УДК 517.938

Гетероклинические кривые градиентно-подобных диффеоморфизмов и топология несущего многообразия

© **В. З. Гринес**[1], **Е. Я. Гуревич**[2], **О. В. Починка**[3]

Аннотация. При изучении детерминированных процессов, описываемых системами Морса-Смейла, особую роль играют некомпактные гетероклинические кривые, принадлежащие пересечениям устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек. В частности, такие кривые являются математическими моделями сепараторов в магнитном поле плазмы. В работе рассматривается класс градиентно-подобных диффеоморфизмов на трехмерных многообразиях, периодические точки которых и часть их инвариантных многообразий образуют непересекающиеся ручно вложенные поверхности. В работе устанавливается, что число таких поверхностей конечно и все они имеют один и тот же род. Основным результатом работы является предъявление точной нижней оценки числа гетероклинических кривых данного диффеоморфизма из рассматриваемого класса. Эта оценка определяется родом поверхностей и их количеством. Кроме того, в работе описан топологический тип многообразий, допускающих рассматриваемые диффеоморфизмы.

Ключевые слова: структурно-устойчивые динамические системы, гетероклинические кривые, локально-тривиальное расслоение над окружностью

Из классических работ [1], [7] следует, что грубые (структурно устойчивые) потоки на поверхностях не имеют траекторий, соединяющих два седловых состояния равновесия (гетероклинических траекторий. В случае, когда несущее многообразие имеет размерность три и выше, грубые потоки могут иметь такие траектории, а грубые диффеомофизмы могут обладать гетерклиническим пересечениями инвариантных многобразий различных седловых периодических точек. Если фазовое пространство диффеоморфизма трехмерно, то одномерные гетероклинические перечения распадаются на непересекающиеся кривые, называемые гетероклиническими. При изучении детерминированных процессов, описываемых системами Морса-Смейла, особую роль играют некомпактные гетероклинические кривые, которые в случае потока являются гетероклиническими траекториями. В серии работ Е. Приста и его сотрудников (см. [8]-[9]) большое внимание уделено проблеме описания топологии магнитного поля в короне Солнца, важную роль в которой играют так называемые сепараторы. Математической моделью сепараторов являются как раз гетероклинические траектории и кривые, а вопрос об их существовании является одной из принципиальных проблем магнитной гидродинамики. В работе [2] найдено эффективное достаточное условие существования гетероклинических траекторий и кривых, которое удалось применить в работе [3] для установления существования сепараторов в магнитном поле короны Солнца. В работе [6] надены новые достаточные условия существования гетероклинических траекторий и кривых для широких классов динамических систем на трехмерных многообразиях, которым дано название систем с поверхностной динамикой. В настоящей работе дается точная нижняя оценка числа гетероклинических кривых для таких систем. Полученные результаты позволят найти новые достаточные условия существования сепараторов в магнитных полях специального вида.

---

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; vgrines@hse.ru.

[2] Доцент кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; egurevich@hse.ru.

[3] Заведующая кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; opochinka@hse.ru.

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ связного замкнутого гладкого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит только из гиперболических периодических точек и для любых различных седловых периодических точек $p, q \in \Omega_f$ инвариантные многообразия W^s_p, W^u_q либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально.

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса-Смейла. Непустое пересечение $W^s_p \cap W^u_q$, где p, q — различные седловые точки диффеоморфизма f, называется *гетероклиническим*. В случае $dim(W^s_p \cap W^u_q) = 1$ компонента связности пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической кривой*, а в случае $dim(W^s_p \cap W^u_q) = 0$ любая точка пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической точкой*. Диффеоморфизм f называется *градиентно-подобным*, если из условия $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$ следует, что размерность множества W^u_p меньше размерности множества W^u_q. Это условие означает, что если неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ не содержит гетероклинических точек, то диффеоморфизм f является градиентно-подобным.

С. Смейл в работе [10] (Theorem A) показал, что градиентный поток функции Морса на произвольном многообразии M^n может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1-топологии) потоком Морса-Смейла без замкнутых траекторий, что доказывает существование градиентно-подобных диффеоморфизмов на любом многообразии (например, являющихся сдвигами на единицу времени вдоль траекторий таких потоков Морса-Смейла).

Всюду ниже будем предполагать, что многообразие M^3 ориентируемо. В работе [2] доказано, что если сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ Морса-Смейла не имеет гетероклинических кривых, то многообразие M^3 диффеоморфно либо сфере S^3, либо связной сумме многообразий $S^2 \times S^1$. Отсюда, в частности, следует, что если трехмерное фазовое пространство диффеоморфизма Морса-Смейла отлично от сферы и связной суммы многообразий $S^2 \times S^1$, блуждающее множество диффеоморфизма необходимо содержит гетероклинические кривые.

В работе [3] (теорема 3) доказано, что если M^3 неприводимо (такое, что каждая цилиндрически вложенная двумерная сфера ограничивает в нем шар), а диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ – полярный (то есть является диффеоморфизмом Морса-Смейла, чье неблуждающее множество содержит в точности один источник, один сток и конечное число седловых периодических точек), то двумерное инвариантное мнообразие каждой седловой периодической точки содержит гетероклиническую кривую, а также показано, как этот результат применяется для решения проблемы о существовании сепараторов в магнитном поле плазмы. Для случая, когда многообразие M^3 является линзой $L_{p,q}$, а множество седловых точек полярного диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит в точности из двух точек, инвариантные мнообразия которых тривиально вложены, этот результат может быть усилен: в работе [4] показано, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма содержит как минимум p гетероклинических кривых.

В настоящей работе выделяется класс диффеоморфизмов Морса-Смейла, несущее ориентируемое трехмерное многообразие диффеоморфизма Морса-Смейла является локально-тривиальным расслоением над окружностью, и дается нижняя оценка числа гетероклинических кривых таких диффеоморфизмов.

Для точной формулировки результатов приведем несколько определений.

Пусть $\mathbb{S}_g$ — ориентируемая поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g и $e : \mathbb{S}_g \to M^3$ — топологическое вложение. Поверхность $S_g = e(\mathbb{S}_g)$ называется *локально плоской*, если для любой точки $p \in S_g$ существует окрестность $U_p \subset M^3$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^3$ такие, что множество $h_p(S_g \cap U_p)$ является координатной плоскостью в пространстве $\mathbb{R}^3$. В силу работы [5] локально плоская поверхность является *цилиндрически* *вложенной*, то есть существует такое топологическое вложение $h : \mathbb{S}_g \times [-1;1] \to M^3$, что $h(\mathbb{S}_g \times \{0\}) = S_g$.

Для диффеоморфизма Морса-Смейла $f\colon M^3 \to M^3$ обозначим через Ω^i_f множество всех его периодических точек, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0,1,2,3\}$, и положим $\Sigma_f = \Omega^1_f \cup \Omega^2_f$. Будем говорить, что сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ обладает поверхностной динамикой, если множество Σ_f представляется в виде дизъюнктного объединения двух подмножеств $\Sigma_{\mathcal{A}}, \Sigma_{\mathcal{R}}$ таких, что каждая компонента связности множеств $\mathcal{A} = W^u_{\mathcal{A}} \cup \Omega^0_f$, $\mathcal{R} = W^s_{\mathcal{R}} \cup \Omega^3_f$ является локально плоской ориентируемой поверхностью. Обозначим класс таких диффеоморфизмов $G(M^3)$.

В работе устанавливается, что топология несущего многообразия диффеоморфизмов из класса $G(M^3)$ описывается следующей конструкцией.

Пусть $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (гомеоморфизм склейки). Обозначим через $M^3_{g,\tau}$ пространство орбит действия группы $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$, порожденной степенями гомеоморфизма $\gamma\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, определенного формулой $\gamma(z,r) = (\tau(z), r-1)$ и через $p_{g,\tau}\colon \mathbb{S}_g \times \mathbb{R} \to M^3_{g,\tau}$ естественную проекцию. Естественная проекция индуцирует на $M^3_{g,\tau}$ структуру топологического многообразия. Исходя из классических результатов можно утверждать, что любое компактное трехмерное топологическое многообразие допускает гладкую структуру, причем единственную, поэтому в дальнейшем будем предполагать многообразие $M^3_{g,\tau}$ гладким.

Следующее утверждение доказано в работе [6].

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть диффеоморфизм f принадлежит классу $G(M^3)$, тогда:*

1) граница каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ состоит в точности из одной компоненты связности множества $\mathcal{A}_f$ и одной компоненты связности множества $\mathcal{R}_f$;

2) замыкание cl V каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}_{g_f} \times [0,1]$;

3) существует число $g_f \geq 0$ и сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\tau_f\colon \mathbb{S}_{g_f} \to \mathbb{S}_{g_f}$ такие, что M^3 диффеоморфно многообразию $M^3_{g_f,\tau_f}$.

Из утверждения 1.1. следует, что множества $\mathcal{A}_f$ и $\mathcal{R}_f$ состоят из одинакового числа компонент связности, которое обозначим через k_f ($k_f \geq 1$).

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.3. *Неблуждающее множество произвольного диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ содержит не менее чем $12 g_f k_f$ гетероклинических кривых.*

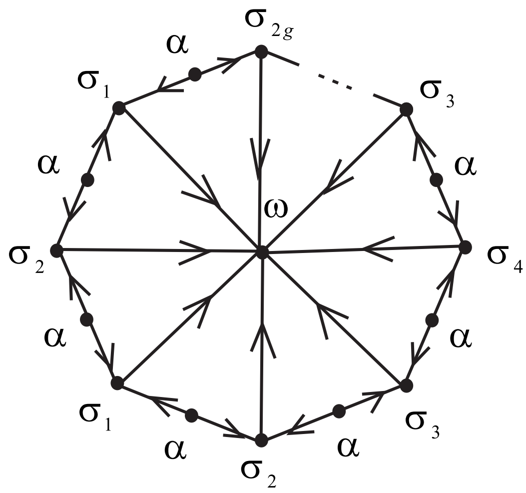

Рисунок **1.1**

Вспомогательный диффеоморфизм Морса-Смейла на поверхности рода g

Простейшие примеры диффеоморфизмов из класса $G(M^3)$, доказывающие точность оценки, приведенной в теореме 1.1, строятся следующим образом. Пусть $\varphi_g : \mathbb{S}_g \to \to \mathbb{S}_g$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит в точности из одной стоковой, одной источниковой и $2g$ седловых неподвижных точек (фазовый портрет диффеоморфизма f на поверхности рода $g > 0$ приведен на рис. **??**, где в качестве модели поверхности использован $2g$-угольник, являющийся ее разверткой), $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени вдоль потока $\dot{s} = \sin 2\pi ks(mod1)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда диффеоморфизм f, заданный формулой $f(x,s) = (\varphi_g(x), \psi(s))$, $x \in \mathbb{S}_g$, $s \in \mathbb{S}_1$, принадлежит классу $G(\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1)$ и имеет в точности $12gk$ гетероклинических кривых.

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект «Топологические методы в динамике», ТЗ-98) при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-03687 А).

Список литературы

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247-250..

2. Bonatti C. , Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and its Applications*, **117** (2002,), 335 – 344.

3. Grines V., Zhuzhoma E. V., Pochinka O., Medvedev T. V., “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **294** (2015), 1-5.

4. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56.

5. Brown, Morton (1962), “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Annals of Mathematics, Second series*, **75** (1962), 331-341.

6. Гринес В. З, Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х., “Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса–Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы”, *Нелинейная динамика*, **10**:4 (2014), 427–438.

7. M.Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **2** (1963), 179 - 180.

8. E.R. Priest, *Solar Magneto-Hydrodynamics*, D. Reidel, Holland, 1982.

9. E. Priest, T. Forbes, *Magnetic Reconnection. MHD Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

10. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.

Дата поступления 9.05.2016

Heteroclinic Curves of Gradient-like Diffeomorphsms and the Topology of Ambient Manifolds

© **V. Grines**[4], **E.Gurevich**[5], **O. Pochinka**[6]

Abstract. In the study of deterministic processes described by the Morse-Smale systems noncompact heteroclinic curves play special role. These curves belong to intersections of stable and unstable manifolds of saddle periodic points. In particular, these curves are mathematical models of magnetic separators in the plasma field. We consider the class of gradient-like diffeomorphisms on three-dimensional manifolds such that their periodic points and a part of their invariant manifolds form disjoint tamely embedded surfaces. We prove that the number of the surfaces is finite and all of them have the same genus. The main result is presentation of the exact lower estimation for the number of heteroclinic curves of any diffeomorphism from considered class. This estimation is defined by genus of surfaces and their number. In addition the paper describes the topological type of manifolds which admit considered diffeomorphisms.

Key Words: structurally stable dynamical systems, heteroclinic curves, mapping torus

[4] Professor of Chair of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, vgrines@hse.ru

[5] Associated Professor of Chair of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, egurevich@hse.ru.

[6] The Head of Chair of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, opochinka@hse.ru.