Прикладная математика и механика

УДК 533.72

Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в зависимости от числа Кнудсена

© О. В. Гермидер [1], В. Н. Попов [2]

Аннотация. В рамках кинетического подхода найдено решение задачи о теплопереносе в длинном канале прямоугольного сечения. В канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль оси симметрии канала. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано кинетическое уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенках канала - модель диффузного отражения. Отклонение состояния газа от равновесного полагается малым. Это позволило рассмотреть решение задачи в линеаризованном виде. Построен профиль вектора потока тепла в канале, а также вычислен поток тепла через поперечное сечение канала в зависимости от отношения сторон прямоугольного сечения и значений числа Кнудсена. Проведен анализ полученных выражений при переходе к свободномолекулярному и гидродинамическому режимам.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Вильямса, модель диффузного отражения, аналитические решения, число Кнудсена

1. Введение

Исследование течений в микроканалах имеет большое значение для применения новых технологий [1]. Предметом изучения динамики разреженного газа являются, главным образом, процессы тепло-массообмена и движения газов при значительных степенях разрежения [2]. В силу развития нанотехнологий в последние время особое внимание привлекают исследования течений разреженного газа в каналах произвольного поперечного сечения. Так в [3], [4], [5] рассматривалось течение разреженного газа в прямоугольном канале, в [6] – в канале треугольного сечения, в [7]-[10] – в цилиндрическом канале, в [11] – между двумя концентрическими цилиндрами, в [12] – в канале эллиптического сечения. В [5] и [10] получены профиль вектора потока тепла и поток тепла с помощью уравнения Вильямса при постоянном градиенте температуры, но явной зависимости построенного решения уравнения Вильямса от числа Кнудсена не приведено. В [4] построены профили массовой скорости и потока тела в свободномолекулярном режиме. В [3], [6]-[9], [11], [12] для описания процессов переноса использовались уравнения с постоянной частотой столкновений. В то время как более реалистичным является предположение о постоянстве длины свободного пробега молекул газа, по крайней мере, для молекул, взаимодействие которых между собой можно аппроксимировать моделью твердых сфер. Это предположение эквивалентно тому, что частота столкновений молекул должна быть пропорциональна абсолютной величине их тепловой скорости [13], [14]. Последнее предположение приводит к следующей коррекции БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения

[1] Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; o.germider@narfu.ru

[2] Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@narfu.ru

Больцмана [13]

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{v}\nabla f = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f).$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, $\beta = m/(2k_B T_0)$, $\gamma = 5/2$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T_0 – температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T_*}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2\right).$$

Все основные свойства интеграла столкновений Больцмана при такой коррекции сохраняются, однако величины n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$, входящие в f_*, уже не локальные плотность, температура и скорость, а некоторые параметры, которые выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [13]. Полученное в результате такой коррекции модельное уравнение называется БГК моделью кинетического уравнения Больцмана с частотой столкновений, зависящей от скорости, или модельным уравнением Вильямса. Полученные в [3], [6], [8], [11], [12] результаты относятся к задачам, связанным с переносом массы газа в каналах при наличии параллельного стенкам канала градиента давления. Целью представленной работы является вычисление потока тепла разреженного газа под действием продольного градиента температуры в канале прямоугольного сечения в зависимости от значений числа Кнудсена. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе использовано уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия - модель диффузного отражения.

2. Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим прямоугольный канал со сторонами сечения a' и b', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль оси симметрии канала z'. Кинетическое уравнение Вильямса в выбранной системе координат запишем в виде

$$\upsilon_x \frac{\partial f}{\partial x'} + \upsilon_y \frac{\partial f}{\partial y'} + \upsilon_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f). \tag{2.1}$$

В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения молекул газа стенками канала. В этом случае [15]:

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}), \quad \mathbf{vn} > 0, \tag{2.2}$$

где $f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, $f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесная функция распределения с параметрами, заданными на стенках, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к стенке канала, направленный в сторону газа,

$$f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z) \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T_0}\mathbf{v}^2\right). \tag{2.3}$$

Будем полагать изменение давления на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае решение задачи можно получить в линеаризованном виде, представив функции f и f_* в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{C})(1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \tag{2.4}$$

$$f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{C})(1 + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \tag{2.5}$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n_0} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\delta T_*}{T_0}. \tag{2.6}$$

Здесь $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2}\exp(-C^2)$ – абсолютный масвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, n_0 – концентрация молекул газа в начале координат, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'/b'$ – безразмерный радиус-вектор, а величины n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$, входящие в (2.6), находим из соотношений [15]:

$$\int \omega M_j f_* d^3\mathbf{v} = \int \omega M_j f d^3\mathbf{v}, \quad j = 0, 1, \ldots, 4, \tag{2.7}$$

$M_0 = 1$, $M_i = m\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, 3$), $M_4 = mv^2/2$.

Подставляя (2.4)-(2.6) в уравнение (2.1), для определения функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ получаем уравнение в безразмерных координатах:

$$\left(C_x\frac{\partial h}{\partial x} + C_y\frac{\partial h}{\partial y} + C_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)\gamma Kn + Ch(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = Ch_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}), \tag{2.8}$$

где $Kn = l_g/b'$ – число Кнудсена. Подставляя (2.4)-(2.6) в (2.7), находим

$$\frac{\delta n_*}{n_0} = \frac{3}{4\pi}\int C\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C} - \frac{1}{8\pi}\int C^3\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C},$$

$$\frac{\delta T_*}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\int C\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C} - \frac{1}{4\pi}\int C^3\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C},$$

$$\mathbf{U}_* = \frac{3}{8\pi}\int C\mathbf{C}\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C}.$$

С учетом сказанного, уравнение (2.8) перепишем в виде

$$\left(C_x\frac{\partial h}{\partial x} + C_y\frac{\partial h}{\partial y} + C_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)\gamma Kn + Ch(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{C}{2\pi}\int C'\exp(-C'^2)k(\mathbf{C}, \mathbf{C}')h(\mathbf{r}, \mathbf{C}')d^3\mathbf{C}', \tag{2.9}$$

где $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$.

Решение уравнения (2.9) ищем в виде разложения по инвариантам столкновений $h_0 = 1$, $h_1 = C_x$, $h_2 = C_y$, $h_3 = C_z$, $h_4 = C^2 - 3/2$. Принимая во внимание, что ось z направлена вдоль градиента температуры, можем записать

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = G_n z + AC_z + G_T z\left(C^2 - \frac{3}{2}\right) + \varphi(\mathbf{C}). \tag{2.10}$$

Здесь G_n и G_T – безразмерные градиенты концентрации молекул газа и температуры:

$$G_n = \frac{b'}{n_0}\frac{dn}{dz'}, \quad G_T = \frac{b'}{T_0}\frac{dT}{dz'}.$$

Учтем, что в линейном приближении $T(z) = T_0(1 + G_T z)$ и $n(z) = n_0(1 + G_n z)$. Тогда из равенства $p(z) = n(z)k_B T(z)$ в предположении постоянства давления, получаем $G_n^{(T)} = -G_T$. Следовательно, выражение (2.10) перепишем в виде

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = AC_z + G_T z\left(C^2 - \frac{5}{2}\right) + \varphi(\mathbf{C}). \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.9), приходим к уравнению относительно $\varphi(\mathbf{C})$:

$$C_zG_T\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\gamma Kn+C\varphi(\mathbf{C})=\frac{C}{2\pi}\int C'\exp(-C'^2)k(\mathbf{C},\mathbf{C}')\varphi(\mathbf{C}')d^3\mathbf{C}'. \qquad (2.12)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (2.12) имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{C})=-\gamma Kn\left(C^2-\frac{5}{2}\right)G_T\frac{C_z}{C}. \qquad (2.13)$$

Тогда, исходя из статистического смысла функции распределения, и того факта, что вектор массовой скорости газа имеет только одну ненулевую z-компоненту U_0 [15]:

$$U_0=\pi^{-3/2}\int\exp\left(-C^2\right)C_zh(\mathbf{r},\mathbf{C})d^3\mathbf{C}=\frac{G_T}{3\sqrt{\pi}}+\frac{A}{2},$$

находим $A=2U_0-2G_T/(3\sqrt{\pi})$. Таким образом, выражение (2.11) примет вид:

$$h(\mathbf{r},\mathbf{C})=2U_0C_z+G_T\left(\left(z-\gamma Kn\frac{C_z}{C}\right)\left(C^2-\frac{5}{2}\right)-\frac{2G_z}{3\sqrt{\pi}}\right). \qquad (2.14)$$

Соотношения (2.4) и (2.14) определяют в линейном приближении решение уравнения (2.1). Однако это решение не удовлетворяет граничному условию (2.2), так как в линейном приближении функция $f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v})$, определяемая выражением (2.3), имеет вид:

$$f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v})=f_0(C)\left(1+G_T\left(C^2-5/2\right)z\right). \qquad (2.15)$$

Для того, чтобы условие (2.2) выполнялось, решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v})=f_0(C)\left(1+h(\mathbf{r},\mathbf{C})+C_zZ_0(x,y,C_x,C_y)\right). \qquad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.9), с учетом (2.15) для нахождения $Z_0(x,y,C_x,C_y)$ приходим к уравнению

$$\left(C_x\frac{\partial Z_0}{\partial x}+C_y\frac{\partial Z_0}{\partial y}\right)\gamma Kn+CZ_0(x,y,C_x,C_y)=$$
$$=\frac{C}{2\pi}\int C'\exp(-C'^2)C_z'Z_0(x,y,C_x',C_y')k(\mathbf{C},\mathbf{C}')d^3\mathbf{C}', \qquad (2.17)$$

с граничным условием

$$Z_0(x,y,C_x,C_y)|_s=-2U_0+G_T\gamma Kn\left(C-\frac{5}{2C}\right)+\frac{2G_T}{3\sqrt{\pi}},\quad \mathbf{Cn}>0. \qquad (2.18)$$

Принимая во внимание вид граничного условия (2.18), для нахождения решения уравнения (2.17) образуем на множестве функций, зависящих от модуля молекулярной скорости, скалярное произведение весом $g(C)=C^5\exp(-C^2)$:

$$(f_1,f_2)=\int\limits_0^{+\infty}g(C)f_1(C)f_2(C)dC.$$

Функцию $Z_0(x,y,C_x,C_y)$ раскладываем по ортогональным функциям $e_1=1$, $e_2=C-5/(2C)$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю записанного выше интеграла):

$$Z_0(x,y,C_x,C_y)=Z_1(x,y,\varphi,\theta)+G_T\gamma Kn(C-5/(2C))Z_2(x,y,\varphi,\theta). \qquad (2.19)$$

При записи (2.19) перешли в пространстве скоростей к сферической системе координат $C_x = C\cos\varphi\sin\theta$, $C_y = C\sin\varphi\sin\theta$, $C_z = C\cos\theta$, где углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z, соответственно. Подставляя (2.19) в (2.17), в силу ортогональности функций e_1, e_2 приходим к системе двух незацепленных уравнений

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial Z_1}{\partial y}\sin\varphi\right)\gamma Kn\sin\theta + Z_1(x,y,\varphi,\theta) =$$
$$= \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta'\sin\theta' d\theta'\int\limits_0^{2\pi} Z_1(x,y,\varphi',\theta')d\varphi', \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial Z_2}{\partial y}\sin\varphi\right)\gamma Kn\sin\theta + Z_2(x,y,\varphi,\theta) = 0. \quad (2.21)$$

с граничными условиями

$$Z_1(x,y,\varphi,\theta)|_s = -2U_0 + \frac{2G_T}{3\sqrt{\pi}}, \quad \mathbf{Cn} > 0,$$
$$Z_2(x,y,\varphi,\theta)|_s = 1, \quad \mathbf{Cn} > 0. \quad (2.22)$$

Из статистического смысла функции распределения, отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением [15]:

$$q_z'(x,y) = \frac{m}{2}\int (\upsilon_z - u_z(x',y'))|\mathbf{v} - \mathbf{u}(x',y')|^2 f(\mathbf{r}',\mathbf{v})d^3\mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}}q_z(x,y), \quad (2.23)$$

где безразмерная компонента вектора потока тепла:

$$q_z(x,y) = \pi^{-3/2}\int \exp\left(-C^2\right)C_z\left(C^2 - 5/2\right)\left(h(\mathbf{r},\mathbf{C}) + C_z Z_0(x,y,C_x',C_y')\right)d^3\mathbf{C} =$$
$$= -\frac{3G_T\gamma Kn}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} Z_2(x,y,\varphi,\theta)d\varphi\right). \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что функция $Z_1(x,y,\varphi,\theta)$ не вносит вклада в вектор потока тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(x,y,\varphi,\theta)$ из уравнения (2.21) с граничным условием (2.22). Граничное условие (2.22) не являются однородным. Для того чтобы привести его к однородному, введем функцию

$$Z(x,y,\varphi,\theta) = Z_2(x,y,\varphi,\theta) - 1, \quad (2.25)$$

для которой согласно (2.21) приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial Z}{\partial y}\sin\varphi\right)\gamma Kn\sin\theta + Z(x,y,\varphi,\theta) + 1 = 0. \quad (2.26)$$

Граничное условие (2.22) для $Z(x,y,\varphi,\theta)$ перепишем в виде:

$$Z(\pm a/2, y,\varphi,\theta) = 0, \quad \pm\cos\varphi < 0, \quad (2.27)$$
$$Z(x,\pm 1/2,\varphi,\theta) = 0, \quad \pm\cos\varphi < 0. \quad (2.28)$$

где $a = a'/b'$.

Решение уравнения (2.26) с граничными условиями (2.27) и (2.28) находим методом характеристик [16]. Система уравнений характеристик для уравнения (2.26) имеет вид

$$\frac{dx}{\gamma Kn\cos\varphi\sin\theta}=\frac{dy}{\gamma Kn\sin\varphi\sin\theta}=-\frac{dZ}{Z(x,y,\varphi,\theta)+1}=dt. \tag{2.29}$$

Поучаем функцию $Z(x,y,\varphi,\theta)$ из системы (2.29)

$$Z(x,y,\varphi,\theta)=\exp(-t)-1. \tag{2.30}$$

Здесь значения параметра t, учитывая граничные условия (2.27) и (2.28), находим при отражении молекул от правой стенки

$$t_1=\frac{2x-a}{2\gamma Kn\cos\varphi\sin\theta},\quad \varphi_0\le\varphi\le\varphi_1,\quad \varphi_0=\arctan\frac{2y+1}{2x-a}+\pi,$$
$$\varphi_1=\arctan\frac{2y-1}{2x-a}+\pi, \tag{2.31}$$

при отражении молекул от верхней стенки

$$t_2=\frac{2y-1}{2\gamma Kn\sin\varphi\sin\theta},\quad \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2,\quad \varphi_2=\arctan\frac{2y-1}{2x+a}+2\pi, \tag{2.32}$$

при отражении молекул от левой стенки

$$t_3=\frac{2x+a}{2\gamma Kn\cos\varphi\sin\theta},\quad \varphi_2\le\varphi\le\varphi_3,\quad \varphi_3=\arctan\frac{2y+1}{2x+a}+2\pi, \tag{2.33}$$

при отражении молекул от нижней стенки

$$t_4=\frac{2y+1}{2\gamma Kn\sin\varphi\sin\theta},\quad \varphi_3\le\varphi\le\varphi_4,\quad \varphi_4=\arctan\frac{2y+1}{2x-a}+3\pi. \tag{2.34}$$

Соотношения (2.30)-(2.34) полностью определяют решение уравнения (2.26) с граничными условиями (2.27) и (2.28). Таким образом, функция распределения молекул газа построена.

3. Вычисление потока тепла в канале. Анализ полученных результатов

Подставляя построенную функцию $Z(x,y,\varphi,\theta)$ в (2.25), находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла согласно (2.24):

$$q_z(x,y)=-\frac{3G_T\gamma Kn}{2\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{3}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int\limits_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k}\exp(-t_k)d\varphi\right). \tag{3.1}$$

Соответственно поток тепла через поперечное сечение канала равен [1]

$$J'_Q=\int\limits_{-b'/2}^{b'/2}\int\limits_{-a'/2}^{a'/2}q'_z(x',y')dx'dy'=\frac{p_0}{2\beta^{1/2}}J_Q, \tag{3.2}$$

где J_Q — безразмерный поток тепла:

$$J_Q = \frac{8}{a}\int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{a/2} q_z(x,y)dxdy. \tag{3.3}$$

Значения J_Q, найденные согласно (3.3) с использованием системы компьютерной алгебры Maple 17 при различных значениях числа Кнудсена и отношениях сторон поперечного сечения канала a' и b' приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения $-J_Q/G_T$ при различных значениях a и Kn.

Kn	$a = a'/b'$								
	0,1	0,5	0,9	1	1,01	1,1	5	10	100
0,0001	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
0,001	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042
0,01	0,0380	0,0411	0,0415	0,0415	0,0415	0,0416	0,0418	0,0419	0,0419
0,1	0,1884	0,3195	0,3470	0,3506	0,3510	0,3536	0,3770	0,3803	0,3832
0,5	0,3235	0,7637	0,9414	0,9708	0,9735	0,9965	1,2539	1,2966	1,3349
1	0,3661	0,9344	1,1988	1,2456	1,2500	1,2875	1,7821	1,8837	1,9776
2	0,3966	1,0639	1,4029	1,4657	1,4716	1,5226	2,2973	2,5017	2,7101
5	0,4217	1,1750	1,5838	1,6622	1,6697	1,7341	2,8488	3,2348	3,7440
10	0,4326	1,2248	1,6667	1,7528	1,7610	1,8321	3,1403	3,6608	4,5252
100	0,4457	1,2856	1,7702	1,8663	1,8755	1,9554	3,5537	4,3259	6,5185
1000	0,4476	1,2950	1,7865	1,8843	1,8936	1,9750	3,6278	4,4566	7,2085

Приведенный поток тепла, найденный согласно (3.3), не зависит непосредственно от сторон прямоугольного сечения этого канала, а определяется их отношением $a = a'/b'$ и числом Кнудсена Kn. Для режима течения, близкого к свободномолекулярному ($Kn \gg \gg 0$), выражение (3.3) можно существенно упростить. Раскладывая в ряд по малому параметру $1/Kn$ подынтегральные выражения в (3.3) и ограничиваясь линейными членами разложения, находим

$$J_Q = -\frac{9}{4\sqrt{\pi}a}\int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{a/2}\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{2x-a}{\cos\varphi}d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{2y-1}{\sin\varphi}d\varphi + \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3}\frac{2x+a}{\cos\varphi}d\varphi + \int\limits_{\varphi_3}^{\varphi_4}\frac{2y+1}{\sin\varphi}d\varphi\right)dxdy.$$

Интегралы в последнем выражениии могут быть вычислены аналитически [4]:

$$J_Q = \frac{9}{4\sqrt{\pi}a}\left(\frac{a}{3\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)} + \frac{a}{3\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)} - \right.$$
$$\left. - \ln\left(\sqrt{a^2+1}+a\right) - a\ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+\frac{1}{a}\right)\right). \tag{3.4}$$

При этом для $a \gg 0$ выражение (3.4) имеет логарифмическую особенность $J_Q = = -9\ln(2a)/(4\sqrt{\pi}) - 9/(8\sqrt{\pi})$, что также совпадает с аналогичными результатами, приведенными в [4] для прямоугольного канала и для каналов с бесконечными параллельными стенками [1] в свободномолекулярном режиме. Для режимов течения, близких к гидродинамическому, анализ выражения (3.3) приводит к следующему результату:

$$J_Q = -\frac{15G_TKn}{2\sqrt{\pi}}. \tag{3.5}$$

Таким образом, для режимов, близких к гидродинамическому, значение потока тепла не зависит от размеров прямоугольного сечения a' и b'. Последнее утверждение подтверждается результатами, приведенными в таблице 1 для $Kn \ll 0.001$, а выражение для J_Q в (3.5) совпадает с приведенным в [1].

4. Заключение

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла в канале прямоугольного сечения под действием постоянного градиента температуры. Для различных значений отношений сторон этого сечения построен профиль вектора потока тепла, вычислены значения потока тепла через поперечное сечение канала в широких диапазоне изменения числа Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными выражениями, полученными при условии, что один из размеров канала много меньше другого, — представленные в работе результаты переходят в аналогичные результаты для каналов с бесконечными параллельными стенками. Показано, что в предельных случаях, когда $Kn \ll 1$ и $Kn \gg 1$ полученные в работе результаты переходят в аналогичные значения потока тепла для гидродинамического и свободномолекулярного режимов соответственно.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (Проект № 3628).

Список литературы

1. Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев, *Движение разреженных газов в каналах и микроканалах*, УрО РАН, Екатеринбург, 2008, 230 с.

2. Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов, *Прикладная динамика разреженного газа*, Машиностроение, Москва, 1997, 184 с.

3. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, "Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:7 (2010), 1285–1302.

4. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, "Вычисление потоков массы газа и тепла в канале прямоугольного сечения в свободномолекулярном режиме", *Журнал технической физики*, **86**:6 (2016), 37–41.

5. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, "Вычисление в рамках кинетического подхода потока тепла в длинном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения", *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*, 2015, № 2, 96–106.

6. S. Naris, D. Valougeorgis, "Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice", *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, **27** (2008), 810–822.

7. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, "An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube", *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), 531–550.

8. P. Taheri, M. Bahrami, “Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels”, *Physical Review*, **86** (2012), 1–9.

9. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, “A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct”, *Applied Mathematics*, **5** (2014), 1516–1527.

10. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:1 (2015), 22–29.

11. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Численный анализ винтового течения Куэтта разреженного газа между коаксиальными цилиндрами”, Журнал вычислительной математики и математической физики, **46**, 2006, 527–535.

12. I. Graur, F. Sharipov, “Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27** (2008), 335-345.

13. К. Черчиньяни, *Математические методы в кинетической теории газов*, Мир, М., 1973, 245 с.

14. С. В. Гулакова, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Аналитическое решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля с использованием зеркально-диффузной модели взаимодействия молекул газа со стенками канала”, *Журнал технической физики*, **85**:4 (2015), 1–6.

15. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967, 440 с.

16. М. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964, 830 с.

Дата поступления 27.04.2016

Mathematical modeling of the heat transfer process in a rectangular channel depending on Knudsen number

© O. V. Germider [3], V. N. Popov [4]

Abstract. A solution of heat transfer problem in a long rectangular channel has been found using the kinetic approach. In channel the constant temperature gradient along the axis of symmetry is supported. For the basic equation that describes the kinetics of the process Williams kinetic equation is used. For the boundary condition on the channel walls the model of diffuse reflection is used. The deviation from the state of rarefied gas equilibrium is assumed to be small. It allows to consider the solution of the problem in the linearized form. The heat flow vector profile is constructed in the channel and the heat flow through the channel cross-section is calculated, depending on the ratio lengths of rectangular cross-section and values of the Knudsen number. The results obtained upon transition to the free molecular regime and the hydrodynamic regime of the gas flow are analyzed.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, Williams equation, model of diffuse reflection, analytical solutions, Knudsen number

[3] Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; o.germider@narfu.ru.

[4] Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.