

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 533.6.013.4

Исследование устойчивости вязкоупругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. Исследуется устойчивость деформируемого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа. Учитывается старение материала, т.е. изменение его физико-механических свойств с течением времени. Применяется модель стареющего вязкоупругого тела, согласно которой напряжение в любой точке тела зависит от предыстории деформирования материала в данной точке, а связь между напряжением и деформацией подчиняется уравнению Вольтерра-Фойхта. Аэродинамическое давление на пластину определяется согласно «поршневой» теории А.А. Ильюшина. На основе построенного функционала получены достаточные условия устойчивости решений интегродифференциального уравнения с частными производными, описывающего динамику пластины.

Ключевые слова: аэроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, пластина, сверхзвуковой поток газа, дифференциальное уравнение, функционал

1. Введение

При проектировании конструкций, приборов, устройств, аппаратов, систем и т. д. различного назначения, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости деформируемых (упругих, вязкоупругих) элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1, 4, 8], так и зарубежные [6, 7, 9] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке.

Существенным фактором, влияющим на прочностные характеристики деформируемых тел, является старение материала (изменение его физико-механических свойств с течением времени). Хорошо разработанной является модель стареющего вязкоупругого тела, согласно которой напряжение в любой точке тела зависит от предыстории деформирования материала в данной точке, а связь между напряжением и деформацией подчиняется уравнению Вольтерра-Фойхта. В статье авторами впервые на основе модели вязкоупругого тела аналитически исследуется устойчивость деформируемого элемента конструкции в

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru

² Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru

виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа. Работа является продолжением исследований устойчивости деформируемых пластин, находящихся в потоке газа или жидкости. В частности, в работах [2], [3] проведено исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа без учета старения материала.

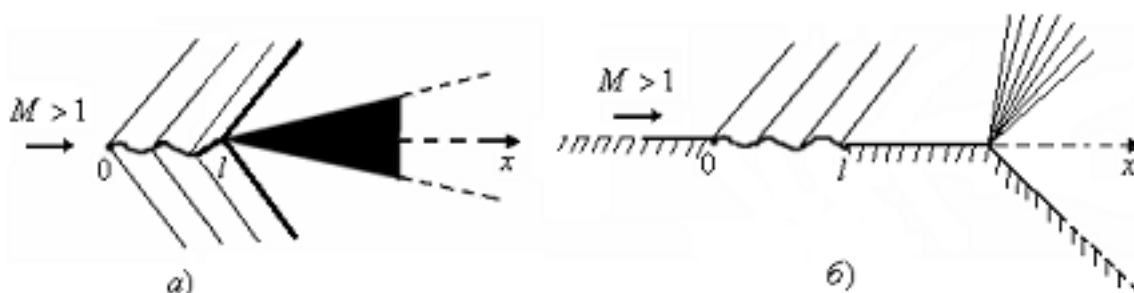
Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Аэродинамическое давление на пластину определяется согласно «поршневой» теории А.А. Ильюшина. На основе построения функционала, соответствующего дифференциальному уравнению в частных производных, описывающему поперечные колебания пластины-полосы, получены достаточные условия устойчивости решений этого уравнения.

2. Математическая модель

Рассмотрим модельное уравнение, описывающее поперечные колебания вязкоупругой пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком газа (рис. 2.1):

$$M\ddot{w}(x, t) + D \left(w''''(x, t) - \int_0^t R_1(s, t)w''''(x, s)ds \right) + \beta_0 \left(w(x, t) - \int_0^t R_2(s, t)w(x, s)ds \right) + N(t)w'' + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_2\dot{w}''''(x, t) + \alpha(\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) = 0, \quad x \in (0, l). \quad (2.1)$$

Здесь x – продольная координата, t – время; $M = h\rho_p$ – погонная масса пластины; h – толщина пластины; E , ρ_p – модуль упругости и линейная плотность пластины; $N(t)$ – сжимающее ($N > 0$) или растягивающее ($N < 0$) продольное усилие; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины; ν – коэффициент Пуассона; β_2, β_1 – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости слоя обжатия; $R_1(s, t)$, $R_2(s, t)$ – ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала пластины и его слоя обжатия; $\alpha = \alpha_0\rho_0a_0 = const > 0$, где ρ_0, a_0 – плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем обтекании, $\alpha_0 = 2$ при двустороннем обтекании); V – скорость набегающего однородного потока; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t .



Р и с у н о к 2.1

Примеры обтекания конструкций с упругим элементом сверхзвуковым потоком газа: а) двустороннее обтекание рассекателя с образованием ударной волны; б) одностороннее обтекание защитного экрана с образованием волны разрежения

Сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) пластину сила N может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением

времени $N(t)$ имеет вид:

$$N(t) = N_0 + N_T(t), \quad N_T(t) = -\frac{T_0(t)}{1-\nu}, \quad T_0(t) = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T(z, t) dz, \quad (2.2)$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения, $T(z, t)$ – закон изменения температуры по толщине пластины, N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины.

Функция $w(x, t) \in C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$, определяющая прогиб пластины, принадлежит множеству четырежды непрерывно-дифференцируемых функций по переменной x на отрезке $[0, l]$ и дважды непрерывно-дифференцируемых по переменной t при $t \geq 0$ и принимает действительные значения.

Аэродинамическая нагрузка определяется выражением $F = \alpha(\dot{w} + Vw')$, справедливым при достаточно больших скоростях сверхзвукового потока V . Выражение для F получено с помощью решения соответствующей линейной нестационарной аэродинамической задачи на основе преобразования Лапласа при больших числах Маха $M = V/a_0$ (что согласуется с гипотезой плоских сечений Ильюшина А.А.).

Пусть концы пластины закреплены либо шарнирно, либо жестко, т.е. граничные условия имеют вид:

1) жесткое защемление обоих концов

$$w(0, t) = w'(0, t) = w(l, t) = w'(l, t) = 0; \quad (2.3)$$

2) шарнирное опирание левого конца и жесткое защемление правого

$$w(0, t) = w''(0, t) = w(l, t) = w'(l, t) = 0; \quad (2.4)$$

3) жесткое защемление левого конца и шарнирное опирание правого

$$w(0, t) = w'(0, t) = w(l, t) = w''(l, t) = 0; \quad (2.5)$$

4) шарнирное опирание обоих концов

$$w(0, t) = w''(0, t) = w(l, t) = w''(l, t) = 0. \quad (2.6)$$

Зададим также начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad (2.7)$$

которые должны быть согласованы с граничными условиями. Согласно определению функции $w(x, t)$: $f_1(x), f_2(x) \in C^4[0, l]$. Норма в пространстве $C^4[0, l]$ определяется равенством $\|f\| = \sup_{0 \leq m \leq 4} \max_{x \in [0, l]} \left| \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right|$.

Таким образом, сформулированы начально-краевые задачи: а) (2.1), (2.3), (2.7); б) (2.1), (2.4), (2.7); в) (2.1), (2.5), (2.7); г) (2.1), (2.6), (2.7) для определения неизвестной функции $w(x, t)$.

3. Исследование устойчивости

О п р е д е л е н и е 3.1. Решение начально-краевой задачи для неизвестной функции $w(x, t) \in C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$ называется устойчивым по отношению к возмущениям начальных данных, если для любого сколь угодно малого положительного числа

$\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, такие, что для любых функций $f_1(x)$, $f_2(x) \in C^4[0, l]$, удовлетворяющих краевым условиям и условиям малости по норме: $\|f_1(x)\| < \delta_1$, $\|f_2(x)\| < \delta_2$, будет выполнено неравенство $|w(x, t)| < \varepsilon$, $x \in [0, l]$ для любого момента времени $t > 0$.

Аналогично можно дать определения об устойчивости любой частной производной от функции $w(x, t)$ по отношению к возмущениям начальных данных.

О п р е д е л е н и е 3.2. Функционалом в пространстве $C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$ называется всякий закон, согласно которому любой функции $w(x, t) \in C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$ сопоставляется функция $\Phi(t) \equiv \Phi(w) \in C^2 \{R^+\}$.

О п р е д е л е н и е 3.3. Дифференциальным оператором полиномиального вида будем называть следующее дифференциальное выражение:

$$F^{n,s}(g, x, t) = G(D^{0,0}g(x, t), D^{1,0}g(x, t), D^{0,1}g(x, t), \dots, D^{n,s}g(x, t)), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0;$$

где $D^{i,j}g(x, t) = \frac{\partial^{i+j}g(x, t)}{\partial x^i \partial t^j}$, а функция $G(x_1, x_2, \dots)$ – полином, все мономы которого не ниже второго порядка, с ограниченными коэффициентами, зависящими от x, t . Все коэффициенты полинома непрерывно дифференцируемы по времени t .

Л е м м а 3.1. Если можно построить функционал $\Phi(t)$, такой что $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ и для любого момента времени найдется положительно определенная нижняя оценка этого функционала

$$\Phi(t) \leq \Phi_1(t) = \int_0^l F_1^{4,2}(w, x, t) dx, \quad (3.1)$$

и найдется верхняя оценка начального значения этого функционала

$$\Phi(0) \leq \Phi_2(0) = \int_0^l F_2^{4,2}(w, x, 0) dx, \quad (3.2)$$

где $w(x, t) \in C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$ – решение начально-краевой задачи, то функция $w(x, t)$ и(или) ее производные, входящие в положительно определенный полином под знаком интеграла в выражении для $\Phi_1(t)$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя неравенство $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ от 0 до t , согласно (3.1), (3.2) получим

$$0 \leq \Phi_1(t) \leq \Phi(t) \leq \Phi(0) \leq \Phi_2(0). \quad (3.3)$$

Из неравенства $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(0)$ в (3.3), где $\Phi_2(0)$ имеет вид (3.2), получим, что из малости по норме функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, согласно определению 3 следует малость функционала $\Phi_1(t)$. Неравенство $\Phi_1(t) \geq 0$ в (3.3), где $\Phi_1(t)$ имеет вид (3.1), означает, что, используя интегральные неравенства, в оценке функционала $\Phi_1(t)$ можно выделить один или несколько положительно определенных полиномов (остальные будут положительно полуопределенными). И, следовательно, используя метод Лагранжа, можно получить оценку функционала снизу интегралом от каждой функции в четной степени, входящих в полином, умноженным на ненулевую ограниченную величину. Из малости функционала $\Phi_1(t)$ получим малость этих интегралов, а, следовательно, и малость самих функций. Тогда, согласно определению 3.1 эти функции будут устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

Доказательство закончено.

Получим условия устойчивости начально-краевых задач (2.1), (2.3), (2.7); (2.1), (2.4), (2.7); (2.1), (2.5), (2.7); (2.1), (2.6), (2.7) по отношению к возмущениям начальных данных.

Введем обозначение

$$R_i(s, t) = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial s \partial t}(s, t) \quad (i = 1, 2). \quad (3.4)$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_0^l \left(M\dot{w}^2 + 2\theta M w \dot{w} + \left(D \left(1 - \frac{\partial Q_1}{\partial t}(t, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2 \theta \right) w''^2 + \right. \\ & \left. + \left(\beta_0 \left(1 - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(t, t) - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1 \theta + \rho \theta \alpha \right) w^2 - N(t) w'^2 + \right. \\ & + D \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds + \beta_0 \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) (w(x, t) - w(x, s))^2 ds - \\ & \left. - D\theta \int_0^t \frac{\partial Q_1}{\partial s}(s, t) w''^2(x, s) ds - \beta_0 \theta \int_0^t \frac{\partial Q_2}{\partial s}(s, t) w^2(x, s) ds \right) dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\theta > 0$ – некоторый постоянный положительный параметр.

Из физических соображений в дальнейшем считаем, что выполняются условия

$$M > 0, \quad D > 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}(0, t) \leq 0, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial s}(s, t) \leq 0, \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial s \partial t}(s, t) \geq 0, \quad \frac{\partial^3 Q_i}{\partial s \partial t^2}(s, t) \leq 0, \quad 1 + \frac{\partial Q_i}{\partial t}(0, \infty) > 0, \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}(t, t) - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}(0, t) + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial s \partial t}(t, t) \geq 0, \quad 2 + \frac{\partial Q_i}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_i}{\partial s}(t, t) \geq 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Например, этим условиям удовлетворяют ядра вида $Q_i(s, t) = -a_i(t + e^{s-t})$, где $a_i \in (0, 1]$ – некоторые положительные параметры.

Найдем производную от $\Phi(t)$ по t :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \int_0^l \left(M\dot{w}\ddot{w} + \theta M\dot{w}^2 + \theta M w \ddot{w} + \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(t, t) - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2}(t, t) \right) w''^2 + \right. \\ & \left. + \left(D \left(1 - \frac{\partial Q_1}{\partial t}(t, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2 \theta \right) w'' \dot{w}'' + \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{\partial^2 Q_2}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(t, t) - \frac{\partial^2 Q_2}{\partial t^2}(t, t) \right) \times \right. \\ & \left. \times w^2 + \left(\beta_0 \left(1 - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(t, t) - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1 \theta + \rho \theta \alpha \right) w \dot{w} - \frac{1}{2} \dot{N}(t) w'^2 - N(t) w' \dot{w}' + \right. \\ & + \frac{D}{2} \int_0^t \frac{\partial^3 Q_1}{\partial s \partial t^2}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds + D \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) \dot{w}''(x, t) (w''(x, t) - w''(x, s)) ds + \\ & + \beta_0 \int_0^t \frac{\partial^3 Q_2}{\partial s \partial t^2}(s, t) (w(x, t) - w(x, s))^2 ds + \beta_0 \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) \dot{w}(x, t) (w(x, t) - w(x, s)) ds - \\ & \left. - \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) w''^2(x, t) - \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) w''^2(x, s) ds - \right. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$-\frac{\beta_0\theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t)w^2(x, t) - \frac{\beta_0\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w^2(x, s)ds \Big) dx.$$

Для функции $w(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (2.1), с учетом условий (3.7) получим оценку

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) \leq & 2 \int_0^l \left(\dot{w} \left(-D \left(w'''' - \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''''(x, s)ds \right) - \beta_0 \left(w - \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w(x, s)ds \right) - \right. \right. \\ & -N(t)w'' - \beta_1\dot{w}(x, t) - \beta_2w''''(x, t) - \alpha(\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t))) + \theta M\dot{w}^2 + \\ & +\theta w \left(-D \left(w'''' - \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''''(x, s)ds \right) - N(t)w'' - \beta_0 \left(w - \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w(x, s)ds \right) - \right. \\ & -\beta_1\dot{w}(x, t) - \beta_2w''''(x, t) - \alpha(\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t))) + (D + \beta_2\theta)w''\dot{w}'' + \\ & + (\beta_0 + \beta_1\theta + \rho\theta\alpha)w\dot{w} - \frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2 - N(t)w'\dot{w}' - D\dot{w}''(x, t) \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''(x, s)ds - \\ & -\beta_0\dot{w}(x, t) \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w(x, s)ds - \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t)w''^2(x, t) - \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''^2(x, s)ds - \\ & \left. \left. -\frac{\beta_0\theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t)w^2(x, t) - \frac{\beta_0\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w^2(x, s)ds \right) dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2.3)–(2.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{w} \left(w'''' + \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''''(x, s)ds \right) dx &= \int_0^l \dot{w}'' \left(w'' + \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''(x, s)ds \right) dx, \\ \int_0^l \dot{w}w'' dx &= - \int_0^l \dot{w}'w' dx, \quad \int_0^l \dot{w}w'''' dx = \int_0^l \dot{w}''^2 dx, \quad \int_0^l w w'' dx = - \int_0^l w'^2 dx, \\ \int_0^l w w'''' dx &= \int_0^l w''\dot{w}'' dx, \quad \int_0^l w w' dx = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\int_0^l w \left(w'''' + \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''''(x, s)ds \right) dx = \int_0^l w'' \left(w'' + \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''(x, s)ds \right) dx.$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) \leq & -2 \int_0^l \left((\beta_1 + \alpha - \theta M)\dot{w}^2 + \alpha V\dot{w}w' + \beta_2\dot{w}''^2 + D\theta w''^2 + \beta_0\theta w^2 + \right. \\ & + \left(\frac{\dot{N}(t)}{2} - N(t)\theta \right) w'^2 - D\theta w'' \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''(x, s)ds - \beta_0\theta w \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w(x, s)ds + \\ & + \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t)w''^2(x, t) + \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''^2(x, s)ds + \\ & \left. + \frac{\beta_0\theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t)w^2(x, t) + \frac{\beta_0\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t)w^2(x, s)ds \right) dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Оценим последние группы слагаемых в оценке (3.11)

$$-D\theta w'' \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''(x, s)ds + \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t)w''^2(x, t) + \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t)w''^2(x, s)ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds - \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) w''^2(x, t) ds + \\
&\quad + \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) w''^2(x, t) = \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds + \\
&\quad + \frac{D\theta}{2} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) w''^2(x, t) \geq \frac{D\theta}{2} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) w''^2(x, t), \\
&- \beta_0 \theta w \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) w(x, s) ds + \frac{\beta_0 \theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) w^2(x, t) + \frac{\beta_0 \theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) w^2(x, s) ds = \\
&= \frac{\beta_0 \theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) (w(x, t) - w(x, s))^2 ds - \frac{\beta_0 \theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) w^2(x, t) ds + \\
&\quad + \frac{\beta_0 \theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) w^2(x, t) \geq \frac{\beta_0 \theta}{2} \left(\frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) \right) w^2(x, t).
\end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в (3.11), получим

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) \leq &-2 \int_0^l \left((\beta_1 + \alpha - \theta M) \dot{w}^2 + \alpha V \dot{w} w' + \frac{D\theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) w''^2 + \right. \\
&\left. + \beta_2 \dot{w}''^2 + \frac{\beta_0 \theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) \right) w^2 + \left(\frac{\dot{N}(t)}{2} - N(t)\theta \right) w'^2 \right) dx. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами Релея [5]:

$$\begin{aligned}
\int_0^l w''^2(x, t) dx &\geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, & \int_0^l w''^2(x, t) dx &\geq \mu_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \\
\int_0^l \dot{w}''^2(x, t) dx &\geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, & \int_0^l w'^2(x, t) dx &\geq \eta_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где λ_1 , μ_1 , η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \mu\psi$, $\psi'' = -\eta\psi$, $x \in (0, l)$ с краевыми условиями (2.3)–(2.6).

Учитывая (3.13), из (3.12) получим

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) \leq &-2 \int_0^l \left\{ \alpha V \dot{w} w' + \left(\frac{\lambda_1 D\theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) + \frac{\dot{N}(t)}{2} - N(t)\theta \right) w'^2 + \right. \\
&\left. + [\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1 \beta_2] \dot{w}^2 + \frac{\beta_0 \theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) \right) w^2 \right\} dx. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Согласно неравенствам (3.6), (3.7) квадратичная форма относительно w под знаком интеграла в (3.14) будет положительно полуопределена, а квадратичная форма относительно \dot{w}, w' с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2(\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1 \beta_2) & \alpha V \\ \alpha V & \lambda_1 D\theta \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta \end{pmatrix}$$

согласно критерию положительной полуопределенности будет положительно полуопределенной, если выполняются условия:

$$\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1 \beta_2 > 0, \quad (3.15)$$

$$2(\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1\beta_2) \left(\lambda_1 D\theta \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta \right) - \alpha^2 V^2 \geq 0.$$

Таким образом, с учетом (3.15) из (3.14) окончательно получим оценку производной

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \tag{3.16}$$

Используя неравенство $2w_0\dot{w}_0 \leq w_0^2 + \dot{w}_0^2$, оценим начальное значение функционала

$$\begin{aligned} \Phi(0) = \int_0^l \left(M\dot{w}_0^2 + 2\theta M w_0 \dot{w}_0 + (D + \beta_2\theta) w_0''^2 + (\beta_0 + \beta_1\theta + \rho\theta\alpha) w_0^2 - \right. \\ \left. - N(0)w_0'^2 \right) dx \leq \Phi_2(0) = \int_0^l \left(M(1 + \theta)\dot{w}_0^2 + (D + \beta_2\theta) w_0''^2 + \right. \\ \left. + (\beta_0 + \beta_1\theta + \rho\theta\alpha + \theta M) w_0^2 - N(0)w_0'^2 \right) dx, \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $w_0 = w(x, 0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $w_0' = w'(x, 0)$, $w_0'' = w''(x, 0)$.

Пусть выполняется неравенство

$$\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \geq 0, \tag{3.18}$$

тогда, используя неравенства (3.13) и условия (3.6), (3.7), оценим функционал (3.5) следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \left(\beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1\theta + \alpha\theta \right) w^2 + \right. \\ \left. + \left[\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \right] w'^2 \right\} dx \geq \Phi_1(t) = \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \right. \\ \left. + \left(\beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1 \left[\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \right] \right) w^2 \right\} dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Квадратичная форма относительно w , \dot{w} под знаком интеграла в (3.19) согласно критерию Сильвестра будет положительно определенной, если выполняется условие

$$\beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1 \left[\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \right] > M\theta^2. \tag{3.20}$$

Тогда $\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0$.

Таким образом, получена система неравенств (3.6), (3.7), (3.15), (3.18), (3.20).

Введем обозначения

$$D_1(t) = D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right), \quad \beta_{01}(t) = \beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right), \tag{3.21}$$

$$D_2(t) = \frac{D}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right).$$

Рассмотрим систему (3.15), (3.18), (3.20):

$$\begin{cases} \beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1\beta_2 > 0, & \lambda_1 (D_1(t) + \beta_2\theta) - N(t) \geq 0, \\ 2(\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1\beta_2) \left(2\lambda_1\theta D_2(t) + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta \right) - \alpha^2 V^2 \geq 0, \\ \beta_{01}(t) + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1 [\lambda_1 (D_1(t) + \beta_2\theta) - N(t)] > M\theta^2. \end{cases} \tag{3.22}$$

Дальнейшая задача – проанализировать систему неравенств (3.22) и определить значения параметра θ . Для этого разрешим каждое неравенство системы относительно θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta > 0, \quad \lambda_1 D_1(t) - N(t) > 0, \quad \lambda_1 D_2(t) - N(t) > 0, \\ 2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \theta < \frac{\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2}{M}, \\ \theta \geq \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} - \\ - \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \theta \leq \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} + \\ + \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \theta \geq -\frac{\beta_2}{D_1(t)}, \\ \theta \geq -\frac{\lambda_1 D_1(t) - N(t)}{\lambda_1 \beta_2}, \\ \theta < \frac{\beta_1 + \alpha + \eta_1 \lambda_1 \beta_2 + \sqrt{(\beta_1 + \alpha + \eta_1 \lambda_1 \beta_2)^2 + 4M(\eta_1 \lambda_1 D_1(t) - \eta_1 N(t) + \beta_{01}(t))}}{2M}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Последние три неравенства выполняются в силу остальных неравенств системы (3.23), поэтому, исключая из системы параметр θ , окончательно получим условия устойчивости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 D_1(t) - N(t) > 0, \quad \lambda_1 D_2(t) - N(t) > 0, \\ 2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \max \left(0, \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} \right) < \\ < \min \left(\frac{\beta_1 + \alpha \rho + \mu_1 \beta_2}{M}, \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} \right). \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Так как при условиях (3.6), (3.7), (3.24) функционал (3.5) удовлетворяет условиям леммы 3.1, т.е. $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ согласно (3.16), $\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0$ согласно (3.19), $\Phi(0) \leq \Phi_2(0)$ согласно (3.17), то в соответствии с леммой 3.1 решение $w(x, t)$ и производная $\dot{w}(x, t)$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных условий. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если функция $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3)–(2.6) и выполняются условия (3.6), (3.7), (3.24), то решение $w(x, t)$ уравнения (2.1) и производная $\dot{w}(x, t)$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.*

4. Заключение

На основе предложенной математической модели колебаний вязкоупругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа проведено исследование устойчивости этой пластины. Модель описывается интегро-дифференциальным уравнением с частными производными для неизвестной функции прогиба пластины. С помощью построенного функционала получены достаточные условия устойчивости решений этого уравнения. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонную массу пластины, изгибающую жесткость пластины, сжимающее (растягивающее) пластину усилие, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициент жесткости слоя обжатия и ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала пластины и слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механической системы, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599 и № 15-41-02455-р-поволжье-а.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 247 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в аэроупругости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **11:2** (2009), 35–42.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УЛГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
4. Кийко И. А., Показеев В. В., “К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа”, *Механика жидкости и газа*, 2009, № 1, 159–166.
5. Коллатц А., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 504 с.
6. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y., “Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **7**, 2014, № 6, 1133–1148.
7. Kounadis A.N., “Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42:1** (2007), 24–35.
8. Vedenev V.V., “Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds”, *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.
9. Willems S., Gulhan A. and Esser B., “Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow”, *Progress in Flight Physics*, 2013, № 5, 285–308.

Investigation of stability of viscoelastic element of construction in supersonic flow

© A. V. Ankilov³, P. A. Velmisov⁴

Abstract. The stability of deformable element in the form of a plate in the supersonic flow of ideal gas is investigated. Material aging, i.e. change of its physico-mechanical properties in the course of time, is taken into account. The model of aging viscoelastic body is applied where tension at any point depends on background of material's deformation in this point, and connection between tension and deformation is described by Volterra-Feucht's equation. Aerodynamic pressure upon a plate is defined according to the "piston" theory of A.A. Ilyushin. Based on the functional established in the paper the sufficient conditions for stability of the solution of partial integro-differential equation describing the plate dynamics are obtained.

Key Words: aeroelasticity, mathematical modeling, dynamical stability, plate, supersonic gas flow, differential equation, functional

³ Associate professor of Higher Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru

⁴ Head of Higher Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru