УДК 539.3:533.6:517.9

Исследование динамической устойчивости трубопровода

© П. А. Вельмисов[1] А. В. Корнеев[2] С. В. Киреев[3]

Аннотация. В работе предложены математические модели динамики упругого трубопровода – полого стержня, внутри которого протекает жидкость (газ), и на их основе рассмотрены задачи динамической устойчивости трубопровода. Модели как линейные, так и нелинейные, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных для неизвестной функции – поперечного отклонения трубопровода от положения равновесия. На основе построенного функционала типа Ляпунова получено аналитическое условие устойчивости для параметров механической системы для различных типов закрепления трубопровода. Полученное условие устойчивости является достаточным, но не необходимым, поэтому для решения проблемы разработан программный комплекс, позволяющий численно находить приближенное решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания трубопровода, проводить численный эксперимент для построения областей, соответствующих как достаточным, так и необходимым условиям устойчивости. Проведена интерпретация полученных численных результатов и сравнение их с аналитическим условием устойчивости.

Ключевые слова: упругий трубопровод, динамика, устойчивость, уравнения с частными производными, численные методы, метод Галеркина

1. Введение

Составными элементами широкого класса конструкций, приборов, аппаратов, установок, устройств, систем и т. д. являются трубопроводы, по которым протекает жидкость или газ. При проектировании таких конструкций возникают вопросы надежности, которые заключаются в определении параметров механической системы, соответствующих нормальной работе конструкции и не приводящих к разрушению или возникновению аварийной ситуации.

При исследовании колебаний деформируемых тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, одним из важнейших является вопрос об устойчивости этих колебаний. Поток, воздействуя на тело, может не только возбуждать колебания, но и приводить к увеличению амплитуды, скорости или частоты колебаний до значений, нарушающих надежность эксплуатации, вплоть до разрушения конструкции или ее элементов.

Характерной особенностью задач аэрогидроупругости является невозможность определения силового воздействия потока на обтекаемое деформируемое тело заранее, до решения задачи об определении деформации тела. Математически это выражается в том, что совместное движение деформируемого тела и жидкости описывается связанной системой дифференциальных уравнений для функций, определяющих деформации тел и параметры течения жидкости. Однако в некоторых случаях удается разделить решение задачи определения силового воздействия потока на деформируемое тело и задачи исследования деформации тела с помощью интегрального оценивания воздействия жидкости

[1] Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; a.korneev1@gmail.com.

[3] Доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ksv1511@yandex.ru.

(газа) на тело на основе законов теоретической механики. Модель трубопровода, предложенная в работе, использует именно этот подход для получения дифференциального уравнения, описывающего его динамику.

В статических задачах вопрос об исследовании устойчивости формулируется следующим образом: необходимо определить, при каких статических изменениях параметров системы, последняя может совершать скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое (явление дивергенции системы). В этом случае происходит переход параметров через некоторые критические значения, при этом меняется качественная картина решений дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс (явление бифуркации решения).

Задача об исследовании динамической устойчивости (иначе – устойчивости по начальным данным или устойчивости по Ляпунову) может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость–тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие усилия), малым отклонениям прогибов (деформаций) тел от положения равновесия в начальный момент времени $t = 0$ будут соответствовать малые прогибы и в любой момент времени $t > 0$. Такая постановка вопроса является актуальной для многих задач, где в первую очередь важен характер поведения решений уравнения при изменении аргумента, в частности, при его неограниченном возрастании.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Исследования в этом направлении представлены в работах Белоцерковского С.М., Скрипача Б.К., Табачникова В.Г., Галиева Ш.У., Вестяка А.В., Тарлаковского Д.В., Болотина В.В., Вольмира А.С., Григолюка Э.И., Лампера Р.Е., Шандарова Л.Г., Новичкова Ю.Н., Бисплингхоффа Р.Л., Эшли Х., Халфмэна Р.Л., Фына Я.Ц., Доуелла Е.Х., Фершинга Г., Ильюшина А.А., Кийко И.А., Алгазина С.Д., Мовчана А.А., Майлса Дж., Пановко Я.Г., Губановой И.И., Ильгамова М.А., Горшкова А.Г., Кудрявцева Б.Ю., Пономарева А.Т., Шклярчука Ф.Н. и других авторов.

В работах Зефирова В.Н., Колесова В.В., Милославского А.И., Светлицкого В.А., Челомея С.В., Феодосьева В.И., Казакевича М.И., Мовчана А.А., Нгуена В.Л., Томпсона Дж. М.Т. и др. исследуется динамика трубопровода.

Задачи динамической устойчивости и статической неустойчивости упругих элементов конструкций, в том числе трубопроводов, рассматривались в работах [1–29].

2. Постановка задачи

В работе исследуется динамика и динамическая устойчивость трубопровода (полого стержня при протекании внутри него жидкости). На плоскости xOy недеформированному стержню соответствует на оси Ox отрезок $(0, l)$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox.

Для описания динамики трубопровода предлагается уравнение, обобщающее уравнение [15] на случай нелинейного демпфирования в материале трубопровода и инерции вращения сечения,

$$EJ\left[w''\left(1-\frac{3}{2}(w')^2\right)\right]''+\alpha J\left[w''\left(1-\frac{3}{2}(w')^2\right)\right]''^{\,\cdot}-2Jw'w''\left(Ew'''+\alpha\dot{w}'''\right)+$$
$$+\left(m_0+m_*\right)\ddot{w}\left(1+\frac{3}{2}(w')^2\right)+\left(N+m_*U^2\right)w''\left(1-\frac{1}{2}(w')^2\right)+2Um_*\dot{w}'- \qquad (2.1)$$
$$-\rho_0 J\left[\ddot{w}''\left(1-\frac{1}{2}(w')^2\right)-4\dot{w}''w'\dot{w}'-2w''(\dot{w}')^2-3w'w''\ddot{w}'\right]+f(x,t,w,\dot{w})=0,$$

где коэффициенты m_*, m_0, J вычисляются по формулам:

$$m_0=\rho_0\pi\left(R_*^2-R_0^2\right),\ m_*=\rho_*\pi R_0^2,\ J=\frac{\pi}{4}\left(R_*^4-R_0^4\right). \qquad (2.2)$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно. В уравнении (2.1) $w(x,t)$ – деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t; E – модуль упругости; U, m_*, ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между опорами; R_*, R_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода; m_0, ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла; N – сжимающая ($N>0$) или растягивающая ($N<0$) сила; α – коэффициент внутреннего демпфирования; функция $f(x,t,w,\dot{w})$ определяет внешнее воздействие, например, управляющее воздействие, влияние упрочняющего слоя, и т.д. Все коэффициенты, входящие в уравнение – положительные постоянные (за исключением N).

Для определения неизвестной функции $w(x,t)$ уравнение (2.1) необходимо дополнить граничными и начальными условиями. Предполагаются граничные условия следующего типа:

шарнирное закрепление концов: $w(0,t)=w''(0,t)=0,\ w(l,t)=w''(l,t)=0;$ (2.3)

жесткое защемление концов: $w(0,t)=w'(0,t)=0,\ w(l,t)=w'(l,t)=0;$ (2.4)

жесткое защемление одного конца и шарнирное закрепление другого:

$w(0,t)=w'(0,t)=0,\ w(l,t)=w''(l,t)=0;$ (2.5)

$w(0,t)=w''(0,t)=0,\ w(l,t)=w'(l,t)=0.$ (2.6)

3. Исследование устойчивости

Исследование устойчивости проводилось двумя методами. Первый метод основан на составлении функционалов типа Ляпунова в уравнении (2.1) в некоторых частных случаях. Так, для линейной модели, полученной отбрасыванием из уравнения (2.1) кубических членов

$$\begin{gathered}EJw''''+\left(m_0+m_*\right)\ddot{w}+\left(N+m_*U^2\right)w''+\\+2m_*U\dot{w}'+\xi\dot{w}+\mu w+\alpha J\dot{w}''''-\rho_0J\ddot{w}''=0,\end{gathered} \qquad (3.1)$$

где ξ, μ – коэффициенты демпфирования и жесткости упрочняющего слоя, построен функционал

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[EJw''^2+\left(m_0+m_*\right)\dot{w}^2-\left(N+m_*U^2\right)w'^2+\rho_0J\dot{w}'^2+\mu w^2\right]\mathrm{d}x, \qquad (3.2)$$

на основе которого получено аналитическое условие устойчивости

$$N \leq \lambda_1 EJ - m_* U^2, \tag{3.3}$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения $\psi'''' + \lambda\psi'' = 0$ с граничными условиями (2.3–2.6). Например, для шарнирного закрепления $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$

На основе анализа функционала (3.2) доказана теорема:

Теорема 3.1. *Если* $N \leq \lambda_1 EJ - m_* U^2$, *то малым значениям начальных данных* $w_0, \dot{w}_0, w_0', w_0'', \dot{w}_0'$ *(деформации, скорости, угла поворота, кривизны, угловой скорости) будут соответствовать малые (в среднем, в интегральном смысле) значения деформации* $w(x,t)$ *в любой момент времени* $t > 0$.

Второй метод предполагает построение решения уравнений (2.1), (3.1) методом Галеркина, в этом случае $w(x,t)$ задается в виде

$$w_M(x,t) = \sum_{k=1}^{M} w_k(t) g_k(x), \tag{3.4}$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0,l]$ система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

Ниже приведены результаты исследования для уравнения (2.1) при шарнирном закреплении обоих концов.

Обозначим левую часть уравнения (2.1) через $L(w)$. В соответствии с шарнирным закреплением ($w = w'' = 0$), выберем $g_k(x) = \sin\lambda_k x$, где $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = \overline{1,\infty}$. На основе процедуры метода Галеркина получим систему из M обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t), k = \overline{1,M}$.

$$\int_0^l L\left(w_M(x,t)\right) \sin\lambda_k x \,\mathrm{d}x = 0, \quad k = \overline{1,M}. \tag{3.5}$$

Для определения неизвестной функции $w(x,t)$ зададим начальные условия

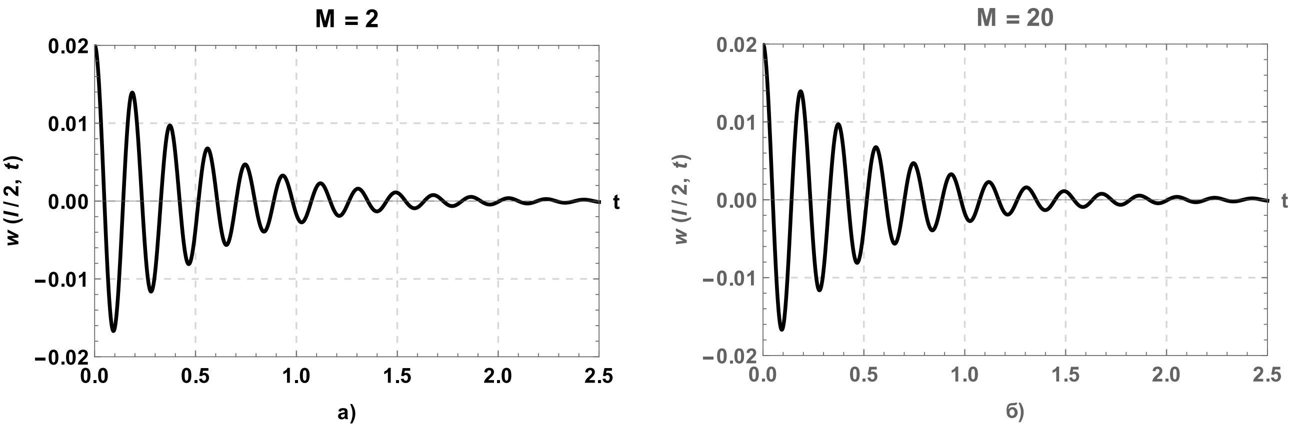
$$w(x,0) = F(x), \;\; \dot{w}(x,0) = G(x). \tag{3.6}$$

Из условий (3.6), согласно методу Галеркина, определяются начальные условия для $w_k(t), k = \overline{1,M}$

$$\begin{aligned} w_k(0) &= \tfrac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\lambda_k x\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1,M},\\ \dot{w}_k(0) &= \tfrac{2}{l}\int_0^l G(x)\sin\lambda_k x\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1,M}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

С помощью разработанного комплекса программ исследовалась динамическая устойчивость в зависимости от сжимающего воздействия N и скорости потока жидкости (газа) U. Параметры исследуемой механической системы были выбраны следующим образом: $E = 210 \cdot 10^9$ – модуль упругости стали, $\rho_* = 1000$ – плотность воды; $\rho_0 = 7000$ – плотность стали; $l = 1$, $R_* = 0,05$, $R_0 = 0,046$, $\alpha = 1$. Функции $F(x)$ и $G(x)$ в (3.6) задавались в виде: $F(x) = 0,02\sin\frac{\pi x}{l}$, $G(x) = 0$. Функция f в (2.1) была представлена выражением: $f(x,t,w,\dot{w}) = \xi\dot{w} + \mu w$, где $\xi = 2$ – коэффициент демпфирования и $\mu = 40$ – коэффициент жесткости основания. Все величины приведены в системе СИ.

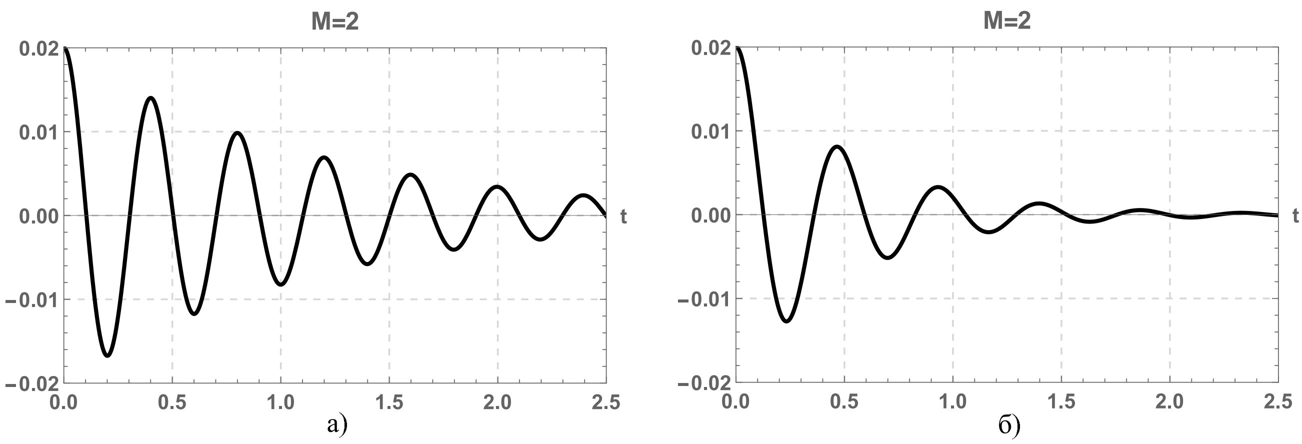
Полученная задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.5) с начальными условиями (3.7) решалась с помощью пакета математических программ Wolfram Mathematica 8. Проведенные расчеты показали, что различие результатов для двух и большего числа приближений (например, $M = 20$) в методе Галеркина несущественно, примеры соответствующих графиков приведены на рис. 3.1. Поэтому при расчетах можно ограничиться двумя приближениями.



Р и с у н о к **3.1**

Пример вычисления колебаний точки $x_0 = l/2$ при $N = 1250$ и $U = 10$ с разным количеством приближений M в методе Галеркина

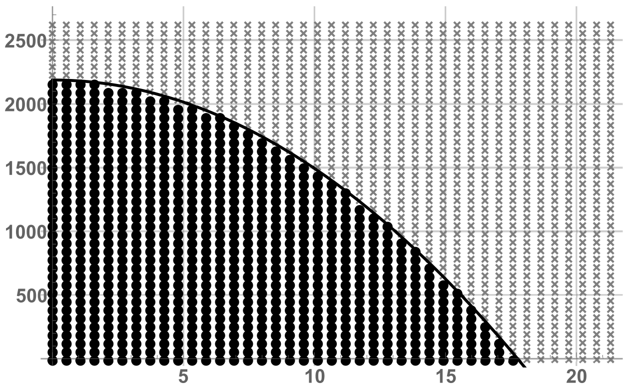
Проведено сравнение характера колебаний точки $x_0 = l/2$, при выборе линейной модели (3.1) и нелинейной модели (2.1), результаты отображены на рис. 3.2. Из рисунка 3.2 видно, что в нелинейной модели наблюдается меньшая частота и более быстрое затухание амплитуды колебаний.



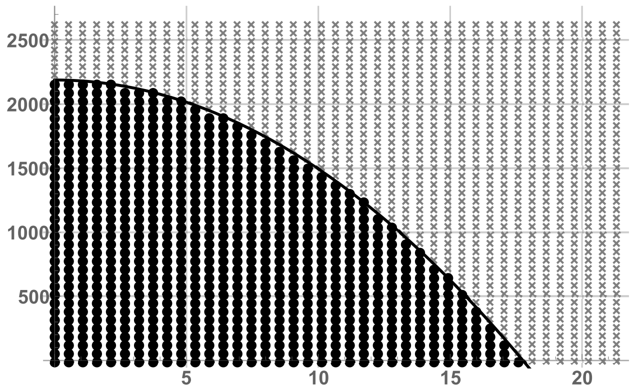
Р и с у н о к **3.2**

Пример вычисления колебаний точки $x_0 = l/2$ при $N = 750$ и $U = 12.5$: а) для линейной модели (3.1); б) для нелинейной модели (2.1)

При помощи разработанного комплекса программ на плоскости (U, N) построены области устойчивости и неустойчивости колебаний. Критерий неустойчивости механической системы при заданных параметрах – неограниченное возрастание амплитуды колебаний с течением времени. Результат исследования изображен на рис. 3.3: серыми символами 'x' показаны точки, в которых наблюдается возрастание амплитуды колебаний (неустойчивость); черные круги на рисунке соответствуют точкам, в которых амплитуда колебаний с течением времени стремится к нулю (устойчивость); на рисунке также изображена теоретическая граница области устойчивости, соответствующая параболе (3.3).



а)



б)

Р и с у н о к **3.3**

Область устойчивости на плоскости (U, N) : а) для линейной модели (3.1); б) для нелинейной модели (2.1)

Согласно рис. 3.3, наблюдается хорошее соответствие теоретических результатов и численного эксперимента. Полученная в результате численного эксперимента область устойчивости незначительно шире, чем рассчитанная по формуле (3.3). Также из рисунка 3.3 видно, что отличие области устойчивости для нелинейной модели (2.1) от аналогичной области устойчивости для линейной модели (3.1) несущественно.

Таким образом, в ходе исследования разработан комплекс программных средств для численного моделирования динамики трубопровода с учетом взаимодействия с потоком жидкости (газа), упругим основанием (упрочняющим слоем) и влияния продольного сжимающего (растягивающего) усилия. Для линейной модели (3.1) построен функционал и на его основе получены в аналитической форме достаточные условия динамической устойчивости, налагающие ограничения на значение сжимающего усилия N, скорости потока жидкости (газа) U и другие параметры модели. Разработанный программный комплекс позволяет определять тип колебаний (устойчивый, неустойчивый) в зависимости от параметров задачи, строить области устойчивости и неустойчивости колебаний.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

Список литературы

1. Paidoussis M. P., “Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики”, *J. Sound and Vibr.*, **3(310)** (2008), 462-492.

2. Paidoussis M. P., Issid N. T., “Dymanic stability of piped conveying fluid”, *J.Sound and Vibr*, **33** (1974), 267–268.

3. Vel’misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D., “Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time”, *Rev. Mat. Estat., Sao Paulo, Brasil*, **19** (2001), 159–178.

4. Vel'misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D., "Investigation of the stability of the solution of the equation of oscillations of an axis or a plate with a delay in time of the reaction and friction forces", *Applications of Mathematics in Engineering*, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 1999, 83–88.

5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В., "Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий", *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, **4** (2014), 29–36.

6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2013, 322 с.

7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "О динамической устойчивости трубопровода", *Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике*, Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007» (г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.), **4**, УлГТУ, Ульяновск, 2007, 10-14.

8. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Семенова Е.П., "О решениях интегро-дифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **2(33)** (2011), 266-271.

9. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., "Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(32)** (2011), 179-185.

10. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., "Устойчивость решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных", *Вестник Самарского государственного университета*, **8** (2008), 331.

11. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Казакова Ю.А., "Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **2(31)** (2013), 120-126.

12. Барметов Ю. П., Дободейч И. А., "К расчету нестационарных течений сжимаемой жидкости в трубопроводе", *Известия вузов. Авиационная техника*, **1** (2006), 18-21.

13. Болотин В. В., *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, М., 1961, 339 с.

14. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., Милушева С. Д., "О динамической устойчивости трубопровода", *Приложение на математиката в техниката*, Сб. доклади и научни съобщения. XXI национальная школа, Болгария, Варна, 1995, 299–304.

15. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., "О динамической устойчивости трубопровода", *Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования*, ред. А.И. Кириллов, С.А. Розанова, Сборник статей Международной конференции, Российский университет дружбы народов, М., 2015, 205–210.

16. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, **4** (2004), 26–29.

17. Вельмисов П. А., Васильева А. А., Семенова Е. П., “Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии”, *Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов* (2–5 февраля 2009 г., г. Ульяновск), Труды 7 Международной конференции, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 68-70.

18. Вельмисов П.А., Горшков Г.М., Рябов Г.К., *Пат.2062662 Российская Федерация, МПК6 B 06 B 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель*, заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. № 18.

19. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2011, 200 с.

20. Вельмисов П. А., Ходзицкая Ю. В., “О динамике трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники* (Труды международной конференции КЛИН–2003), **5**, УлГТУ, Ульяновск, 2003, 35-39.

21. Казакевич М. И., *Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов*, Недра, М., 1977, 200 с.

22. Мовчан А. А., “Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости”, *Прикладная математика и механика*, **4** (1965), 760-762.

23. Могилевич Л. И., Попова А. А., “Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее приминительно к трубопроводному транспорту”, *Наука и техн. транс.*, **2** (2007), 69-72.

24. Сафина Г. Ф., “О Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:4 (2014), 59-67.

25. Светлицкий В. А., *Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха*, Машиностроение, М., 1982, 280 с.

26. Соколова В. Г., Березнев А. В., “Уравнение движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости”, *Изв. вузов. Нефть и газ*, **6** (2004), 76-80.

27. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике : пер. с англ*, Мир, М., 1985, 254 с.

28. Феодосьев В. И., “О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости”, *Инж. сб.*, **10**, АН СССР, М., 1951, 169–170.

29. Челомей С. В., “О динамической устойчивости упругих систем”, *Докл. АН СССР*, **252**, 1980, 307-310.

Дата поступления 12.05.2016

Investigation of dynamic stability of pipeline

© **P. A. Velmisov**[4] **A. V. Korneev**[5] **S. V. Kireev**[6]

Abstract. The paper presents a mathematical model of an elastic pipeline, which is a hollow rod with the fluid (gas) running inside it. The article is devoted to the problem of the dynamic stability of the pipeline. Linear and non-linear models described by partial differential equations for the unknown function, i.e. the displacement of the pipeline points from the equilibrium state. By means of designed functional Lyapunov type, stability theorems were formulated and analytical stability conditions for the parameters of the mechanical system and different types of an initial conditions were founded. The obtained stability conditions are sufficient but not necessary. A mathematical software package was developed to solve this problem. This package allows to find an approximate numerical solution of differential equation for describing pipeline model and plot a stability region appropriate to both sufficient and necessary stability conditions. Full coverage to the design a numerical search algorithm for these regions was given. The obtained numerical results were compared with analytical stability conditions. The influence of the model parameters variation on the stability was studyied.

Key Words: elastic pipeline, dynamics, stability, partial differential equations, numerical methods, galerkin method

[4] Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[5] Graduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; a.korneev1@gmail.com.

[6] Associate Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ksv1511@yandex.ru.