$

где $\theta_{n,m}=\arcsin\dfrac{A_{n,m}+B_{n,m}\lambda_{n,m}\alpha}{\sqrt{\left(1+\lambda_{n,m}^2\alpha^2\right)\left(A_{n,m}^2+B_{n,m}^2\right)}}$. Данное уравнение имеет две серии решений:

$$\alpha_k=\frac{\theta_{n,m}}{\lambda_{n,m}}\pm\frac{\xi_{n,m}}{\lambda_{n,m}}+\frac{2\pi k}{\lambda_{n,m}},\ k\in N,$$

где $\xi_{n,m}=\arccos\dfrac{B_{n,m}}{\sqrt{\left(1+\lambda_{n,m}^2\alpha^2\right)\left(A_{n,m}^2+B_{n,m}^2\right)}}$, N — множество натуральных чисел.

Другие значения α, для которых условие (3.13) выполняется, называются регулярными.

Итак, для регулярных значений α имеют место формулы (3.14), (3.15). Поэтому при выполнении условия (3.13) с учетом частных решений (2.5), (3.14), (3.15) решение задачи (1.2)–(1.5) в трехмерной области Ω можно представить в виде ряда

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\,\sin\frac{\pi m}{l}y. \tag{4.1}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x,\,y)$ и $\psi(x,\,y)$ сумма $U(t,\,x,\,y)$ ряда (4.1) удовлетворяет условиям (1.2).

Так как $0<\lambda_{n,m}<1$, то для любых n и m справедливы оценки

$$\left|u_{n,m}(t)\right| \leqslant C_1\Big(\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\psi_{n,m}\right|\Big), \tag{4.2}$$

$$\left|u'_{n,m}(t)\right| \leqslant C_2\Big(\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\psi_{n,m}\right|\Big), \tag{4.3}$$

$$\left|u''_{n,m}(t)\right| \leqslant C_3\Big(\left|\varphi_{n,m}\right|+\left|\psi_{n,m}\right|\Big), \tag{4.4}$$

где $0<C_i=\mathrm{const}$, $i=\overline{1,3}$.

Действительно, так как $0<\lambda_{n,m}<1$, $\lambda_{n,m}\to 1$ при $n,\,m\to\infty$, то для регулярных значений α на основании формул (3.14) и (3.15) найдем

$$\left|u_{n,m}(t)\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|(\alpha+2)\,e^{\beta}+\left|\psi_{n,m}\right|e^{\beta}\Big],\ t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|(\alpha+1)+\left|\psi_{n,m}\right|\Big((\beta+1)\,e^{\beta}+1\Big)\Big],\ t<0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.2), где $C_0=\left|\Delta_{n,m}(\alpha,\,\beta)\right|>0$, $C_1=\dfrac{1}{C_0}\max\Big\{(\alpha+2)\,e^{\beta};\ (\beta+1)\,e^{\beta}+1\Big\}$.

Дифференцируя выражения (3.14), (3.15), получаем

$$\left|u'_{n,m}(t)\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|(\alpha+1)\,e^{\beta}+\left|\psi_{n,m}\right|\left(1+e^{\beta}\right)\Big],\ t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|(\alpha+1)+\left|\psi_{n,m}\right|\Big(1+(1+\beta)\,e^{\beta}\Big)\Big],\ t<0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.3), где $C_2=\dfrac{1}{C_0}\max\Big\{(\alpha+1)\,e^{\beta};\ 1+(1+\beta)\,e^{\beta}\Big\}$.

Дифференцируя выражения (3.14), (3.15) два раза, получаем

$$\left|u''_{n,m}(t)\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[\left|\varphi_{n,m}\right|(\alpha+2)\,e^{\beta}+\left|\psi_{n,m}\right|e^{\beta}\Big],\ t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[2\left|\varphi_{n,m}\right|\alpha+\left|\psi_{n,m}\right|\Big(1+(1+\beta)\,e^{\beta}\Big)\Big],\ t<0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.4), где $C_3=\dfrac{1}{C_0}\max\Big\{(\alpha+2)\,e^{\beta};\ 1+(1+\beta)\,e^{\beta}\Big\}$.

Условия А. Пусть функции $\varphi(x,\,y)\in C^3\big([0;l]\times[0;l]\big)$, $\psi(x,\,y)\in C^3\big([0;l]\times[0;l]\big)$ на сегменте $[0;l]$ имеют кусочно-непрерывные производные четвертого порядка и $\varphi(0,\,y)=\varphi(l,\,y)=\psi(0,\,y)=\psi(l,\,y)=0$, $\varphi(x,\,0)=\varphi(x,\,l)=\psi(x,\,0)=\psi(x,\,l)=0$, $\varphi_{xx}(0,\,y)=\varphi_{xx}(l,\,y)=\psi_{xx}(0,\,y)=\psi_{xx}(l,\,y)=0$, $\varphi_{yy}(x,\,0)=\varphi_{yy}(x,\,l)=\psi_{yy}(x,\,0)=\psi_{yy}(x,\,l)=0$.

Пусть выполняются условия А. Тогда справедливы соотношения

$$\varphi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{p_{n,m}}{n^4},\ \varphi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{p_{n,m}}{m^4},$$

$$\psi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{q_{n,m}}{n^4},\ \psi_{n,m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{q_{n,m}}{m^4}$$

и

$$\sum_{n,\,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \left[\varphi_{xxxx}(x,\,y)\right]^2 dx\,dy,$$

$$\sum_{n,\,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \left[\varphi_{yyyy}(x,\,y)\right]^2 dx\,dy,$$

$$\sum_{n,\,m=1}^{\infty} q_{n,m}^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \left[\psi_{xxxx}(x,\,y)\right]^2 dx\,dy,$$

$$\sum_{n,\,m=1}^{\infty} q_{n,m}^2 \leqslant \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \left[\psi_{yyyy}(x,\,y)\right]^2 dx\,dy.$$

С помощью этих оценок нетрудно убедиться, что ряд (4.1) равномерно сходится в области $\overline{\Omega}$.

Таким образом доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия A. Тогда задача* (1.2) – (1.5) *однозначно разрешима в области* Ω, *если выполняется условие* (3.13).

Дата поступления 21.10.2016

Список литературы

1. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., “О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне”, *Журн. СВМО*, **12**:3 (2010), 37 – 42.

2. Турбин М. В., “Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.

3. Шабров С. А., “Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.

4. Шабров С. А., “Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.

5. Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.

6. Benney D. J., Luke J. C., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.

7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.

8. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение”, *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14**:2 (2011), 59 – 69.

9. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:2 (2012), 137 – 142.

10. Юлдашев Т. К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.

11. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, **12**:1 (2000), 94 – 103.

12. Иванчов Н. И., “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547 – 564.

13. Пулькина Л. С., “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени”, *Изв. вузов. Математика.*, 2012, № 10, 32 – 44.

14. Гельфанд И. М., “Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений”, *УМН*, **14**:3 (1959), 3 – 19.

15. Франкль Ф. И., *Избранные труды в газовой динамике*, Наука, М., 1973, 711 с.

16. Уфлянд Я. С., “К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях”, *Инженерно-физический журнал*, **7**:1 (1964), 89 – 92.

17. Апаков Ю. П., “Трехмерный аналог задачи Трикоми для параболагиперболического уравнения”, *Сиб. журн. индустр. математики*, **14**:2 (2011), 34 – 44.

18. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М., *Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа*, Фан, Ташкент, 1986, 220 с.

19. Моисеев Е. И., “О разрешимости одной нелокальной краевой задачи”, *Дифференц. уравнения*, **37**:11 (2001), 1565 – 1567.

20. Репин О. А., “Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе-Лыкова”, *Дифференц. уравнения*, **38**:10 (2002), 1412 – 1417.

21. Сабитов К. Б., *К теории уравнений смешанного типа*, Физматлит, М., 2014, 301 с.

22. Сабитова Ю. К., “Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии”, *Математические заметки*, **98**:3 (2015), 393 – 406.

23. Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром*, Фан, Ташкент, 1997, 165 с.

24. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного парабологиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 158 – 163.

25. Юлдашев Т. К., “Об одном смешанном дифференциальном уравнении четверотого порядка”, *Известия ИМИ УдГУ*, **47**:1 (2016), 119 – 128.

26. Юлдашев Т. К., “Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска”, *Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика*, **33**:2 (2016), 13 – 26.

Nonlocal problem for a mixed type fourth order differential equation in three dimensional domain

© **T. K. Yuldashev**[3] **A. V. Bagrova** [4]

Abstract. This article considers solvability of nonlocal mixed-value problem for a three-dimensional homogeneous mixed-type fourth-order differential equation. Solution construction for such equation is examined, too. Spectral method based on separation of variables is used in the article. The criterion of one-value solvability of the problem considered is installed. Under this criterion one-valued solvability of the problem is proved.

Key Words: mixed-type differential equation, fourth-order equation, three-dimensional domain, integral conditions, one-valued solvability

[3] Associate professor of Higher Mathematics Department, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

[4] Student of Institute of Engineering and Economy, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, nastyabagrova96@gmail.com