УДК 517.925

О числе линейных частных интегралов полиномиальных векторных полей

© **М. В. Долов** [1], **Е. В. Круглов** [2]

Аннотация. В работе рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение $P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$, где P, Q – взаимно простые полиномы степени не менее двух, коэффициенты которых, как и переменные x, y, в общем случае комплексные. Для данного уравнения доказано, что если реализуется ситуация, когда рассматриваемое уравнение имеет бесконечное число линейных частных интегралов, то полиномы P, Q не могут быть взаимно простыми. Основной результат работы содержит точную оценку числа различных линейных частных интегралов; оценку числа линейных интегралов в случае, когда инвариантные множества, соответствующие линейным интегралам, не имеют общих точек; оценку числа линейных интегралов в случае, когда они имеют общую особую точку. Метод доказательства существенно использует исходное предположение о том, что полиномы P, Q являются взаимно простыми. Приведен пример, иллюстрирующий полученный результат.
Ключевые слова: полиномиальные векторные поля, линейные частные интегралы, дифференциальные уравнения

1. Основная теорема

Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими частными интегралами исследовались многими математиками. При этом значительное внимание уделялось оценке числа и степени алгебраических инвариантных кривых. В частности, большое количество исследований посвящено оценке числа линейных частных интегралов (см. работы [1] - [8]).

В настоящей работе доказана

Т е о р е м а 1.1. *Дифференциальное уравнение*

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0, \tag{1.1}$$

где P, Q – взаимно простые полиномы, коэффициенты которых, как и переменные x, y, в общем случае комплексные, $\max(\deg P, \deg Q) = n$, при $n \geq 2$ может иметь не более $3n-1$ различных линейных частных интегралов, при этом: 1) данная оценка точная; 2) в инвариантное множество, являющееся объединением инвариантных множеств $ax + by + c_j = 0$, $j = 1, 2, ..., r$, где $|a| + |b| > 0$, величины c_s и c_j различны для $s \neq j$, может входить не более n множеств указанного вида (т.е. $r \leq n$); 3) особая точка уравнения (1.1) может принадлежать не более чем $n+1$ различным линейным частным интегралам.

Условиям и утверждению теоремы 1.1. удовлетворяет вещественное уравнение

$$x(x^{n-1} - 1)dy - y(y^{n-1} - 1)dx = 0,$$

[1] Доктор физико-математических наук, профессор, Почетный работник ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

[2] Доцент кафедры математического моделирования экономических процессов ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kruglov19@mail.ru.

допускающее $3n-1$ линейных частных интегралов $x=0$, $y=0$, $x=\exp(2\pi ik/(n-1))$, $y=\exp(2\pi ik/(n-1))$, $y=x\exp(2\pi ik/(n-1))$, $k=0,1,2,...,n-2$.

Отметим, что в приведенном примере уравнение допускает линейные частные интегралы с комплексными коэффициентами.

2. Доказательство теоремы 1.1.

Пункт 1 теоремы 1.1. доказан в работе [1] (см. также [2]). Для доказательства пп. 2 и 3 рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Если при $n\geq 2$ уравнение (1.1) имеет бесконечное число различных линейных частных интегралов, то полиномы P, Q в (1.1) не могут быть взаимно простыми.*

Доказательство.

I. Пусть уравнение (1.1) допускает бесконечное множество линейных частных интегралов $\Phi_s\equiv ax+by+c_s=0$, где $|a|+|b|>0$, величины c_s и c_j различны для $s\neq j$. Тогда полином $aP+bQ$ степени не более n делится на любой полином Φ_s. Так как делителей Φ_s больше n, то $aP+bQ\equiv 0$. Таким образом, в случае I утверждение теоремы имеет место.

II. Пусть условия случая I не выполняются. Допустим, что полиномы P и Q взаимно просты и при этом уравнение (1.1) допускает бесконечное число различных линейных частных интегралов. Так как P и Q взаимно просты, то уравнение (1.1) имеет конечное число особых точек. Поэтому найдётся хотя бы одна конечная особая точка (x_0,y_0) для (1.1), которая принадлежит бесконечному числу линейных частных интегралов. Без ограничения общности можно считать, что $x_0=y_0=0$. Таким образом, уравнение (1.1) допускает бесконечное множество решений $y=kx$, где k принимает бесконечное множество различных значений.

Функция $y=kx$ является решением для (1.1) тогда и только тогда, когда для всех x выполнено тождество

$$kP(x,kx)\equiv Q(x,kx). \tag{2.1}$$

Так как $\max(\deg P,\deg Q)=n$, то

$$P(x,y)=P_n(x,y)+P_{n-1}(x,y)+...+P_0,\quad Q(x,y)=Q_n(x,y)+Q_{n-1}(x,y)+...+Q_0, \tag{2.2}$$

где P_j, Q_j – однородные полиномы степени j. Из соотношений (2.1) и (2.2) вытекает, что для всех x

$$(kP_n(1,k)-Q_n(1,k))x^n+(kP_{n-1}(1,k)-Q_{n-1}(1,k))x^{n-1}+...+kP_0-Q_0\equiv 0. \tag{2.3}$$

В силу (2.3) для бесконечного множества различных значений k выполнены равенства

$$kP_n(1,k)-Q_n(1,k)=0,\quad kP_{n-1}(1,k)-Q_{n-1}(1,k)=0,\quad \dots,\quad kP_0-Q_0=0. \tag{2.4}$$

Так как $P_j(1,k)$, $Q_j(1,k)$ суть полиномы по k, то в силу (2.4) для любого k

$$Q_n(1,k)\equiv kP_n(1,k),\quad Q_{n-1}(1,k)\equiv kP_{n-1}(1,k),\quad \dots,\quad Q_0\equiv kP_0. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.5), (2.2) для всех значений k имеем $Q(1,k)\equiv kP(1,k)$. Отсюда следует, что тождество (2.1) справедливо при любых x и k. Поэтому $xQ(x,y)\equiv yP(x,y)$ для всех

x и y. Для $n \geq 2$ последнее возможно только в случае, когда полиномы P и Q имеют общий делитель степени не ниже первой.
Доказательство закончено.

Пример уравнения $ydx - xdy = 0$, имеющего решениями $y = kx$ для любого k, показывает, что условие $n \geq 2$ в лемме 2.1. существенно.

Из доказательства леммы 2.1. вытекают следующие факты.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 1.1. дифференциальное уравнение* (1.1) *в инвариантное множество, являющееся объединением инвариантных множеств* $ax + by + c_j = 0$, $j = 1, 2, ..., r$, *где* $|a| + |b| > 0$, *величины* c_s *и* c_j *различны для* $s \neq j$, *может входить не более* n *множеств указанного вида (т.е.* $r \leq n$*).*

Доказательство следствия непосредственно вытекает из случая I доказательства леммы 2.1..

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 1.1. особая точка уравнения* (1.1) *может принадлежать не более чем* $n + 1$ *различным линейным частным интегралам.*

Доказательство. Допустим, что полиномы P и Q взаимно просты. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = y_0 = 0$ - особая точка уравнения (1.1), через которую проходит конечное число различных линейных частных решений. Следуя в дальнейшем в точности доказательству случая II леммы 2.1, получим уравнения (2.4). Первое из уравнений (2.4) является алгебраическим степени $n + 1$, то есть имеет не более чем $n + 1$ различных значений k, соответствующих проходящим через одну точку линейным частным решениям.

Таким образом, основная теорема 1.1. доказана. Точность оценок следует из приведённого примера.

Авторы выражают благодарность Н.И. Вулпе (N. Vulpe) за то, что он обратил наше внимание на статьи [3] и [4], посвящённые оценке числа линейных частных интегралов полиномиальных векторных полей. Отметим, что из доказанных в настоящей работе утверждений вытекает, что при рассмотрении двумерных полиномиальных векторных полей теорема 4 работы [3] является следствием теоремы 1.1.

Список литературы

1. Долов М.В., Круглов Е.В., "О числе линейных частных интегралов алгебраических дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **51**:4 (2015), 553–555.

2. Долов М.В., Круглов Е.В., "О числе линейных частных интегралов алгебраических дифференциальных уравнений", *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль*, 2014, 58-59.

3. Llibre J., Medrado J.C., "On the invariant hyperpnanes for d-dimensional polynomial vector fields", *Journal of Phisics A: Mathematical and Theoretical*, **40** (2007), 8385–8391.

4. Artes J. C., Grunbaum B., Llibre J., "On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems", *Pacific Journal of Mathematics*, **184**:2 (1998), 207-230.

5. Любимова Р.А., “Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми”, *Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сб. Горький, ГГУ*, 1977, 19-22.

6. Долов М.В., Бубнова И.В., “Системы с линейными частными интегралами”, *Известия РАЕНю Дифференциальные уравнения*, 2006, № 11, 79-80.

7. Долов М.В., Чистякова С.А., “О числе линейных частных интегралов кубической системы, вырожденной на бесконечности”, *Труды Средневолжского математического общества*, **9**:2 (2007), 62-67.

8. Долов М.В., Чистякова С.А., “О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. III”, *Вестник Нижегородского университета*, 2011, № 2, 123-129.

Дата поступления 9.05.2016

On the number of linear particular integrals of polynomial vector fields

© **M. V. Dolov**[3], **E. V. Kruglov**[4]

Abstract. In this paper we consider the ordinary differential equation $P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$ where P, Q are relatively prime polynomials of degree, greater than 1. Coefficients of the equations and variables x, y may be complex. We prove that when this equation has an infinite number of linear partial integrals, the polynomials P, Q can not be relatively prime. The main result of the paper contains an accurate estimate of the number of different linear particular integrals; estimate of the number of linear integrals when the invariant sets corresponding to line integrals have no points in common; estimate of the number of line integrals in a case where they have a common singular point. The method of proof essentially uses the initial assumption that the polynomials P, Q are relatively prime. An example is given that implements proven result.

Key Words: polynomial vector fields, linear particular integrals, differential equations

[3] Professor, Honorary worker of Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; kruglov19@mail.ru.

[4] Associated Professor of Mathematical Modelling of Economic Processes department, Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; kruglov19@mail.ru.