УДК 514.7

Критерий псевдоримановости слоения с трансверсальной линейной связностью

© Н. И. Жукова[1], К. И. Шеина [2]

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы слоение коразмерности q на n-мерном многообразии с трансверсальной линейной связностью допускало трансверсальную инвариантную псевдориманову метрику заданной сигнатуры, параллельную относительно этой связности. В частности, получен критерий римановости слоения с трансверсальной линейной связностью.

Ключевые слова: слоение, линейная связность, группа голономии связности, ростковая группа голономии слоя

1. Введение

В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Работы Б. Рейнхарта, А. Хефлигера, Э. Жиса, И. Карьера, Е. Салем, В. Сергеевского и многих других, а также известные монографии П. Молино [1], Ф. Тондеура [2] и В. Ровенского [3] представляют собой существенный вклад в исследование римановых слоений.

Р.А. Волак в [4] поставил вопрос о нахождении условий, при выполнении которых слоение является римановым.

Р.А. Волаком доказано, что любое полное компактное G-слоение конечного типа являетяся римановым [4]. Аналогичное утверждение доказано для слоений, допускающих трансверсальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка [5] и для полных картановых слоений [6]. В ([7], теорема 5) указан ряд условий, эквивалентных римановости гладкого компактного слоения.

Известен критерий римановости для конформных слоений (M,F) коразмерности q, $q \geq 3$, согласно которому слоение (M,F) риманово тогда и только тогда, когда все его группы голономии относительно компактны ([8], Теорема 1). Этот результат верен и для более широкого класса слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один ([9], Теорема 3).

Псевдориманова геометрия коренным образом отличается от римановой геометрии [10], [11]. Одна из причин — некомпактность псевдоортогональной группы $O(k, n-k)$, соответствующей n-мерной псевдоримановой геометрии, в отличие от ортогональной группы $O(n)$, соответствующей римановой геометрии. В настоящее время псевдоримановы слоения образуют мало исследованный класс слоений.

Пусть (M,F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N,∇^N)-коциклом, причем связность может иметь кручение (см. определение 2.1.), коразмерность слоения (M,F) равна q, а M — n-мерное многообразие, $0 \leq q \leq n$.

Целью данной работы является нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы слоение с трансверсальной линейной связностью было псевдоримановым и римановым.

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; nzhukova@hse.ru

[2] Стажер-исследователь кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; ksheina@hse.ru

Обозначим через $G = GL(q, \mathbb{R}) \times R^q$ полупрямое произведение общей линейной группы $GL(q, \mathbb{R})$ и векторной группы $\mathbb{R}^q$. Группу G можно интерпретировать как группу всех аффинных преобразований $Aff(A^q)$ q-мерного аффинного пространства A^q, а $H = GL(q, R)$ как стационарную подгруппу аффинной группы $Aff(A^q)$ в некоторой точке.

Как известно, любое слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением типа (G, H) (см. [12]). Для него определено слоеное расслоение, которое называется *слоеным расслоением трансверсальных реперов.* Оно представляет собой главное $GL(q, R)$-расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$, со слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и индуцированной $GL(q, R)$-связностью Q, обладающее дополнительными свойствами (Предложение 4.1.). При этом слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется *поднятым слоением* по отношению к (M, F). Слоеное расслоение трансверсальных реперов используется нами далее в этой работе.

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом, а Q — индуцированная связность в слоеном расслоении трансверсальных реперов $\mathcal{R}(M, H)$. Тогда для того, чтобы слоение (M, F) было псевдоримановым, заданным (N, g^N)-коциклом, где g^N — псевдориманова метрика сигнатуры $(k, q-k)$, $0 \leq k \leq q$, параллельная относительно связности ∇^N, необходимо и достаточно существования точки $u \in \mathcal{R}$ такой, что группа голономии $\Phi(u)$ связности Q с опорной точкой u принадлежит псевдоортогональной подгруппе $O(k, q-k)$ группы $GL(q, R)$.*

Следствие 1.1. *Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом. Для того, чтобы (M, F) было лоренцевым слоением, заданным (N, g^N)-коциклом, где лоренцева метрика g^N параллельна относительно ∇^N, необходимо и достаточно, чтобы группа голономии $\Phi(u)$, $u \in \mathcal{R}$, расслоения трансверсальных реперов $\mathcal{R}(M, H)$ была подгруппой группы $O(1, q-1)$.*

Следствие 1.2. *Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом. Слоение (M, F) является римановым, заданным (N, g) коциклом, где $\nabla g = 0$, тогда и только тогда, когда группа голономии $\Phi(u)$, $u \in \mathcal{R}$, расслоения трансверсальных реперов $\mathcal{R}(M, H)$ является относительно компактной подгруппой группы Ли $GL(q, R)$.*

Напомним, что линейная связность ∇ на псевдоримановом многообразии (M, g) называется *метрической*, если метрика g параллельна относительна этой связности, то есть, если $\nabla g = 0$.

В случае, когда (M, F) — нульмерное слоение, из Теоремы 1.1. вытекает следующий критерий Б.Г. Шмидта [13] для связности без кручения.

Следствие 1.3. *Линейная связность без кручения является метрической связностью псевдоримановой метрики заданной сигнатуры тогда и только тогда, когда группа голономии этой связности является подгруппой псевдоортогональной группы данной сигнатуры.*

Напомним, что для любого подмножества V слоеного многообразия M объединение $N(U_i)$ слоев слоения (M, F), пересекающих V, называется *насыщением множества* V.

Пусть (U, φ) — карта на многообразии M, адаптированная к слоению (M, F), $\varphi(U) = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q$, причем $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$ — локальные слои слоения. При этом подмногообразие $D\times = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ называется трансверсальным диском в U.

Для слоений с трансверсальной линейной связностью мы доказываем следующий критерий псевдоримановости, носящий локально-глобальный характер: глобальный по слоям и локальный по трансверсалям.

Теорема 1.2. *Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, (U, φ) — произвольная адаптированная карта многообразия M и D — трансверсальный диск в U. Слоение $(N(U), F)$, индуцированное на насыщении $N(U)$ множества U, является псевдоримановым относительно трансверсальной псевдоримановой метрики сигнатуры $(k, q-k)$, параллельной относительно трансверсальной связности, тогда и только тогда, когда существует сечение $s : D \to \mathcal{R}$ такое, что для любой точки $u \in s(D)$ подгруппа $H(u)$ группы $H = GL(q, \mathbb{R})$, оставляющая инвариантным слой $\mathcal{L}(u)$ поднятого слоения, принадлежит подгруппе $O(k, q-k)$ группы H.*

Следствие 1.1. *Если для слоения (M, F) с трансверсальной линейной связностью существует адаптированная карта (U, φ) многообразия M, обладающая свойствами:*

1) существует сечение $s : D \to \mathcal{R}$ трансверсального диска D в U такое, что для любой точки $u \in s(D)$ подгруппа $H(u)$ группы $H = GL(q, R)$, оставляющая инвариантным слой $\mathcal{L}(u)$ поднятого слоения, принадлежит $O(k, q-k)$;

2) каждый слой слоения пересекает U;

то (M, F) — псевдориманово слоение с трансверсальной инвариантной псевдоримановой метрикой сигнатуры $(k, q-k)$, причем эта метрика параллельна относительно исходной трансверсальной линейной связности.

Следствие 1.2. *Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, (U, φ) — произвольная адаптированная карта многообразия M и D — трансверсальный диск в U. Слоение $(N(U), F)$, индуцированное на насыщении $N(U)$ множества U, является римановым тогда и только тогда, когда существует сечение $s : D \to \mathcal{R}$ такое, что для любой точки $u \in s(D)$ подгруппа $H(u)$ группы $H = GL(q, \mathbb{R})$, оставляющая инвариантным слой $\mathcal{L}(u)$ поднятого слоения, принадлежит ортогональной подгруппе $O(q)$ группы H.*

Следуя [14], мы обозначаем через $P(N, H)$ главное H-расслоение с проекцией $P \to N$.

Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначается множество гладких векторных полей, а через $\mathfrak{F}(M)$ — алгебра гладких функций на многообразии M. Если $\mathfrak{M}$ — гладкое распределение на многообразии M, то через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ будем обозначать множество векторных полей на M, касательных к $\mathfrak{M}$.

Пусть $f : K \to M$ — субмерсия многообразий и $\mathfrak{M}$ — распределение на M, то через $\widetilde{\mathfrak{M}} = f^*\mathfrak{M}$ обозначается распределение на K такое, что $\widetilde{\mathfrak{M}} := \{\widetilde{\mathfrak{M}}_u \,|\, u \in M\}$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}_u := \{X \in T_uK \,|\, f_{*u}(X) \in \mathfrak{M}_x, x = f(u)\}$, f_{*u} — дифференциал отображения f в точке u.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00312, и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году, проект № 98.

2. Основные понятия

2.1. Задание слоения N-коциклом

Пусть N — q-мерное многообразие и M — гладкое n-мерное ($0 \leq q \leq n$) многообразие. В отличие от M связность топологического пространства N не предполагается.

N-коциклом называется семейство $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, обладающее свойствами:

- Множество $\{U_i \,|\, i\in\mathcal{I}\}$ образует открытое покрытие M.
- Отображения $f_i : U_i \to N$ являются субмерсиями на $V_i = f_i(U_i) \subset N$ со связными слоями.
- Если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ для всех $x \in U_i \cap U_j$.

Семейство всех локальных слоев субмерсий f_i из максимального N-коцикла, содержащего данный N-коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, образует базу новой топологии ζ в M. Компоненты линейной связности $L_a, a\in A$, топологического пространства (M,ζ) образуют разбиение F многообразия M, которое называется *слоением, заданным N-коциклом* $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$.

Определение 2.1. *Если на многообразии N существует такая псевдориманова метрика g_N сигнатуры $(k, q-k)$, что каждое локальное преобразование γ_{ij} является изоморфизмом псевдоримановых многообразий, индуцированных на открытых подмножествах, то слоение (M,F) называется псевдоримановым слоением трансверсальной сигнатуры $(k, q-k)$, а метрика g_N называется трансверсальной метрикой. Если при этом g_N — риманова метрика, то слоение (M,F) называется римановым.*

2.2. Определение слоения с трансверсальной линейной связностью

Задание связности в главном расслоении линейных реперов эквивалентно заданию оператора

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X,Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

где $\nabla_X Y$ — ковариантная производная векторного поля Y вдоль X [14]. Пара (M,∇) называется *многообразием линейной или аффинной связности*, а ∇ — линейной связностью на M.

Диффеоморфизм $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ называется *изоморфизмом* многообразий линейной связности $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$ и $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$, если

$$f_*(\nabla^{(1)}_X Y) = \nabla^{(2)}_{f_* X} f_* Y$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M^{(1)})$, где f_* — дифференциал отображения f.

Определение 2.2. *Пусть слоение (M,F) задано N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$. Если на многообразии N существует линейная связность ∇ такая, что каждый локальный диффеоморфизм γ_{ij} является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных ∇ на открытых подмножествах $f_i(U_i\cap U_j)$ и $f_j(U_i\cap U_j)$, то говорят, что (M,F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N,∇)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$.*

3. Послойная псевдориманова метрика в ассоциированном векторном расслоении

Обозначим для краткости, как и выше, $GL(m,R)$ через H. Пусть $P(K,H)$ — главное H-расслоение с проекцией $p : P \to K$ над m-мерным гладким многообразием K.

Будем рассматривать точку $x \in \mathbb{R}^m$ как одностолбцовую матрицу из координат в стандартом базисе. Определим левое действие общей линейной группы $GL(m, R)$ на $\mathbb{R}^m$ следующим образом

$$\rho : H \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q : (A, x) \mapsto Ax, \tag{3.1}$$

где $A \in H$ — невырожденная m-мерная квадратная матрица, а Ax – произведение матриц.

Определим правое действие группы H на произведении $P \times \mathbb{R}^m$ равенством $(u, \xi)\cdot$ $\cdot a\times = (u \cdot a, \rho(a^{-1}) \cdot \xi)$, где $(u, \xi) \in P \times \mathbb{R}^m$, $a \in H$. На пространстве орбит $E = P \times_H \mathbb{R}^m$ естественным образом индуцируется структура гладкого многообразия, а отображение $\pi_E : E \to K : (u, \xi) \cdot H \mapsto u \cdot H$ определяет локально тривиальное векторное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$, которое обозначается через $E(K, \mathbb{R}^m, H, P)$ и называется *ассоциированным с* H*-расслоением* $P(K, H)$.

В стандартном слое $\mathbb{R}^m$ определим скалярное произведение по формуле

$$g_0(\xi, \eta) := -\xi^1\eta^1 - ... - \xi^k\eta^k + \xi^{k+1}\eta^{k+1} + ... + \xi^m\eta^m \tag{3.2}$$

для любых векторов ξ, η из $\mathbb{R}^m$, где $\xi^T = (\xi^1, ..., \xi^m)$, $\eta^T = (\eta^1, ..., \eta^m)$.

Напомним, что $E^m_k = (\mathbb{R}^m, g_0)$ — псевдоевклидово векторное пространство индекса k сигнатуры $(k, m-k)$, а

$$O(k, m) := \{a \in H \mid g_0(a\xi, a\eta) = g_0(\xi, \eta) \;\; \xi, \eta \in |R^m\}-$$

псевдоортогональная подгруппа (того же индекса и сигнатуры) группы $H = GL(m, R)$.

Предположим, что в ассоциированном векторном расслоении $E(K, \mathbb{R}^m, H, P)$ задана послойная псевдориманова метрика g. Обозначим через $\widehat{P}$ множество всех точек $u \in P$ таких, что $g(u(\xi), u(\eta)) = g_0(\xi, \eta)$, где $u : \mathbb{R}^m \to T_xK$, $x = \pi_E(u)$, рассматривается как отображение векторных пространств, определенное по равенству координат векторов в базисе u и в стандартном базисе в $\mathbb{R}^m$ соответственно. Нетрудно проверить, что $\widehat{P}$ — пространство редуцированного подрасслоения со структурной группой $O(k, m-k)$.

Следующее утверждение доказывается аналогично Предложению 1.5 Главы III из [14]. Оно играет ключевую роль в доказательстве Теоремы 1.1.

Предложение 3.1. *Пусть g — послойная псевдориманова метрика в векторном расслоении $E(K, \mathbb{R}^m, H, P)$ и $\widehat{P}(M, O(k, m-k))$ — редуцированное подрасслоение в $P(K, H)$, определяемое указанным выше способом при помощи g. Связность $\widehat{Q}$ в $\widehat{P}$ редуцированна к связности Q в P тогда и только тогда, когда метрика g параллельна относительно связности ∇ в E, индуцированной H-связностью Q.*

4. Слоеное расслоение трансверсальных реперов

Пусть, как и выше, N — возможно несвязное q-мерное многообразие, (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, на n-мерном многообразии M.

Положим для краткости $GL(q, R) = H$. Пусть $P = P(N, GL(q, R))$ — главное H-расслоение реперов над N с проекцией $p : P \to N$. Обозначим через $P_i\times = p^{-1}(V_i)$ — подрасслоение H-расслоения P, где $V_i\times = f_i(U_i)$, и $\mathcal{R}_i\times = f_i^*P_i = \{(x, z) \in U_i \times P_i \mid f_i(x) = = p(z)\}$ — прообраз расслоения P_i относительно субмерсии f_i. Тогда определены проекции $p_i : \mathcal{R}_i \to U_i : (x, z) \mapsto x$ и $f_i : \mathcal{R}_i \to P_i : (x, z) \mapsto z$, где $(x, z) \in \mathcal{R}_i$. Предположим, что на многообразии M задано q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению

F, то есть $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$ для любой точки $x \in M$. Отождествим векторное фактор-расслоение TM/TF с распределением $\mathfrak{M}$.

Будем рассматривать репер $z = \{\varepsilon_i\}$, $i = \overline{1,q}$, в точке $v \in N$, $\varepsilon_i \in T_vN$, как отображение $z : R^q \to T_vN : \lambda^i E_i \mapsto \lambda^i \varepsilon_i$, где E_i — стандартный базис в R^q, а по i идет суммирование от 1 до q. Точку $(x,z) \in \mathcal{R}_i$ мы рассматриваем как такой базис $\{e_\alpha\}$ в пространстве $\mathfrak{M}_x$, что $f_{i*x}e_\alpha = \epsilon_\alpha$, где $\alpha = 1,...,q, \{\epsilon_\alpha\} = z$ — репер в точке $v = f_i(x) \in N$. Назовем пару (x,z) $\mathfrak{M}$*-репером* или *трансверсальным репером в точке* x.

В несвязной сумме $Y = \sqcup_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{R}_i$ введем бинарное отношение S следующим образом. Для $(x,z) \in \mathcal{R}_i, (\tilde{x},\tilde{z}) \in \mathcal{R}_j$ положим $(x,z) = S(\tilde{x},\tilde{z})$, если выполняются следующие два условия: 1) $x = \widetilde{x} \in U_i \cap U_j$ и 2) $\widetilde{z} = \gamma_{ij*x} \circ z$, где γ_{ij*x} — дифференциал локального диффеоморфизма γ_{ij} точке x.

Непосредственная проверка показывает, что введенное отношение S является отношением эквивалентности в Y. Обозначим через $\mathcal{R} = Y/S$ фактор-пространство по S и через $f : Y \to \mathcal{R}$ соответствующее фактор-отображение. Заметим, что сужение $f_{|\mathcal{R}_i} : \mathcal{R}_i \to \widetilde{U}_i := f(\mathcal{R}_i)$ является биекцией для каждого $i \in \mathcal{I}$. Требованием, чтобы все сужения $f|_{\mathcal{R}_i}$ были диффеоморфизмами, мы определим структуру гладкого многообразия в $\mathcal{R}$.

Таким образом, семейство $\{\widetilde{U}_i, \widetilde{f}_i, \{\Gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, где $\widetilde{f}_i := f_i \circ (f|_{\mathcal{R}_i})^{-1} : \widetilde{U}_i \to P_i$ и $\Gamma_{ij} : \widetilde{f}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) \to \widetilde{f}_i(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) : z \mapsto \gamma_{ij*x} \circ z$, для каждого $z \in \widetilde{f}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j)$ является P-коциклом, определяющим некоторое слоение $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, размерность которого совпадает с размерностью слоения (M,F).

Заметим, что $\mathcal{R}(M,H)$ — главное H-расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$. Из определения слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ вытекает, что слои $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M,F). При этом распределение $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$ трансверсально слоению $(\mathcal{R},\mathcal{F})$.

Связность ∇^N на N индуцирует связность Q_0 в H-расслоении $P(N,H)$. Пусть β_0 — $\mathfrak{h}$-значная 1-форма, а θ_0 — каноническая 1-форма связности Q_0 на P. Равенства $\beta|_{\widetilde{U}_i} := \widetilde{f}_i^*\beta_0$ и $\theta|_{\widetilde{U}_i} := \widetilde{f}_i^*\theta_0$, где $i \in \mathcal{I}$, определяют $\mathfrak{h}$-значную 1-форму β и $\mathbb{R}^p$-значную 1-форму θ на многообразии $\mathcal{R}$. H-эквивариантность 1-форм β_0 и θ_0 на P влечет H-эквивариантность 1-форм β и θ на $\mathcal{R}$.

Пусть, как и выше, $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ — полупрямое произведение группы H и абелевой группы $\mathbb{R}^q$, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G. Равенство $\omega(X)\times = \beta(X) + \theta(X)$, где $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$, определяет $\mathfrak{g}$-значную H-эквивариантную 1-форму ω на $\mathcal{R}$. Из определения β и θ следует, что эти 1-формы проектируемы относительно слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$. Поэтому ω — также проектируемая 1-форма, то есть $L_X\omega = 0$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{T\mathcal{F}}(\mathcal{R})$.

Равенство $Q|_{\widetilde{U}_i}\times = \widetilde{f}_i^*(Q_0)\,\forall i \in \mathcal{I}$ определяет связность Q в H-расслоении $\mathcal{R}(M,H)$.

Зафиксируем базис E_α алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$. Тогда в любой точке $u \in \mathcal{R}$ определен трансверсальный репер $X_\alpha\times = (\omega|_{\widetilde{\mathfrak{M}}_u})^{-1}(E_\alpha)$. Следовательно, определено такое гладкое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, что $\omega(X_\alpha) = E_\alpha$. Векторные поля X_α определяют трансверсальную параллелизацию слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, поэтому $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ является трансверсально параллелизуемым или e-слоением.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть (M,F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное $(N,\nabla^N)-$ коциклом. Пусть $H = GL(q,\mathbb{R})$, $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$, а $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли групп Ли H и G соответственно. Тогда определены:*

1) главное H-расслоение $\pi : \mathcal{R} \to M$;

2) H-инвариантное e-слоение $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, слои которого посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M,F);

3) $\mathfrak{h}$-значная 1-форма β и $\mathfrak{g}$-значная 1-форма ω на $\mathcal{R}$, обладающие следующими свойствами:

(i) $\beta(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{g}$, где A^* — фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу A;

(ii) равенство $R_a^*\beta = Ad_G(a^{-1})\omega$ выполняется для каждого $a \in H$, где Ad_G — присоединенное представление группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$;

(iii) производная Ли $L_X\omega$ равна нулю для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{T\mathcal{F}}(\mathcal{R})$;

(iv) β — 1-формой связности Q, которая является трансверсально проектируемую относительно $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, в H-расслоении $\mathcal{R}(M,H)$.

Определение 4.1. *Главное H-расслоение $\pi:\mathcal{R}\to M$, удовлетворяющее предложению 4.1., называется слоеным расслоением трансверсальных реперов, а e-слоение $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ называется поднятым слоением* [15].

Сохраним введенные выше обозначения.

Замечание. Заметим, что слоение (M,F) с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением с трансверсальной картановой геометрией $\xi = (P(N,H),\omega_0)$, где $\omega_0 = \beta_0 + \theta_0$ — $\mathfrak{g}$-значная 1-форма картановой связности на многообразии P [12].

Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость. Пусть (M,F) — слоение с трансверсальной линейной связностью заданное (N,∇^N)-коциклом $\{U_i,f_i,\gamma_{ij}\}_{i,j}\in\mathcal{I}$.

Предположим, что (M,F) является псевдоримановым слоением, заданным (N,g^N) коциклом, где g^N — псевдориманова метрика произвольной сигнатуры $(k,q-k)$, параллельная относительно связности ∇^N. Будем рассматривать g^N как послойную метрику в ассоциированном векторном расслоении, которое в данном случае является касательным расслоением к многообразию N. Метрика g^N определяет указанным выше образом редукцию $\widehat{P}(N,O(k,q-k))$ H-расслоения $P(N,H)$ к замкнутой подгруппе $O(k,q-k)$.

Согласно Предложению 3.1. в этом случае, благодаря выполнению условия $\nabla^N g^N = 0$, связность Q_0 в H-расслоении $P(N,H)$ редуцируема к связности $\widehat{Q}_0$ в $O(k,q-k)$-расслоении $\widehat{P}$. Так как слоение (M,F) псевдориманово, заданное (N,g^N) коциклом, то каждый локальный диффеоморфизм

$$\gamma_{ij} : f_j(U_i\cap U_j)\to f_i(U_i\cap U_j)\ \ i,j\in\mathcal{I},$$

является локальной изометрией псевдоримановых многообразий $(f_j(U_i\cap U_j), g_{f_j(U_i\cap U_j)})$ и $(f_i(U_i\cap U_j), g_{f_i(U_i\cap U_j)})$ с индуцированными псевдоримановыми метриками.

Мы по-прежнему фиксируем q-мерное гладкое распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению (M,F), которое отождествлено с векторным фактор расслоением TM/TF.

Используя векторное расслоение $\widehat{P}(N,O(k,q-k))$, также как при доказательстве Предложения 4.1. мы строим слоеное расслоение $\widehat{\mathcal{R}}(M,O(k,q-k))$ со слоением $(\widehat{\mathcal{R}},\widehat{\mathcal{F}})$ и структурной группой $\widehat{H}=O(k,q-k)$, которое является редукцией H-расслоения $\mathcal{R}$ к замкнутой подгруппе $O(k,q-k)$. Из построения следует, что слоение $\widehat{\mathcal{F}}$ является сужением слоения $\mathcal{F}$ на подмногообразие $\widehat{\mathcal{R}}$.

Как известно ([14], Глава III), H-связность Q в главном расслоении $\mathcal{R}(M,H)$ определяет линейную связность

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \to \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \tag{4.3}$$

в ассоциированном векторном расслоении $\mathcal{E}(M,\mathbb{R}^q,H,\mathcal{R})$.

Так как $f_{i*x} : \mathfrak{M}_x \to T_vN$, где $v = f_i(x)$, $i \in \mathcal{I}$,— изоморфизм векторных пространств, то на $\mathfrak{M}_x$ существует единственная псевдориманова метрика g_x такая, что f_{i*x} — изометрия псевдоевклидовых векторных пространств $(\mathfrak{M}_x, g_x)$ и (T_vN, g^N_v). Поскольку каждое γ_{ij}, $i,j \in \mathcal{I}$, является изометрией, метрика g_x не зависит от выбора субмерсии $f_i : U_i \to V_i$ из указанного (N, g^N)-коцикла. Используя условие $\nabla^N g^N = 0$ и определение метрики g, нетрудно показать выполнение равенства $\nabla g = 0$.

Таким образом, на каждом слое $\mathfrak{M}_x = \pi^{-1}_{\mathcal{E}}(x)$, $x \in M$, векторного расслоения $\mathcal{E}(M,\mathbb{R}^q,H,\mathcal{R})$ определена метрика g_x, которая сохраняется при параллельном переносе относительно связности ∇, указанной в (4.3). Согласно Предложению 3.1. при этом связность Q в главном расслоении $\mathcal{R}(M,H)$ редуцируется к связности $\widehat{Q}$ в редуцированном расслоении $\widehat{\mathcal{R}}(M, O(k,q-k))$. Это означает, что для любой точки $u \in \mathcal{R}$ группа голономии $\Phi(u)$ удовлетворяет включению $\Phi(u) \subset O(k,q-k)$.

Достаточность. Пусть (M,F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N,∇^N)-коциклом и $\mathcal{R}(M,H)$ его расслоение трансверсальных реперов. Пусть Q — H-инвариантное распределение на $\mathcal{R}$, удовлетворяющее условию Предложения 4.1. Предположим, что существует такая точка u, что группа голономии $\Phi(u)$ связности Q с опорной точкой u принадлежит псевдоортогональной подгруппе $O(k,q-k)$ группы H. Согласно ([14], Глава 2, Теорема 7.1) существует редукция $\widehat{\mathcal{R}}(M,\Phi(u))$ H-расслоения $\mathcal{R}(M,H)$ к подгруппе Ли $\Phi(u)$ группы H. Подчеркнем, что связность Q редуцируется к связности $\widehat{Q}$ на $\widehat{\mathcal{R}}$.

Напомним, что кусочно гладкая кривая в $\mathcal{R}$ называется горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок является интегральной кривой распределения Q. Как известно, многообразие $\widehat{\mathcal{R}}$ образовано всеми точками из $\mathcal{R}$, которые можно соединить с точкой u горизонтальной кривой.

Из определения слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ вытекает включение $T\mathcal{F} \subset Q$, поэтому любые две точки произвольного слоя слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ можно соединить горизонтальной кривой. Следовательно, если $z \in \widehat{\mathcal{R}}$, то слой $\mathcal{L}(z)$, проходящий через z, принадлежит $\widehat{\mathcal{R}}$. Это означает, что $\widehat{\mathcal{R}}(M,\Phi(u))$ является слоеным расслоением и $T\widehat{\mathcal{F}} \subset \widehat{Q}$ для индуцированного слоения $(\widehat{\mathcal{R}},\widehat{\mathcal{F}})$.

Пусть $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \to \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ — линейная связность в ассоциированном с $\widehat{\mathcal{R}}(M,\Phi(u))$ векторном расслоении $\widehat{\mathcal{E}}(M,\mathbb{R}^q,\Phi(u),\mathcal{R})$, построенном с помощью левого действия $\widehat{\rho} = \rho|_{\Phi(u)\times\mathbb{R}^q}$, где ρ определено выше. Обозначим через Ψ_{x_0} группу голономии связности ∇ в точке $x_0 = \pi(u)$, причем u — точка из $\mathcal{R}$, в которой по условию теоремы выполняется включение $\Phi(u) \subset O(k,q-k)$.

Поскольку репер u можно рассматривать как линейный изоморфизм векторных пространств $u : \mathfrak{M}_{x_0} \to \mathbb{R}^m$, то существует единственная псевдоевклидова метрика g_{x_0} сигнатуры $(k,q-k)$ в $\mathfrak{M}_{x_0}$ такая, что $u : (\mathfrak{M}_{x_0}, g_{x_0}) \to (\mathbb{R}^m, g_0)$ — изометрия псевдоевклидовых векторных пространств.

Группа Ψ_{x_0} образована линейными преобразованиями векторного пространства $\mathfrak{M}_{x_0}$, определенными параллельным переносом векторов $X \in \mathfrak{M}_{x_0}$ вдоль кусочно гладких петель, замкнутых в x_0, относительно линейной связности ∇. Из выполнения включения $\Phi(u) \subset O(k,q-k)$ вытекает, что определенная выше псевдоевклидова метрика g_0 в векторном пространстве $\mathfrak{M}_{x_0}$ инвариантна относительно группы голономии Ψ_{x_0}.

Соединим точку x_0 с произвольной точкой x кусочно гладкой кривой $h : [0,1] \to M$, $h(0) = x_0$ и $h(1) = x$. Обозначим через $\tau^h : \mathfrak{M}_{x_0} \to \mathfrak{M}_x$ линейный изоморфизм пространств, заданный параллельным переносом векторов вдоль кривой h. Требованием, чтобы τ^h было изометрией, мы определяем псевдориманову метрику сигнатуры $(k, q-k)$ в векторном пространстве $\mathfrak{M}_x$. Используя инвариантность g_0 относительно Ψ_{x_0}, нетрудно проверить, что метрика g_x не зависит от выбора пути h, соединяющего x_0 с x.

Таким образом, в ассоциированном векторном расслоении $\widehat{\mathcal{E}}(M, \mathbb{R}^q, \Phi(u), \mathcal{R})$ определена послойная псевдориманова метрика g, которая, согласно построению, параллельна относительно линейной связности ∇.

Подчеркнем, что параллельный перенос метрики g вдоль любого пути, принадлежащего какому-либо локальному слою слоения (M,F) в окрестности U_i, $i \in \mathcal{I}$, эквивалентен проектируемости g вдоль этого слоя. Это означает, что метрика g трансверсально проектируема относительно слоения (M,F). Благодаря этому, субмерсии $f_i : U_i \to V_i$ требованием, чтобы линейные изоморфизмы $f_{i*x} : \mathfrak{M}_x \to T_vN$, где $v = f_i(x)$, были изометриями, определяют псевдориманову метрику g^N сигнатуры $(k, q-k)$ на многообразии N, относительно которой все γ_{ij} — локальные изометрии.

Поскольку слоение $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$ является сужением слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ на $\widehat{\mathcal{R}}$, а связность $\widehat{Q}$ — сужением H-связности Q на $\widehat{\mathcal{R}}$, то нетрудно убедиться в том, что проектируемость Q относительно слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ влечет проектируемость $\widehat{Q}$ относительно слоения $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$. Следовательно, связность $\widehat{Q}$ индуцирует $O(k, q-k)$-связность $\widehat{Q}_0$ на $\widehat{P}$, которая является редукцией H-связности Q_0 на P. Согласно Предложению 3.1. это эквивалентно параллельности псевдоримановой метрики g^N относительно линейной связности ∇^N, то есть $\nabla^N g^N = 0$.

Таким образом, (M,F) — псевдориманово слоение трансверсальной сигнатуры $(k, q-k)$, а его трансверсальная метрика параллельна относительно трансверсальной связности ∇^N.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о

Д о к а з а т е л ь с т в о С л е д с т в и я 1.2. Пусть (M,F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, а $\mathcal{R}(M,H)$ со слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образует слоеное расслоение трансверсальных реперов над (M,F). По условию существует точка $u \in \mathcal{R}$, для которой группа голономии $\Phi(u)$ является относительно компактной подгруппой в группе Ли $H = GL(q,R)$. Следовательно, $\Phi(u)$ принадлежит некоторой максимальной компактной подгруппе K группы H. Так как ортогональная группа $O(q)$ является максимальной компактной подгруппой группы H, то она сопряжена с K. Пусть $x = \pi(u)$. Когда u пробегает слой $\pi^{-1}(x)$, группа $\Phi(u)$ пробегает весь класс подгрупп, сопряженных с группой K. Поскольку в этом классе содержится $O(q)$, найдется такая точка $\widehat{u} \in \pi^{-1}(x)$, что $\Phi(\widehat{u}) \subset O(q)$.

Рассматривая $O(q)$ как группу $O(k, q-k)$ при $k = 0$ и применяя Теорему 1.1., мы получаем, что (M,F) — риманово слоение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о

Д о к а з а т е л ь с т в о Т е о р е м ы 1.2.

Предположим, что (M,F) — слоение с трансверсальной линейной связностью.

Пусть U — координатная окрестность адаптированной карты (U, φ) многообразия M, D — трансверсальный диск в U и $s : D \to \mathcal{R}$ — сечение, обладающее указанным в теореме свойством. Обозначим той же буквой слоеное сечение $s : U \to \mathcal{R}$, являющееся продолжение сечения $s : D \to \mathcal{R}$, при котором локальные слои слоения (M,F) отображаются в локальные слои поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Благодаря локальному рассмотрению такое сечение существует. Не нарушая общности, будем считать, что существует тривиализация

$h : \pi^{-1}(U) \to U \times H$ расслоения трансверсальных реперов $\pi : \mathcal{R} \to M$ в окрестности U, при которой $h(s(U)) = U \times \{e\}$, где e — единица группы H.

Положим $W = h^{-1}(U \times O(k, q-k))$. Покажем, что насыщение $N(W)$ множества W относительно поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является слоеным $O(k, q-k)$-расслоением для слоения $(N(U), F)$. Поскольку насыщение открытого подмножества открыто, $N(W)$ — открытое подмногообразие в $\mathcal{R}$.

Покажем, что $\pi^{-1}(U) \cap N(W) = W$. Для любого слоя $\mathcal{L}(u)$, $u \in \mathcal{R}$, поднятого слоения через $H(u) = \{a \in H \,|\, R_a\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u)\}$ обозначается подгруппа структурной группы H, оставляющая этот слой инвариантным. Согласно условию теоремы для любой точки $u \in s(D)$ выполняется включение $H(u) \subset O(k, q-k)$ и, следовательно, это включение выполняется для любой точки $u \in s(U)$. Поэтому $\pi^{-1}(x) \cap \mathcal{L}(u) \subset W$ для любой точки $x \in U$ и $u = s(x)$. Пусть теперь v — любая точка из W. Так как $W := h^{-1}(U \times O(k, q-k))$, то найдутся $a \in O(k, q-k)$ и $u \in s(U)$ такие, что $v = ua$. В этом случае $H(v) = a^{-1}H(u)a$, следовательно, $H(v) \subset O(k, q-k)$ для любой точки $v \in W$. Поскольку W инвариантно относительно группы $O(k, q-k)$, это влечет требуемое равенство $\pi^{-1}(U) \cap N(W) = W$. Используя это равенство, нетрудно показать, что $N(W)$ является редукцией расслоения реперов над M к замкнутой подгруппе $O(k, q-k)$ группы H.

Таким образом, $\pi_{N(W)} : N(W) \to N(U)$ — проекция слоеного $O(k, q-k)$-расслоения над $(N(U), F)$. Заметим, что сужение формы связности β на W являетя $\mathfrak{so}(k, q-k)$-значной 1-формой римановой связности на W, трансверсально проектируемой относительно слоения $(N(W), \mathcal{F})$. Это означает, что $(N(U), F)$ — псевдориманово слоение трансверсальной сигнатуры $(k, q-k)$.

Обратное утверждение выполняется очевидным образом.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о

Список литературы

1. Molino P., *Foliations on Riemannian manifolds and submanifolds*, Birkhauser, 1988, 339 pp.

2. Tondeuer P., *Foliations on Riemannian manifolsd and submanifolds*, Birkhauser, 1997, 286 pp.

3. Rovenskii V. Y., *Foliations on Riemannian manifolsd and submanifolds*, Birkhauser, 1997, 286 pp.

4. Wolak R. A., “Leaves of foliations with transverse G-srtuctures of finite type”, *Publications Matematiques*, **33** (1989), 153–162.

5. Wolak R. A., “Foliations admitting transverse systems of differential equations”, *Compositio Math.*, **67** (1988), 89–101.

6. Жукова Н. И., “График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев”, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, № 2, 78–81.

7. Zhukova N. I., “Local and global stability of compact leaves and foliations”, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom*, **9**:3 (2013), 400–420.

8. Жукова Н. И., “Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:3 (2011), 555–574.

9. Жукова Н. И., “Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один”, *Матем. заметки*, **93**:6 (2013), 944–946.

10. O’Neil B., *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1983, 468 pp.

11. Бим Дж., Эрлих П., *Глобальная лоренцева геометрия*, Мир, 1985, 400 с.

12. Жукова Н. И., “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, 2007, № 256, 115—147.

13. Schmidt B. G., “Conditions on a Connection to be a Metric Connection”, *Commun. math. Phys.*, **29** (1973), 55–59 pp.

14. Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии*, **1**, Наука, 1988, 428 с.

15. Zhukova N. I., Dolgonosova A. Yu., “The automorphism groups of foliations with transverse linear connection”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.

Дата поступления 16.05.2016

A criterion for foliations with transverse linear connection to be pseudo-Riemannian

© **N. I. Zhukova**[3], **K. I. Sheina**[4],

Abstract. We obtain necessary and sufficient conditions for a foliation of codimension q on n-dimensional manifold with transverse linear connection to admit a transverse invariant pseudo-Riemannian metric of a given signature which is parallel with the respect to the indicated connection. In particular we obtain a criterion for a foliation with transverse linear connection to be Riemannian foliation.

Key Words: foliation, linear connection, holonomy group of a connection, the germ holonomy group of a leaf

[3] Professor of chair of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; nzhukova@hse.ru

[4] Research assistant of chair of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; ksheina@hse.ru