УДК 51.7:532.546

Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными

© Д. А. Зенюк[1], Л. В. Клочкова[2], Ю. Н. Орлов[3]

Аннотация. В работе рассматривается кинетическое уравнение дробного порядка относительно квантилей выборочной функции распределения для моделирования эволюции случайных величин.Предлагается модель для описания эволюции уровня загрязнения мегаполиса, когда источник примесей случаен и имеет так называемые тяжелые хвосты в распределении, а также для моделирования эволюции эпидемиологической обстановки. Исследуются условия существования решения уравнения адвекции-диффузии дробного порядка. Формулируется метод определения параметров этого уравнения по наблюдаемым данным по фактическим значениям изучаемых величин.

Ключевые слова: дробное уравнение адвекции-диффузии, производная Римана-Лиувилля, производная Герасимова-Капуто, выборочные квантили, выборочная функция распределения

1. Введение

Анализ и прогноз нестационарных временных рядов, встречающихся на практике, опирается на изучение эволюционных свойств их выборочных функций распределения. Основы такого подхода применительно к эволюционным уравнениям Лиувилля и Фоккера-Планка были сформулированы в [1, 2]. Эти уравнения были призваны описать эволюцию выборочной плотности функции распределения наблюдаемого временного ряда с целью поиска подходящей динамической системы, имеющей близкие к данной выборке статистические свойства. Тогда дискретный аналог такой системы можно было бы рассматривать как модель временного ряда, позволяющей дать его прогноз на некоторый горизонт, определяемый скоростью разбегания близких траекторий.

Задача прогнозирования ряда с определенной точностью на заданный горизонт возникает во многих практических приложениях. В частности, в работе [3] такие модели предлагалось использовать для прогнозирования загрязненности атмосферы мегаполисов, а также распространения инфекций или вредных примесей в случайно-неоднородной и нестационарной среде. Актуальность кинетических моделей для описания эволюции распределения случайных параметров, характеризующих интенсивность источника вредных примесей, состоит в следующем. Для таких задач общепринятым подходом является использование уравнений химической кинетики, описывающих эволюцию примесей, их состав и концентрацию в химически активном газе в определенных температурных и конвективных условиях внешней среды. Однако практическая трудность использования уравнений такого типа для конкретных мегаполисов состоит в том, что источник загрязнения по интенсивности и составу является случайным и притом нестационарным. В результате кинетические уравнения, применяемые в условиях неопределенности пространственного распределения примесей, приобретают дополнительные стохастические свойства из-за

[1] Аспирант Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

[2] Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

[3] Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

неопределенности функции источника. Возможность описать эту неопределенность кинетическим уравнением того же типа, что и среду, в которой осуществляется перенос изучаемого фактора, позволяет построить унифицированную кинетическую модель процесса в целом.

Анализ распределений таких нестационарных случайных величин, как уровень загазованности, уровень примесей, содержащих тяжелые металлы, радиоактивный фон в промышленных городах, показывает, что эти распределения характеризуются частыми аномальными выбросами наблюдаемых значений, что приводит к формированию так называемых тяжелых хвостов распределений. Эволюция таких распределений может быть описана уравнениями с дробными производными, моделирующими так называемую аномальную диффузию. Математическим аспектам таких уравнений, в частности, дробного уравнения Фоккера-Планка применительно к выборочным плотностям распределений случайных величин и посвящена данная работа.

Теория дифференциальных и интегральных операторов дробного порядка имеет богатую историю, ретроспективные обзоры которой можно найти, например, в [4, 5]. Подробное описание свойств этих операторов приведено в [6-11]. Тем не менее, активное использование этого аппарата для решения различных инженерных и естественнонаучных задач началось сравнительно недавно. Так, например, в середине прошлого века было показано, что использование дифференциальных уравнений нецелого порядка для описания механики вязкоупругих тел имеет более адекватное физическое обоснование и позволяет более точно воспроизводить наблюдаемые в экспериментах данные. Приложения теории дробного исчисления обсуждаются, например, в [12-15]. В последние десятилетия все большее внимание исследователей привлекает уравнение адвекции-диффузии дробного порядка. Например, в [12] оно используется для описания «аномальных» кинетических процессов, наблюдаемых во фрактальных структурах со сложными топологическими свойствами или демонстрирующих нетривиальные корреляционные зависимости, объединенных под общим названием «странная кинетика» . Это уравнение возникает как обобщение уравнения Ланжевена и уравнения Чепмена-Колмогорова.

Практически важной задачей является определение параметров кинетического уравнения — коэффициентов сноса, диффузии и порядка дробной производной — по наблюдаемым значениям временного ряда. В работе показывается, что удобной формой кинетического уравнения относительно выборочной плотности функции распределения, позволяющей с достаточной точностью оценивать указанные параметры, является уравнение эволюции в терминах квантилей.

Поскольку использование дробного исчисления требует применения специальной математической техники, в следующем разделе будут даны основные определения и обозначения применительно к кинетическим уравнениям типа Фоккера-Планка. Будут также отмечены некоторые проблемы, связанные с существованием решений этого уравнения, имеющих физический смысл.

2. Дробное уравнение адвекции - диффузии

В настоящей работе под уравнением адвекции-диффузии дробного порядка мы будем понимать интегро-дифференциальное уравнение [10]

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t \frac{\partial p(x,\tau)}{\partial\tau}(t-\tau)^{-\beta}d\tau + A\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} =$$
$$= \frac{Bc_1}{\Gamma(n-\alpha)\sin(\pi\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{p(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}d\xi + \frac{(-1)^n Bc_2}{\Gamma(n-\alpha)\sin(\pi\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{p(\xi,t)}{(\xi-x)^{\alpha+1-n}}d\xi, \tag{2.1}$$

где $n = [\mathrm{Re}\alpha] + 1, \quad c_{1,2} = \sin(0.5\pi(\alpha \mp \theta))$.

Первое слагаемое в (2.1) представляет собой частную производную Герасимова-Капуто по временной переменной, а конструкция в правой части — частную производную Рисса-Феллера по пространственной переменной. Параметры уравнения (2.1) подчинены следующим ограничениям:

$$0 < \beta \le 1, \quad \alpha \in (0;1)\cup(1;2], \quad |\theta| \le \min\{2; 2-\alpha\}, \quad A \in R, \quad B \in R^+.$$

Известно, что фундаментальные решения задачи Коши для этого уравнения являются плотностями распределения некоторых абсолютно непрерывных случайных величин. Класс этих плотностей достаточно широк — он, например, включает в себя все устойчивые распределения (при $\beta = 1$). Доказательство, опирающееся на использование техники интегральных преобразований Фурье и Лапласа, подробно описано в [16-18]. В работе [16] фундаментальное решение уравнения (2.1) при $A = 0$ было получено в явном виде в терминах т. н. H-функций Фокса (см. [18]). Также известно, что уравнение (2.1) возникает при предельном переходе в схеме случайного блуждания с непрерывным временем, если ввести некоторые дополнительные предположения относительно асимптотического поведения плотностей времен ожидания и величин смещения [19-21].

Начально-краевая задача для дробного уравнения адвекции-диффузии является более сложной. Будем рассматривать случай конечного отрезка $[a;b]$. Для него вместо (2.1) имеем уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t .\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial\tau}(t-\tau)^{-\beta}d\tau + A\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} =$$
$$= \frac{B}{\sin(\pi\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(c_1 \cdot {}_xI_{a+}^{n-\alpha}p(x,t) + (-1)^n c_2 \cdot {}_xI_{b-}^{n-\alpha}p(x,t)\right), \tag{2.2}$$

где ${}_xI_{a+}^{\alpha}$ и ${}_xI_{b-}^{\alpha}$ — соответственно операторы лево- и правостороннего частного интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка α, определяемые формулами

$${}_xI_{a+}^{\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{y(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}, \quad {}_xI_{b-}^{\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{y(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1-\alpha}}.$$

Уравнение (2.2) может быть записано в виде уравнения непрерывности

$${}_tD_{0+}^{\beta}p(x,t) = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}, \tag{2.3}$$

где ${}_tD_{0+}^{\beta}$ есть производная Герасимова-Капуто порядка β, а плотность потока вероятности $j(x,t)$ имеет вид

$$j(x,t) = \begin{cases} Ap(x,t) - B\left(c_1 \cdot {}_xI_{a+}^{1-\alpha}p(x,t) - c_2 \cdot {}_xI_{b-}^{1-\alpha}p(x,t)\right), & 0 < \alpha < 1; \\ Ap(x,t) - B\dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_1 \cdot {}_xI_{a+}^{2-\alpha}p(x,t) + c_2 \cdot {}_xI_{b-}^{2-\alpha}p(x,t)\right), & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Для того чтобы решение уравнения (2.3) являлось функцией плотности некоторой случайной величины, оно должно быть неотрицательно и сохранять условие нормировки. Отсюда следует, что естественными граничными условиями в этом случае будут условия

$$j(a,t) = j(b,t) = 0. \tag{2.5}$$

Поведение плотности потока $j(x,t)$ на границах рассматриваемой области может быть весьма сложным. Предположим, что функция плотности представима в окрестности точки $x = a$ в виде:

$$p(x,t) = (x-a)^{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\infty} h_k (x-a)^k, \quad h_0 \neq 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \alpha < 1$. Тогда имеем

$${}_xI_{a+}^{1-\alpha} p(x,t) = \Gamma(\gamma)\sum_{k=0}^{\infty} h_k (x-a)^{k+\gamma-\alpha}/\Gamma(k+1+\gamma-\alpha). \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что в точке $x = a+0$ выполняется предельное равенство:

$$\lim_{x\to a+0} {}_xI_{a+}^{1-\alpha} p(x,t) = \Gamma(\gamma) h_0 \lim_{x\to a+0} (x-a)^{\gamma-\alpha}/\Gamma(1+\gamma-\alpha) = \begin{cases} \infty, & \gamma < \alpha \\ \Gamma(\alpha) h_0, & \gamma = \alpha \\ 0, & \gamma > \alpha. \end{cases} \tag{2.8}$$

.

Тогда равенство в (2.5) $j(a,t) = 0$ при $\gamma > \alpha$ эквивалентно выполнению условия ${}_aI_{a+}^{1-\alpha} p(a,t) = 0$, а при $\gamma = \alpha$ эквивалентно выполнению условия

$$h_0\Gamma(\alpha) = \frac{c_2}{c_1} {}_aI_{a+}^{1-\alpha} p(a,t). \tag{2.9}$$

Аналогично в окрестности точки также необходимо рассматривать разложение типа (2.6), приводящее к схожим по форме условиям на плотность $p(x,t)$.

Пусть теперь $1 < \alpha < 2$. Тогда

$${}_xI_{a+}^{2-\alpha} p(x,t) = \Gamma(\gamma)\sum_{k=0}^{\infty} h_k (x-a)^{k+1+\gamma-\alpha}/\Gamma(k+2+\gamma-\alpha).$$

Отсюда следует, что и в этом случае выполняются граничные соотношения, аналогичные (2.8):

$$\lim_{x\to a+0} \frac{\partial}{\partial x} {}_xI_{a+}^{2-\alpha} p(x,t) = \Gamma(\gamma) h_0 \lim_{x\to a+0} (x-a)^{\gamma-\alpha}/\Gamma(1+\gamma-\alpha) = \begin{cases} \infty, & \gamma < \alpha \\ \Gamma(\alpha) h_0, & \gamma = \alpha \\ 0, & \gamma > \alpha. \end{cases} \tag{2.10}$$

Таким образом, вопрос о существовании решений уравнения адвекции-диффузии дробного порядка в форме (2.6) на ограниченном отрезке с граничными условиями (2.5) требует выполнения дополнительных условий по сравнению с обычным классическим уравнением: класс функций, которому может принадлежать это решение, задается нетривиальными ограничениями на поведение функции в окрестности граничных точек и на значения дробных интегралов от нее.

3. Прогнозная модель

Как известно [22-25], обычное уравнение адвекции-диффузии играет важную роль в теории вероятностей, поскольку описывает эволюцию одномерной плотности диффузионных марковских случайных процессов, что позволяет использовать это уравнение, в частности, для статистического анализа временных рядов. Учитывая, что уравнение (2.2) также допускает решение в виде плотности распределения, оно тоже может быть использовано для этой цели. В основе предлагаемой прогностической модели лежит предположение, что эволюция одномерной плотности подлежащего случайного процесса, порождающего временной ряд, описывается уравнением типа (2.3). Далее мы ограничимся рассмотрением случая $\beta = 1$, отвечающего обычной производной по времени.

В контексте задачи анализа временных рядов предпочтительнее рассматривать неоднородный и нестационарный конвективный коэффициент $A(x,t)$. Этот вопрос подробно обсуждался в [26], где было показано, что

$$A(x,t)p(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v p_2(x,v,t)dv, \tag{3.1}$$

где $p_2(x,v,t)$ есть совместное распределение рассматриваемого временного ряда и его первых разностей. Следует подчеркнуть, что введение неоднородного конвективного коэффициента может привести к появлению отрицательных вероятностей при численном решении соответствующих прогностических уравнений. Наличие отрицательных вероятностей, однако, не является однозначным свидетельством некорректности модели, поскольку сами эмпирические вероятности здесь оцениваются с некоторой погрешностью. Модель можно считать неадекватной лишь в том случае, если сумма полученных отрицательных вероятностей по модулю превосходит эту погрешность.

Пусть $Q_\gamma(t)$ есть квантиль порядка γ распределения с плотностью $p(x,t)$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} p(x,t)dx = \gamma, \quad \gamma \in [0;1]. \tag{3.2}$$

Дифференцируя (3.2) по t, получаем

$$\frac{dQ_\gamma(t)}{dt} p(Q_\gamma(t),t) + \int\limits_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} dx = 0,$$

откуда в предположении, что эволюция функции плотности описывается уравнением непрерывности (2.3) с $\beta = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{dQ_\gamma(t)}{dt} p(Q_\gamma(t),t) - j(Q_\gamma(t),t) = 0. \tag{3.3}$$

Заметим, что уравнение (3.3) справедливо как на конечном отрезке, так и на неограниченной области. Удобство конструкции (3.3) заключается также и в том, что для его решения не требуется граничных условий, а квантили существуют у любого распределения, в отличие от моментов.

Определенная сложность при использовании модели в виде уравнения (3.3) состоит в том, что оно незамкнуто в том смысле, что это уравнение не может быть решено относительно $Q_\gamma(t)$, если неизвестна функция плотности $p(x,t)$. Однако, если считать, что это уравнение описывает эволюцию эмпирических характеристик временного ряда, то указанное обстоятельно не является препятствием: вместо неизвестных функции плотности $p(x,t)$ и плотности потока вероятности $j(x,t)$ можно использовать их статистические оценки, построенные по наблюдаемым данным за прошлый период.

Сама же процедура оценки параметров α, θ, B в уравнении (2.2) может быть реализована следующим образом. Пусть задана длина сегмента L данных, т. е. длина выборки временного ряда, заканчивающегося в момент наблюдения t. По этой выборочной совокупности строится оценка эмпирических квантилей $Q_\gamma(t)$, а также плотности вероятности и плотности потока вероятности. При фиксированных значениях параметров α, θ, B модельное уравнение, получаемое как дискретный аналог уравнения (3.3) с шагом L, позволяет найти прогнозные значения квантилей $\tilde{Q}_\gamma(t+1)$ в следующем сегменте длины L по известным данным с предыдущего шага по времени:

$$\tilde{Q}_\gamma(t+1) = Q_\gamma(t) + \frac{j(Q_\gamma(t),t)}{p(Q_\gamma(t),t)}. \tag{3.4}$$

В качестве оценок параметров в данном сегменте будем рассматривать те значения, при которых отклонение прогнозируемых квантилей $\tilde{Q}_\gamma(t+1)$ от реально наблюдаемых $Q_\gamma(t+1)$ будет минимальным. Функционал, описывающий меру отклонения, может быть выбран различными способами; в простейшем случае можно использовать обычное расстояние в пространстве R_2^q, где есть количество анализируемых квантилей:

$$\rho(\alpha,\theta,B,t) = \sqrt{\sum_{k=1}^{q}\Big(\tilde{Q}_{\gamma_k}(t+1) - Q_{\gamma_k}(t+1)\Big)^2}. \tag{3.5}$$

Затем процедура повторяется для следующей пары выборок длины L, «двигаясь» таким образом вдоль временного ряда.

В общем случае количество q рассматриваемых в рамках этого метода квантилей и их уровни γ_k могут быть любыми. Рассмотрим один из простых, но практически важных вариантов, когда используется прогностическая модель с тремя квартилями, т.е. квантилями уровней 0.25, 0.50 и 0.75. Такой выбор может быть аргументирован тем, что второй квартиль (уровня 0.5) является медианой, которая, как известно, используется в качестве устойчивой оценки параметра положения, а разность третьего и первого квартилей (интерквартильный размах) используется в качестве оценки параметра рассеяния.

Оценки функции плотности и плотности потока вероятности, входящие в (3.4), могут быть построены различными способами. Простейшей оценкой функции плотности, обозначаемой «шляпкой», чтобы отличать ее от генеральной совокупности, является гистограмма эмпирических частот, которая при разбиении на m классовых интервалов определяется формулой

$$\hat{p}(x,t) = \sum_{k=1}^{m-1} v_k I(\Delta_k(x)), \tag{3.6}$$

где $\Delta_k(x)$ — k-ый классовый интервал при разбиении области значений временного ряда в рассматриваемом сегменте, v_k — количество точек временного ряда, попадающих в $\Delta_k(x)$, а $I(\Delta)$ — индикативная функция множества. Аналогичная оценка может быть построена и для двумерной функции плотности:

$$\hat{p}_2(x, v, t) = \sum_{i,k=1}^{m-1} v_{ik} I\left(\Delta_i(x)\right) I\left(\Delta_k(v)\right). \tag{3.7}$$

Здесь v_{ik} — количество пар точек двумерного временного ряда, попавших в отмеченный квадрат.

Оценку плотности потока вероятности можно получить, подставляя в его аналитическое выражение (2.4) и вычисляя интегралы в явном виде.

Описанная схема оценки параметров была апробирована на нескольких временных рядах: сформированных искусственно, или построенных на основе реальных данных. Так, например, серия вычислений для траекторий фрактального броуновского движения с заданным показателем Херста (см. [27]) показала, что среднее значение и выборочная мода оценки параметра α весьма близки к истинному значению самого показателя Херста (среднеквадратичная относительная ошибка отклонения составила менее 0.01).

Также были исследованы временные ряды, образованные ценами акций (с минутным интервалом) российских компаний с наибольшей капитализацией, используемые при расчете индекса РТС, в схеме с тремя квартилями. Значения параметров оказались существенно нестационарны и различны для разных рядов. Важно отметить, что на квазистационарном промежутке наилучшей оценкой параметра B в смысле метрики (3.5) являлось нулевое значение, то есть наилучший прогноз квантилей можно в таком случае получить с помощью уравнения типа Лиувилля, когда в (2.4) отсутствует диффузионное слагаемое, что также подтверждает корректность метода.

Важно также и то, что среднеквадратичная ошибка оценки реально наблюдаемых квантилей с помощью изложенного метода в сравнении со стандартными методами моделей авторегрессии — скользящего среднего для тестируемых рядов оказалась в 2-4 раза меньше. Следовательно, кинетические модели типа дробной адвекции-диффузии могут быть эффективно применены для прогнозирования нестационарных временных рядов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проекты № 14-01-00145 и № 13-01-00617.

Список литературы

1. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, 2008, № 9, 23–33.

2. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., *Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков*, Эдиториал УРСС/Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2011, 384 с.

3. Клочкова Л. В., Орлов Ю. Н., Тишкин В. Ф., “Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **7** (2012), 34–43.

4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., “Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения”, *Наука и техника*, 1987.

5. Miller K. S., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New Jork etc.: John Wiley & Sons, 1993.

6. Oldham K. B., Spaniel J., *The fractional calculus*, San Diego etc.: Academic Press, 1974.

7. Gorenflo R., Mainardi F., "Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order", *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, 1997, 223–276.

8. Mainardi F., "Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics", 1997, 291–348.

9. Podlubny I., *Fractional differential equations*, San Diego etc.: Academic Press, 1999.

10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam etc.: Elsevier, 2005.

11. Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука уг 2005, Москва.

12. Зеленый Л. М., Милованов А. В., "Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики", *Успехи физических наук*, **174**:8 (2004), 809–852.

13. Нахушев А. М, *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2003.

14. Васильев В. В., Симак Л. А., *Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем*, НАН Украины (Национальная академия Украины), Киев, 2008.

15. Бутковский А. Г., Постнов С. С., Постнова Е. А., "Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления I. Математические основы и проблема интерпретации", *Автоматика и телемеханик*, 2013, № 4, 3–42.

16. Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G., "The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **4**:2 (2001), 153–192.

17. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M., "Chance and Stability: Stable distributions and their applications 13-34.", *Zeist: VSPs*, **282**:1 (1999), 13-34..

18. Mainardi F., Pagnini G., Saxena R., "Fox functions in fractional diffusion", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **178**:1-2 (2005), 321–331.

19. Schertzer D., Larcheveque M., Duan J. et al, "Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Levy stable noises", *Journal of Mathematical Physics*, **42** (2001), 200–212.

20. Tarasov V. E., "Fractional Fokker-Planck equation for fractal media", *Chaos*, **15**:2 (2005), 023102.

21. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D. et al., "Discrete random walk models for space-time fractional diffusion", *Chemical Physics*, **284**:1 (2002), 521–541.

22. Giona M., Roman H. E., "Fractional diffusion equation on fractals: One-dimensional case and asymptotic behavior", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **25**:8 (1992), 2093–2105.

23. Metzler R., Klafter J., "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach", *Physics reports*, **339**:1 (2000), 1–77.

24. Zaslavsky G. M., "Chaos, fractional kinetics, and anommalous transport", *Physics reports*, **371**:6 (2002), 461–580.

25. Yanovsky V. V, Chechkin A. V., Schertzer D., Tur A. V., "Levy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000.

26. Зенюк Д. А, Орлов Ю. Н., *О применении дробного исчисления Римана - Лиувилля для описания распределения вероятностей*, Препринт № 18 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2014, 21 с.

27. Кириллов Д. С, Короб О. В., Митин Н. А., Орлов Ю. Н., Плешаков Р. В., *Распределения показателя Херста нестационарного маркированного временного ряда*, Препринт № 11 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013, 16 с.

Дата поступления 21.12.2015

Simulation of nonstationary random processes kinetic equations with fractional derivatives.

© **D.A. Zenuk[4], L.V Klochkova[5], J.H. Orlov[6]**

Abstract. In this paper we construct a method of simulation of nonstationary random processes by kinetic equations with fractional derivatives. Paper discusses the kinetic equation of fractional order with respect to the sample quantiles of the distribution function for modeling the evolution of the random variables. A model is proposed to describe the evolution of the pollution of the metropolis, when the source of impurities is random.

Key Words: fractional equation advection-diffusion, Riemann-Liouville derivative, Gerasimov-Caputo derivative, sample quantiles, sample distribution function

[4] Aspirant of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow

[5] Senior Research Fellow of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

[6] Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.