Математическое моделирование и информатика

УДК 517.9

Нелокальная разрешимость лиминального уравнения плотности переползающих дислокаций и топологический инвариант линейного термодеформирования оболочки

© С. Н. Алексеенко[1], С. Н. Нагорных[2], Д. В. Хитева[3]

Аннотация. При описании деформирования оболочки, которому посвящена данная работа, введен коэффициент, связывающий градиент изгиба в двух направлениях, что значительно упростило задачу. Напряжение оболочки положено пропорциональным деформации и квадрату градиента изгиба. Соответствующее уравнение для скалярной плотности дислокаций названо лиминальным. Дислокационная структура рассматриваемой задачи характеризуется своеобразным топологическим инвариантом для краевых дислокаций. Значение одного из коэффициентов лиминального уравнения тесно связано с характеристиками этого топологического инварианта. Выбранные в этой работе характеристики позволили доказать существование нелокального решения, описывающего процесс, при котором плотность дислокаций стремится к нулю. Но так как из физический соображений и математических особенностей лиминального уравнения плотность дислокаций не может равняться нулю, то время существования решения определено из условия, что плотность дислокаций уменьшается до некоторой величины, характеризуемой малым безразмерным коэффициентом δ. При таком предположении получены новые глобальные оценки, на основе которых локальное решение, существование которого было доказано в предыдущих работах, продлено за конечное число шагов на весь интервал, на котором плотность дислокаций не меньше определенной величины, характеризуемой коэффициентом δ. Для оценки длины интервала существования решения в рамках сделанных предположений и условий получена явная формула. Математическая часть исследования рассматриваемой проблемы выполнена на основе метода дополнительного аргумента.

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, метод дополнительного аргумента, лиминальность, глобальные оценки, топологический инвариант

При описании деформирования оболочки [1] был введен коэффициент β, связывающий градиент изгиба ζ в двух направлениях y, x, что упростило задачу до задачи изгиба оболочки. Напряжение оболочки было положено пропорциональным деформации и квадрату градиента изгиба ζ [2]. Соответствующее уравнение для скалярной плотности дислокаций ν названо лиминальным потоконелинейного типа. Для плотностей вида [3] и [4]

$$\nu = \frac{1}{2d\zeta}, \qquad \nu = \frac{1-\cos(\alpha/2)}{b\zeta\cos\chi} \tag{1.1}$$

оно имеет вид

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[3] Магистрант кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; geheimberater@yandex.ru

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \left(g - \frac{\gamma}{\nu}\right) \frac{1}{\nu^3} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^3 + B\nu^2 - A\nu = 0, \tag{1.2}$$

где b - модуль вектора Бюргерса, χ - угол между плоскостью скольжения и поверхностью оболочки, α - угол изгиба оболочки, γ, g, B - положительные коэффициенты.

Известно, что при изгибе пластины возникают пары краевых дислокаций противоположного знака, параллельных оси изгиба [4]. Под действием напряжения дислокации одного знака выталкиваются из пластины, а другого знака движутся вглубь с меньшим напряжением. Взаимное отталкивание и температура приводят к возникновению дислокационных стенок перепендикулярно линиям скольжения.

Коэффициент A в (1.2) имеет вид:

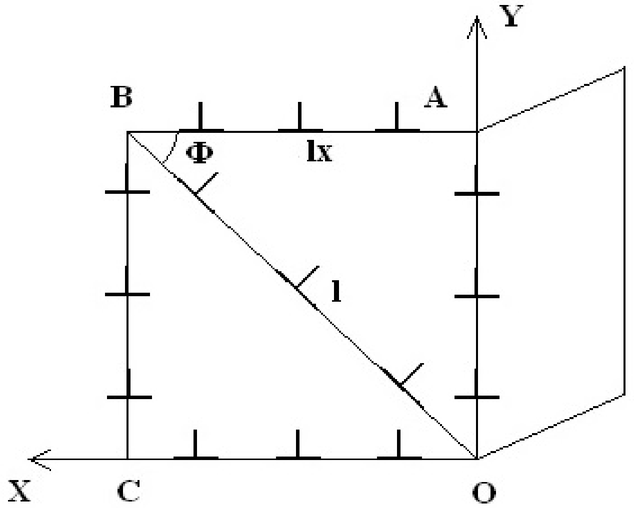
$$A = \frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{Db^3}{KT} \cdot \frac{\beta l}{2l_x d^2} \cdot \frac{P_{xx}}{P_{xy}}, \tag{1.3}$$

где первый множитель характеризует упругие свойства, второй - диффузию дислокаций и точечных дефектов, третий - траектории движения скалярной плотности дислокаций, четвертый - силовую нагрузку оболочки.

Из третьего множителя A получим

$$\frac{\beta l}{2l_x d^2} = \frac{\beta}{2d^2 \cos(\Phi)},$$

где $\cos(\Phi) = l_x/l$, l_x - участок размножения краевых дислокаций, l - участок скольжения.



Топологический инвариант

Обозначим

$$\aleph = \frac{1}{cos(\Phi)}, \tag{1.4}$$

и назовем $\aleph$ топологическим инвариантом типа точки разбиения.

Из (1.4) следует, что траектория переползания OA, зарождения AB, скольжения OB заменяется через участок скольжения OB в сторону OABO и в противоположную сторону OCBO. Эта коллективная структура есть аналог пары дислокаций противоположного знака. При $\cos(\Phi) = 0, \pm 1$ данная структура разрушается. При $l_x = l$ исчезает отрезок разбиения ОВ и траектория переползания ОА замыкается с соседней ВС при движении в одну сторону ОАВСО. Участок зарождения АВ экранируется участком скольжения ОВ. При $l_x = 0$ коэффициент (1.3) не имеет смысла, что соответствует точечному источнику Франка-Рида. Термодеформированием оболочки назовем такое деформирование, в котором присутствует третий множитель (1.3). Дислокационная структура характеризуется топологическим инвариантом $\aleph$ на примере краевых дислокаций.

Из (1.3) - (1.4) вытекает, что при

$$\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \pi \tag{1.5}$$

выполняется неравенство

$$A \leq 0. \tag{1.6}$$

Как будет показано в дальнейшем, это условие приводит к тому, что плотность дислокаций стремится к нулю.

Начальное условие для уравнения (1.2) зададим в виде:

$$\nu\left(0, x\right) = \varphi\left(x\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.7}$$

Таким образом, задача (1.2), (1.7) определена в области

$$\Omega_T = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T_s, -\infty < x < \infty\}.$$

Для исследования разрешимости задачи (1.2), (1.7) применяется метод дополнительного аргумента. В соответствии с данным методом задача (1.2), (1.7) сводится к расширенной характеристической системе:

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = 2\frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1(s,t,x), \tag{1.8}$$

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{1.9}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = \frac{3gw_0(s,t,x) - 4\gamma}{w_0^5(s,t,x)} w_1^3(s,t,x) - 2Bw_0(s,t,x)w_1(s,t,x) + Aw_1(s,t,x), \tag{1.10}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)), \tag{1.11}$$

$$\frac{dw_0(s,t,x)}{ds} = Aw_0(s,t,x) - Bw_0^2(s,t,x) + \frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1^2(s,t,x), \tag{1.12}$$

$$w_0(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{1.13}$$

В результате мы приходим к системе интегральных уравнений:

$$w_1 = 3g\int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^4} ds - 4\gamma \int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^5} ds - 2B\int_0^s w_0 w_1 ds + A\int_0^s w_1 ds +$$
$$+\varphi'\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4} ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3} ds\right), \tag{1.14}$$

$$w_0 = g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^3}ds - \gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - B\int\limits_0^s w_0^2 ds + A\int\limits_0^s w_0 ds +$$
$$+\varphi\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.15}$$

Решение этой системы при $s = t$ дает решение исходной задачи. Подробный вывод системы (1.8) - (1.13) представлен в работе [1].

С помощью метода последовательных приближений доказывается локальное существование дважды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.14) - (1.15). Соответствующая теорема приведена в работе [1].

Также, применяя метод дополнительного аргумента [5], мы получили дополнительные уравнения

$$\frac{dw_2}{ds} = -2\frac{gw_0-\gamma}{w_0^4}w_2^2 + \left[5\frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 + A - 2Bw_0\right]w_2 + 4\frac{5\gamma-3gw_0}{w_0^6}w_1^4 - 2Bw_1^2, \tag{1.16}$$

$$w_2(0,t,x) = \varphi''\left(\eta(0,t,x)\right), \tag{1.17}$$

$$w_2 = 6g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - 8\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}ds + 20\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^4}{w_0^6}ds - 12g\int\limits_0^s \frac{w_1^4}{w_0^5}ds - 2B\int\limits_0^s w_1^2 ds +$$
$$+9g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}w_2 ds - 12\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}w_2 ds - 2g\int\limits_0^s \frac{w_2}{w_0^3}ds + \gamma\int\limits_0^s \frac{w_2}{w_0^4}ds - 2B\int\limits_0^s w_2 w_0 ds +$$
$$+A\int\limits_0^s w_2 ds + \varphi''\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.18}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается локальное существование трижды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.14), (1.15), (1.18). Соответствующая теорема приведена в работе [5].

Определим условия, при выполнении которых задача (1.2), (1.7) будет иметь решение на всем промежутке $[0, T_s]$.

Для этого нам нужно получить глобальные оценки для функций w_1, w_0, w_2.

Из (1.10) с учетом (1.6) получим

$$\frac{dw_1}{ds} = \left(\frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 - 2Bw_0 + A\right)w_1,$$

$$Q = \frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 - 2Bw_0 + A < 0,$$

$$w_1 = \varphi' exp\left(-\int\limits_0^s Q d\nu\right) > 0. \tag{1.19}$$

Из (1.19) следует первая глобальная оценка

$$|w_1| \leq N_\varphi, \tag{1.20}$$

$$N_\varphi = max|sup|\varphi(x)|, sup|\varphi'(x)|, sup|\varphi''(x)||.$$

Приступим к выводу оценок для функции w_0.
Из уравнения (1.12) получим, что:

$$w_0 = \varphi_0 exp\left[\int\limits_0^s (A - Bw_0)d\nu - \int\limits_0^s \left(\frac{\gamma - gw_0}{w_0^5} w_1^2\right) d\nu\right]. \tag{1.21}$$

В силу того, что все подынтегральные выражения отрицательны, функция w_0 будет стремиться к нулю. Т.е. значение выражения (1.21) станет убывать относительно своего начального значения. Тогда получим оценку для w_0:

$$|w_0| \leq \varphi. \tag{1.22}$$

Но по смыслу рассматриваемой задачи плотность дислокаций не может быть равной нулю. Чтобы решать физическую задачу при ненулевой плотности дислокаций, введем условие

$$|w_0| \geq \delta C^*_\varphi, \tag{1.23}$$

где δ - малый безразмерный коэффициент.
Из (1.12) получим неравенство

$$\frac{dw_0}{ds} \geq Aw_0 - Bw_0^2 - \frac{\gamma w_1^2}{(\delta C^*_\varphi)^4}. \tag{1.24}$$

Правая часть в (1.24) представляет собой квадратный трехчлен относительно w_0. Найдем его корни:

$$w_{01} = -\frac{1}{2B}\left[-A + \sqrt{A^2 - \frac{4B\gamma w_1^2}{(\delta C^*_\varphi)^4}}\right], \qquad w_{02} = -\frac{1}{2B}\left[-A - \sqrt{A^2 - \frac{4B\gamma w_1^2}{(\delta C^*_\varphi)^4}}\right]$$

В качестве условия глобальной разрешимости примем, что

$$A^2 - \frac{4B\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C^*_\varphi)^4} \geq 0 \tag{1.25}$$

при выполнении (1.20).
Из (1.25) получаем

$$\delta C^*_\varphi \geq \sqrt{-\frac{2N_\varphi}{A}\sqrt{B\gamma}}. \tag{1.26}$$

Исходя из (1.23), найдем время существования физической модели. Примем, что

$$C^*_\varphi \leq \varphi \leq C_\varphi. \tag{1.27}$$

Из (1.23) и (1.24) с учетом (1.27) получим

$$s \leq \frac{(1-\delta)C_\varphi^*}{BC_\varphi^2 + |A|C_\varphi + \frac{\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}}.$$

Обозначим

$$T_s = \frac{(1-\delta)C_\varphi^*}{BC_\varphi^2 + |A|C_\varphi + \frac{\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}}. \tag{1.28}$$

Неравенство (1.28) определяет время существования физической модели.

Теперь получим глобальную оценку для w_2. В работе [6] для уравнения, подобному (1.16), были получены глобальные оценки. Аналогично Лемме «Max2» из [6] сформулируем следующую лемму.

Л е м м а 1.1. *Если*

$$\varphi'' > max[K_2], \tag{1.29}$$

то на всем интервале существования решения задачи (1.8) - (1.13), (1.16), (1.17) *справедлива оценка*

$$|w_2| < K, \tag{1.30}$$

где K является решением следующего уравнения

$$\frac{dK}{ds} = C(K-K_1)(K-K_2),$$

в котором K_1, K_2 - корни правой части уравнения (1.16)*:*

$$K_1 = \frac{-D-\sqrt{D^2-4CZ}}{2C},$$

$$K_2 = \frac{-D+\sqrt{D^2-4CZ}}{2C},$$

$$D = 5\frac{3g\varphi - 4\gamma}{(\delta C_\varphi^*)^5}(N_\varphi)^2 + A - 2B\varphi,$$

$$C = -2\frac{g\varphi-\gamma}{(\delta C_\varphi^*)^4},$$

$$Z = 4\frac{5\gamma - 3g\varphi}{(\delta C_\varphi^*)^6}(N_\varphi)^4 - 2B(N_\varphi)^2.$$

В работах [1], [5] было доказано, что $w_1(s,t,x)$ является первой производной для функции $\nu(t,x)$, а $w_2(s,t,x)$ является второй производной для функции $\nu(t,x)$ при $s=t$. Соответственно, оценки (1.20), (1.22), (1.23), (1.30) примут вид

$$|\nu(t,x)| \leq \varphi, \qquad |\nu(t,x)| \geq \delta C_\varphi^*, \qquad |\partial_x\nu(t,x)| \leq N_\varphi, \qquad |\partial_{xx}\nu(t,x)| < K. \tag{1.31}$$

Полученные оценки (1.31) дают возможность продлить решение на весь интервал $[0, T_s]$.

Беря в качестве начального значения $\nu(T_s^0, x)$, продлим решение на некоторый интервал $[T_s^0, T_s^1]$, а затем беря в качестве начального значения $\nu(T_s^1, x)$, продлим решение на промежуток $[T_s^1, T_s^2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется глобальными оценками (1.31), справедливыми на любом промежутке разрешимости.

В частности, начальные значения

$$\nu(T_s^k, x) \in \bar{C}^2(R^1), \qquad |\nu(T_s^k, x)| \le \varphi, \qquad |\nu(T_s^k, x)| \ge \delta C_\varphi^*,$$

$$|\partial_x \nu(T_s^k, x)| \le N_\varphi, \qquad |\partial_{xx} \nu(T_s^k, x)| < K$$

для всех $k = 1, 2, ..., n$, $x \in R^1$.

В результате решение за конечное число шагов может быть продлено на весь заданный промежуток $[0, T_s]$.

Общий итог исследования представим в виде теоремы.

В ее формулировке воспользуемся обозначением множества
$\Delta_T = \{(s,t) : 0 \le s \le t \le T_s\}$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $\varphi \in \bar{C}^3(R^1)$ *и выполнены условия*

$$A \le 0,$$

$$A^2 - \frac{4B\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4} \ge 0.$$

Тогда задача Коши (1.2), (1.4) *на всем промежутке* $[0, T_s]$, *где*

$$T_s = \frac{(1-\delta)C_\varphi^*}{BC_\varphi^2 + |A|C_\varphi + \frac{\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}} -$$

время существования физической модели, имеет единственное решение $\nu(t,x) \in \bar{C}^{1,3}$ $([0, T_s] \times R^1)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (1.14) - (1.15) *в виде* $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$. *При этом* $\partial_x \nu(t,x) = w_1(t,t,x)$, *а* $\partial_{xx}\nu(t,x) = w_2(t,t,x)$, *где функция* $w_2(s,t,x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.16) *и начальному условию* (1.17). *Гладкость функций* w_0, w_1, w_2 *определяется соотношениями* $w_0 \in \bar{C}^{1,1,3}(\Delta_T \times R^1)$, $w_1 \in \bar{C}^{1,1,2}(\Delta_T \times R^1)$, $w_2 \in \bar{C}^{1,1,1}(\Delta_T \times R^1)$.

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Хитева Д. В., “Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 24 – 31.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости.*, Наука, М., 1987.

3. Козлов Э. В., Попова Н. А., Конева Н. А., “Скалярная плотность дислокаций во фрагментах с разными типами субструктур”, *Письма о материалах*, **1** (2011), 15 – 18.

4. Фридель Ж., *Дислокации.*, Мир, М, 1967.

5. Алексеенко С. Н., Хитева Д. В., “О дифференцируемости решений лиминального диссипативного уравнения”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:3 (2015), 7 – 11.

6. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., “Применение метода допоплнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнений первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева*, **2**:27 (2011), 320 – 329.

Дата поступления 29.04.2016

Nonlocal solvability of the liminal equation of the creeping dislocations density and the topological invariant of the linear thermal deformation of the shell

© **S. N. Alekseenko[4], S. N. Nagornykh[5], D. V. Khiteva[6]**

Abstract. In the description of a deformation of a shell a coefficient introduced that links the gradient of bending in two directions. That greatly simplified the task. The stress in the shell is proportional to the expected shell deformation and to the square of the gradient of the curvature. The corresponding equation for the scalar density of dislocations is referred to as liminal. A dislocation structure of the considered problem is characterized by a kind of topological invariant for edge dislocations. The value of one of coefficients in liminal equation is closely related to the characteristics of this topological invariant. Characteristics selected in this work allowed us to prove the existence of nonlocal solutions describing the process by which the dislocation density tends to zero. But because of physical grounds and mathematical features of the liminal equations the dislocation density cannot be zero, and then the time of existence of the solution is determined from the condition that the dislocation density decreases to a certain value, characterized by a small dimensionless coefficient δ. Under this assumption, the new global estimates are obtained, based on which the local solution, the existence of which was proved in previous works, extended over a finite number of steps for the whole interval in which the dislocation density is not less than a certain value, characterized by the coefficient δ. An explicit formula to estimate the length of the existence interval of the solution under the made assumptions and conditions is obtained. The mathematical part of the study of the considered problem is made on the basis of the method of an additional argument.

Key Words: dislocations density, nonlinear first-order partial differential equation, liminality, method of an additional argument, global estimates, topological invariant

[4] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[5] The senior lecture of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[6] The undergraduate of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; geheimberater@yandex.ru