УДК 512.917+513.9

Непрерывность топологической энтропии для кусочно-гладких отображений лоренцевского типа

© М. И. Малкин[1], К. А. Сафонов[2]

Аннотация. Для одномерных отображений лоренцевского типа изучается вопрос о поведении топологической энтропии как функции отображения. В предыдущей работе авторов было показано, что энтропия как функция отображения в C^0-топологии может иметь разрыв (скачок) только в исключительном случае, а именно, в окрестности отображения с нулевой энтропией, причем тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом. В данной статье мы показываем, что в классе лоренцевских отображений с C^1-топологией и при наличии нулевых односторонних производных в точке разрыва указанный исключительный случай невозможен, а значит, энтропия непрерывно зависит от отображения.

Ключевые слова: топологическая энтропия, отображения лоренцевского типа, нидинг-инвариант

1. Введение

Одномерные разрывные отображения с двумя интервалами монотонного возрастания (лоренцевские отображения) и их надстройки моделируют отображения Пуанкаре для потоков со сложным поведением предельных траекторий, имеющих странные аттракторы типа аттрактора Лоренца (см. [4]). В работе М.И. Малкина [1] рассматривался вопрос о непрерывности топологической энтропии $h_{top}(f)$ как функции отображения f для класса кусочно-непрерывных монотонных отображений отрезка с одной точкой разрыва. При условии плотности прообразов точки разрыва была доказана теорема о непрерывности энтропии на пространстве лоренцевских отображений с C^0-топологией. Можно показать, что этот результат справедлив, если условие плотности прообразов разрыва заменить на условие положительности топологической энтропии отображения, в окрестности которого рассматривается функция $h_{top}(f)$. Если же рассматривать функцию $h_{top}(f)$ в окрестности отображения f_0 с нулевой энтропией, то, как показано в предыдущей статье авторов [2], $h_{top}(f)$ может иметь разрыв (скачок энтропии), причем такой разрыв имеет место тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом.

Подобный вопрос о возможных скачках топологической энтропии изучался ранее для класса непрерывных кусочно-монотонных отображений. В работе М. Мизюревича [7] было получено значение максимально возможного скачка энтропии для этого класса и установлено, что величина скачка зависит от количества критических точек, входящих в периодические орбиты.

В работе [2] мы установили точное значение максимально возможного разрыва энтропии в классе лоренцевских отображений и показали, что по аналогии с результатом Мизюревича величина скачка энтропии определяется (общим) периодом орбит, проходящих через точку разрыва лоренцевского отображения f_0 с нулевой энтропией. В связи с

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

[2] Студент, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижний Новгород

этим результатом возникает такой вопрос: нельзя ли все же добиться непрерывности энтропии, если повысить класс гладкости отображений и рассматривать их в C^k-топологии ($k \geq 1$). Нетрудно убедиться (см. конструкцию контрпримеров в [2]), что при любой гладкости можно построить контрпример со скачком энтропии в окрестности лоренцевского отображения с нулевой энтропией, у которого односторонние производные в точке разрыва строго положительны. Если же односторонние производные в точке разрыва равны нулю, то, как будет доказано в данной статье (см. Теорему 3.1), топологическая энтропия зависит непрерывно от отображения с C^1-топологией.

Заметим, что в случае симметричных лоренцевских отображений эту теорему можно доказать непосредственно, используя результаты Милнора-Терстона [6], а также М. И. Малкина и М.-Ч. Ли [5]. Действительно, в работе [6] была доказана непрерывность энтропии для дифференцируемых кусочно-монотонных отображений с C^1-топологией, а в работе [5] установлено соответствие между динамикой унимодальных и симметричных лоренцевских отображений (в частности, с сохранением энтропии для соответствующих отображений).

2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем семейство $\mathcal{F}$ лоренцевских отображений $f : I \to I$, где $I = [0, 1]$ и f удовлетворяет условиям:

1. f — непрерывно дифференцируемая, строго монотонно возрастающая функция на каждом из полуинтервалов $[0; c)$ и $(c; 1]$;
2. $\lim_{x \to c-0} f(x) = 1$, $\lim_{x \to c+0} f(x) = 0$.

При изменении отображения f в классе лоренцевских отображений для рассмотрения топологии в пространстве отображений точку разрыва $c = c(f)$ без ограничения общности можно считать не зависящей от f, если сделать при необходимости соответствующую замену координат. С другой стороны, рассматривая поднятие лоренцевского отображения как разрывного отображения окружности степени 1 (см. [5]), мы получаем разрывное отображение прямой в себя с фиксированными точками разрыва в целых точках, в то время как в точке c (и в точках $c + n$ для целых n) поднятие является непрерывным, так что можно C^0-топологию лоренцевских отображений определить как обычную C^0-топологию на отрезке $[0; 1]$ для поднятий, а в случае непрерывно дифференцируемых лоренцевских отображений при совпадении односторонних производных в точке разрыва (и существовании односторонних производных в точках 0 и 1) аналогично определяется C^1-топология. Таким образом, считая точку разрыва не зависящей от f, на множестве $\mathcal{F}$ введем C^1-топологию соотношением

$$d(f, g) = max(sup_{x \in I \setminus c} |f(x) - g(x)|, sup_{x \in I \setminus c} |f'(x) - g'(x)|).$$

Вначале напомним некоторые определения из [2]. Пусть Π — пространство последовательностей $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ...)$ из символов $\{-1, 1\}$ с топологией прямого (тихоновского) произведения $\{-1, 1\}^{\mathbf{Z}^+}$ (счетного числа экземпляров двухэлементного множества с дискретной топологией). Будем считать, что топология на Π задана метрикой $d(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{2^i}$ (эта метрика согласована с указанной топологией). Далее будем считать, что на Π установлен лексикографический порядок (индуцированный очевидным неравенством $(-1) < (+1)$). На этом пространстве определено отображение

$\sigma : \Pi \to \Pi$ — отображение левого сдвига: $\sigma(\omega_0\omega_1\omega_2 \ldots) = (\omega_1\omega_2 \ldots)$. Множество прообразов точки разрыва c отображения f обозначим $D = \cup_{n=0}^{\infty} D_n$, где $D_0 = \{c\}$, $D_n = \{x \in I | f^n(x) = c, f^{n-1}(x) \neq c\}$.

Определение 2.1. *Нидинг-последовательностью точки $x \in I \backslash D$ называется последовательность $\omega(x) = \omega_0 \, \omega_1 \, \omega_2 \ldots$, где $\omega_i = sign\,(f^i(x) - c)$. Формальный степенной ряд $\widetilde{\omega} = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \, t^i$ переменного t будем называть нидинг-рядом точки x.*

Для каждой точки $x \in D$ определим пару нидинг-последовательностей по формуле:

$$K^+(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y \to x+0} \omega(y), \quad K^-(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y \to x-0} \omega(y), \quad y \in I \backslash D.$$

Определение 2.2. *Нидинг-инвариантами отображения $f \in \mathcal{F}$ называется пара последовательностей $(K_f^+(c), K_f^-(c))$.*

Пара нидинг-инвариантов $(\alpha, \beta) = (K_f^+(c), K_f^-(c))$ является символическим описанием отображения f, а в случае плотности D прообразов разрыва эта пара является полной системой инвариантов топологической сопряженности.

Обозначим $\Sigma_f = \overline{\{\omega(x) | \, x \in I \backslash D\}}$ — замыкание множества всех возможных нидинг-последовательностей; согласно [3] топологическую энтропию разрывного отображения $f \in \mathcal{F}$ можно определить как

$$h_{top}(f) = h_{top}(\sigma | \, \Sigma_f) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log l'_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log l_n}{n},$$

где l'_n — число допустимых n-блоков в Σ_f, а $l_n = card D_n$.

Пусть $r(f)$ — радиус сходимости ряда $\widetilde{L}_f = \sum_{n=0}^{\infty} l_n t^n$, а $r'(f) = \min(r(f), 1)$. Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости имеем

$$h_{top}(f) = -\log r'(f).$$

Связь топологической энтропии с производящей функцией нидинг-инвариантов устанавливает следующая лемма (см. [1]).

Лемма 2.1. *Значение $r'(f) = \min(r(f), 1)$ совпадает с наименьшим положительным корнем аналитической в единичном круге функции $\Theta_f(t) = \widetilde{K}_f^+(c) - \widetilde{K}_f^-(c)$.*

В статье [2] был получен критерий непрерывности топологической энтропии для лоренцевских отображений в пространстве с C^0-топологией в терминах нидинг-инвариантов, который имеет следующую формулировку.

Теорема 2.1. *Функция $f \to h_{top}(f)$ в классе лоренцевских отображений, рассматриваемых в C^0-топологии, является разрывной в окрестности отображения f_0 тогда и только тогда, когда $h_{top}(f_0) = 0$ и нидинг-инварианты $K_{f_0}^+, K_{f_0}^-$ отображения f_0 периодичны с одним и тем же периодом; величина скачка энтропии в этом случае равна $\frac{1}{p}\log 2$, где p — общий период нидинг-инвариантов.*

Поскольку, в силу данной теоремы, за исключением указанного в ее формулировке случая, топологическая энтропия непрерывно зависит от отображения, остаётся рассмотреть этот исключительный случай. В данной статье мы добавляем условие кусочной C^1-гладкости отображения f при наличии нулевых односторонних производных в точке разрыва. Будет показано, что в этом классе отображений с C^1-топологией энтропия непрерывно зависит от отображения.

3. Основная теорема

Исходя из предыдущего пункта, мы будем рассматривать C^1-гладкие (вне точки разрыва) лоренцевские отображения и изучим поведение энтропии к окрестности данного отображения f, удовлетворяющего исключительным условиям теоремы 2.1., гарантирующим в C^1-топологии скачок энтропии. Таким образом, будем предполагать нулевое значение энтропии для f и выполнение указанных в теореме равенств.

$$\lim_{x\to c-0} f^p(x) = \lim_{x\to c+0} f^p(x) = c \text{ для некоторого минимального } p. \tag{3.1}$$

Также добавим условие на односторонние нулевые производные в точке разрыва и поэтому

$$\lim_{x\to c-0}(f^p)'(x) = \lim_{x\to c+0}(f^p)'(x) = 0. \tag{3.2}$$

Для начала введем некоторые дополнительные обозначения. Считая отображение f и число p фиксированными, обозначим $g^p = \overline{g}$ для рассматриваемых в этом параграфе отображений g (близких к f). Точку разрыва отображения g обозначим c_g, а ближайшие к ней справа и слева точки разрыва отображения $\overline{g}$ (или прообразы $\overline{g}^{(-1)}(c_g)$) обозначим соответственно a_g и b_g. Нам понадобятся также образы точки разрыва c_g:

$$u_g = \overline{g}(c_g+0), v_g = \overline{g}(c_g-0).$$

В качестве $\tau(I)$ будем считать длину интервала I.

Для произвольного отображения $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющего условиям (3.1) и (3.2), отображение $\overline{f}$ непрерывно в точке c (точнее, имеет место устранимый разрыв), а нидинг-инварианты имеют вид

$$K_f^+ = PPP\ldots,\ K_f^- = QQQ\ldots,\ \text{поэтому } \Theta_f = \frac{\widetilde{P}-\widetilde{Q}}{1-t^p},$$

где $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — соответствующие многочлены степени p. Таким образом, наименьший положительный корень функции $\Theta_f(t)$ совпадает с наименьшим положительным корнем многочлена $\widetilde{P}-\widetilde{Q}$. Для доказательства непрерывности энтропии в точке f выясним, какие нидинг-инварианты могут иметь близкие в C^1—топологии отображения g.

Для любой функции $g \in \mathcal{F}$ поведение функции $\overline{g}$ в окрестности точки разрыва можно описать одним из следующих условий:

1. $v_g \le c, u_g \ge c$,
2. $v_g > c, u_g \ge c$,
3. $v_g \le c, u_g < c$,
4. $v_g > c, u_g < c$.

Мы будем проводить рассуждения для каждого из этих случаев в отдельности.

1. В первом случае при приближении отображения g к исходному отображению f точки a_g и b_g стремятся к точкам a_f и b_f соответственно, и эти точки являются точками разрыва отображений $\overline{g}$ и $\overline{f}$. Выберем ε-окрестность отображения f в C^1-топологии так, чтобы для любого отображения из этой окрестности выполнялись неравенства

$$|v_g| < \varepsilon < \frac{a_f}{3},\ \ |u_g| < \varepsilon < \frac{b_f}{3},$$

$$\overline{g}\,'(x) < \frac{1}{2}, \quad x \in (-2\,\varepsilon, 2\,\varepsilon),$$

$$|\,a_f - a_g| < \varepsilon < \frac{a_f}{3}, \ |\,b_f - b_g| < \varepsilon < \frac{a_f}{3}.$$

Отображение $\overline{g}$ непрерывно и монотонно на интервале $R_0 = (c, c+\varepsilon)$, поэтому $R_1 = \overline{g}(R_0) = (u, \overline{g}(\varepsilon))$ является связным интервалом и его длина не превосходит

$$\tau(R_1) = |\,\overline{g}\,'(\xi)|\tau(R_0) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $u < \varepsilon < \dfrac{a_f}{3}$, то интевалы R_0 и R_1 пересекаются, а следовательно R_1 содержится в интервале $(0, 2\varepsilon) \subset (0, a_g)$, поэтому $\overline{g}$ также непрерывно на R_1. Аналогично, любой интервал $R_n = \overline{g}(R_{n-1})$ пересекается с R_{n-1} и для него справедливо неравенство

$$\tau(R_n) \le \frac{1}{2}\,\tau(R_{n-1}) \le \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Значит и этот интервал содержится в $(0, 2\varepsilon) \subset (0, a_g)$. Таким образом, $\overline{g}^{\,n}$ непрерывно на R_0 для любого $n \in N$, следовательно, нидинг-последовательности точек из R_0 совпадают и равны $PPP\ldots$.

Аналогичные рассуждения можно провести для точек из левой полуокрестности $(c-\varepsilon, c)$, при этом нидинг-последовательности этих точек будут равны $QQQ\ldots$. В итоге имеем, что в первом случае нидинг-инварианты отображения g совпадают с нидинг-инвариантами отображения f. Таким образом,

$$\Theta_g = \frac{\widetilde{P} - \widetilde{Q}}{1 - t^p} = \Theta_f.$$

2. Второй случай отличается тем, что точка b_g является прообразом точки разрыва для отображения $\overline{g}$ и поэтому стремится к точке c_g для близких g. Но для правой полуокрестности точки c_g рассуждения повторяют первый случай, то есть существует система интервалов $R_0, R_1, R_2 \ldots$, построенная выше. Учитывая, что $u_g, v_g \in R_0$, получим следующие выражение для нидинг-инвариантов отображения g

$$K_g^+ = PPP\ldots, K_g^- = QPP\ldots,$$

$$\Theta_g = \widetilde{P} - \widetilde{Q} = \Theta_f(1 - t^p).$$

3. В третьем случае рассуждения аналогичны второму, и в этом случае для левой полуокрестности они приводят к тому же результату:

$$K_g^+ = PQQ\ldots, K_g^- = QQQ\ldots,$$

$$\Theta_g = \widetilde{P} - \widetilde{Q} = \Theta_f(1 - t^p).$$

4. В последнем случае рассуждения существенно отличаются, так как обе точки a_g и b_g есть прообразы точки разрыва и стремятся к c_g при приближении g к исходному отображению. До этого мы рассматривали случаи, когда все итерации точек из окрестности точки разрыва всегда оставались внутри интервала (b_g, a_g), что позволяло однозначно определить нидинги отображения g. Теперь же ситуация усложняется из-за возможной неинвариантности подобного интервала.

Рассмотрим отрезок $J_g = [\min(u_g, b_g), \max(v_g, a_g)]$ и выберем окрестность отображения f так, чтобы

$$| v_g| < \varepsilon, \quad | u_g| < \varepsilon,$$

$$| \overline{g}\,'(x)| < \frac{1}{2}, \quad x \in J,$$

$$| c_g - a_g| < \varepsilon, | c_g - b_g| < \varepsilon.$$

Очевидно, что $\overline{g}(J_g) \subset J_g$. Сначала установим, что хотя бы одна из точек u_g, v_g принадлежит отрезку $[b_g, a_g]$. Предположим, что $u_g < b_g$, тогда $f(c_g, a_g) = (u_g, c_g) \supset (b_g, c_g)$ и $f(b_g, c_g) = (c_g, v_g)$, это означает, что интервал c_g, a_g за две итерации накрывает интервал c_g, v_g. Принимая во внимания условие на производную $| \overline{g}\,'(x)| < \frac{1}{2}$, получим

$$\tau(c_g, v_g) \leq \frac{1}{4}\tau(c_g, a_g),$$

откуда и следует утверждение. Теперь пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $\overline{g}^{\,k}(u_g) > c_g$. Очевидно, что такое k существует для достаточно близких отображений, так как $\overline{g}(x) > x$ при $x \in [u_g, c_g)$ [3].

При $k = 1$ выполняются включения

$$\overline{g}(c_g, a_g) = (u_g, c_g) \subset (a_g, c_g),$$

$$\overline{g}(b_g, c_g) = (c_g, v_g) \subset (c_g, b_g),$$

из которых получаем, что каждая из орбит точек u_g и v_g поочередно попадает в правую и левую полуокрестность точки c_g, и нидинг-инвариатны равны

$$K_g^+ = PQP\ldots, K_g^- = QPQ\ldots,$$

$$\Theta_g = \frac{\widetilde{P} - \widetilde{Q}}{1 + t^p} = \Theta_f \frac{1 - t^p}{1 + t^p}.$$

При $k \geq 2$ рассмотрим совокупность отрезков

$$J_i = [\overline{g}^{\,i-1}(u_g), \overline{g}^{\,i}(u_g)],\ i = \overline{1, k},$$

Длина каждого последующего J_i не превосходит половины длины предыдущего. Заметим, что

$$(b_g, c_g) \subset J_{k-1} \cup J_k,$$

Следовательно

$$\tau(b_g, c_g) \leq \frac{3}{2^{k-1}}\tau(J_1).$$

Для образа интервала (b_g, c_g) имеем следующие оценки

$$\tau(\overline{g}^{\,2}(b_g, c_g)) = \tau(\overline{g}(c_g, v_g)) = \tau(u_g, \overline{g}(v_g)) \leq \frac{3}{2^{k+1}}\tau(J_1) \leq \tau(J_1).$$

Таким образом, точка v_g под действием $\overline{g}$ попадает в интервал J_1 и $\overline{g}^{\,i}(v_g) \in J_{i+1}, i = \overline{1, k-1}$. Теперь рассмотрим два случая.

[3] Если орбита точки u_g содержит точку разрыва, то значение соответствующей функции в этой точке понимается как $\overline{g}^{\,i}(u_g) = \overline{g}^{\,i}(u_g + 0)$. Аналогично, для другой точки $\overline{g}^{\,i}(v_g) = \overline{g}^{\,i}(v_g - 0)$.

Если $\overline{g}^{k-2}(v_g) \in J_{k-1}$ лежит левее точки b_g, то $c_g < \overline{g}^k(v_g) < v_g$. Учитывая, что $c_g < \overline{g}^k(u_g) < v_g$ несложно убедиться, что нидинг-инварианты имеют вид

$$K_g^+ = VV\ldots, K_g^- = QVV\ldots, \text{ где } V = P\underbrace{QQ\ldots Q}_{k-1},$$

$$\Theta_g = (\widetilde{P} - \widetilde{Q})\frac{1-t^p}{1-t^{pk}}.$$

Далее нам понадобится утверждение из [1], позволяющее оценить топологическую этропию функции g.

Предложение 3.1. *Пусть (α, β) и (α^*, β^*) допустимые пары последовательностей, удовлетворяющие неравенствам*

$$\alpha \leq \alpha^*, \ \beta \geq \beta^*,$$

тогда выполняется $r'(\alpha, \beta) \leq r'(\alpha^*, \beta^*)$.

Допустимость пары (α, β) означает, что эти последовательности удовлетворяют при всех $n \geq 0$ условиям

$$\sigma^n(\alpha) \geq \alpha \text{ или } \sigma^n(\alpha) \leq \beta,$$
$$\sigma^n(\beta) \geq \alpha \text{ или } \sigma^n(\beta) \leq \beta.$$

Предположим $\overline{g}^{k-2}(v_g) > b_g$, а следовательно, выполняется $c_g < \overline{g}^{k-1}(v_g) < v_g$. Обозначим интервал $T = (\overline{g}^{k-1}(v_g), \overline{g}^k(u_g)) \subset (c_g, v_g)$ и s наименьшее натуральное число, для которого $c_g \in [t_v, t_u] = \overline{\overline{g}^s(T)}$. На языке нидингов это означает, что нидинг-инварианты равны

$$K_g^+ = S^+K^+(t_u), \ S^+ = P\underbrace{QQ\ldots Q}_{k-1}V_1V_2\ldots V_s,$$

$$K_g^+ = S^-K^-(t_v), \ S^- = QP\underbrace{Q\ldots Q}_{k-2}V_1V_2\ldots V_s, \ V_i = P \text{ или } Q.$$

Так как $t_u \geq c_g$ и $t_v \leq c_g$, то $K^+(t_u) \geq K^+(c_g)$ и $K^-(t_v) \leq K^-(c_g)$, и поэтому выполняются неравенства

$$K_g^+ \geq S^+K_g^+ \geq S^+S^+\ldots,$$
$$K_g^- \leq S^-K_g^- \leq S^-S^-\ldots.$$

Таким образом, получаем тождество

$$\widetilde{S}^+\widetilde{S}^+\ldots - \widetilde{S}^-\widetilde{S}^-\ldots = (\widetilde{P} - \widetilde{Q})\frac{1-t^p}{1-t^{p(k+s)}}$$

Из 3.1. следует, что наименьший положительный корень функции $\Theta_g(t)$ не больше наименьшего положительного корня многочлена $P - Q$. Из условия $h_{top}(f) = 0$ понятно, что на самом деле они совпадают [4].

Учитывая полученные тождества и оценки, полученные во всех пунктах, имеем, что наименьший положительный корень Θ_g совпадает с корнем $\Theta_f = \frac{\widetilde{P}-\widetilde{Q}}{1-t^p}$, следовательно, энтропия непрерывна в точке f. Таким образом, нами доказана:

[4] Последнее тождество остается справедливыми при $s = \infty$, если формальное считать $t^\infty = 0$

Т е о р е м а 3.1. *В классе непрерывно-дифференцируемых (всюду кроме точки разрыва) лоренцевских отображений с C^1 -топологией и при условии нулевых односторонних производных в точке разрыва топологическая энтропия непрерывно зависит от отображения.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 15-01-03687-а, 14-01-00344).

Список литературы

1. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131–139.

2. М.И. Малкин, К.А. Сафонов, “Точная оценка разрывов энтропии для отображений лоренцевского типа”, *Журнал Средневолжского Математического Общества*, **17**:4 (2015), 31–36.

3. L.-S. Young, “On the prevalence of horseshoes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263**:1 (1981), 75–88.

4. Afraimovich V., Sze-Bi Hsu, *Lecture on chaotic dynamical systems. Studies in Advanced Mathematics. 28*, AMS/IP, N.-Y., 2002.

5. M.-C. Li, M. Malkin, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.

6. J.Milnor, W.Thurston, *On iterated maps of the interval. ”Dynamical Systems, Proc., 1986-87” (J.C.Alexander,Ed.). Lec. Notes Math. 1342*, Springer-Verlag, N.-Y., 1988.

7. M. Misiurewicz, “Jumps of entropy in one dimension”, *Fundamenta Mathematicae*, **132** (1989), 215–226.

Дата поступления 9.05.2016

Continuity of topological entropy for piecewise smooth Lorenz type mappings

© M. Malkin[5], K. Safonov[6]

Abstract. For one-dimensional mappings of Lorenz type, the problem on behavior of the topological entropy as the function of a mapping is studied. In the previous paper the authors proved that entropy as the function of a mapping with C^0 -topology can have jumps only for exceptional case, namely, in a neighbourhood of a mapping with zero entropy, and moreover, if and only if two kneading invariants are periodic with the same period. In the present paper we show that for the class of Lorenz mappings having zero one-sided derivatives at the discontinuity point and with C^1 -topology, such an exceptional case is impossible, and thus the entropy depends continously on the mapping.

Key Words: topological entropy, Lorenz type mappings, kneading invariant

[5] Associate professor of the Department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru

[6] Student, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod