Математика

УДК 519.612

Решение плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений

© Л. Б. Болотин, [1] Е. Б. Кузнецов [2]

Аннотация. Работа посвящена поиску численного решения системы линейных алгебраических уравнений, которые имеют плохую обусловленность при определенных значениях параметра задачи, в качестве которого может быть время. Решение такой системы, например, по правилу Крамера или с помощью метода Гаусса невозможно в окрестности сингулярности матрицы системы. Предложен алгоритм, который позволяет успешно проходить как окрестности сингулярности, так и сами особые точки, в которых матрица системы вырождается. Данный алгоритм предполагает применение метода продолжения решения по наилучшему параметру.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, метод продолжения решения по параметру, наилучший параметр продолжения, обыкновенные дифференциальные уравнения, начальная задача, численные методы интегрирования

1. Введение

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) - одна из основных задач вычислительной математики. От умения эффективно решать такие системы часто зависит сама возможность математического моделирования самых разнообразных процессов с применением ЭВМ. Достаточно сказать, что наиболее эффективный на сегодняшний день численный метод решения задач механики сплошной среды – метод конечных элементов, сводится к решению СЛАУ. Значительная часть численных методов решения различных, в частности нелинейных задач включает в себя решение систем линейных уравнений как промежуточный шаг соответствующего алгоритма.

В данной работе рассматривается частный случай решения СЛАУ, а именно систем, матрицы которых становятся сингулярными при некоторых значениях параметра задачи. В окрестности таких точек задачи становятся плохо обусловленными, т.е. малым изменениям элементов матрицы отвечают большие изменения элементов решения. Несмотря на то, что плохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике это решение численно получить затруднительно, так как даже незначительные вычислительные ошибки округления, неминуемо накапливаемые при расчете, приводят к большим погрешностям. В данной работе исследуются предельные особые точки, в которых ранг матрицы n-го порядка СЛАУ с n неизвестными принимает значение, равное $n-1$. Такие ситуации возникают при решении задач упруговязкопластичности материалов в механике деформируемого твердого тела.

Здесь предлагается алгоритм, позволяющий преодолеть отмеченные трудности.

[1] Студент кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; yourleo@yandex.ru,

[2] Профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$A(t)x = b(t), \tag{2.1}$$

где А - матрица $\|a_{ij}\|_n^n$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $b = (b_1, ..., b_n)^T$, параметр задачи $t \in \mathbb{R}$.

Для решения системы (2.1) используем правило Крамера:

$$x_i(t) = \frac{\Delta_i(t)}{\Delta}, i = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

где $\Delta\,(t) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\Delta_i\,(t) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $(b_{1i}, \ldots, b_{ni})^T$ - столбец правой части системы (2.1), стоящий в i-м столбце матрицы A системы.

Рассмотрим решение системы (2.1) с матрицей вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где строка $a_{11} + \varepsilon_1(1-t), \ldots, a_{1n} + \varepsilon_n(1-t)$ – k-ая строка, $k = \overline{1,n}$, $\varepsilon_i \ll 1$, $i = \overline{1,n}$.

3. Метод решения задачи

В окрестности значения $t = 1$ решение $x_i(t)$ системы (2.1) будет плохо обусловленным, а при $t = 1$ матрица системы становится вырожденной. Для решения системы применим метод продолжения решения по наилучшему параметру [1].

Продифференцируем систему (2.1) по переменной t:

$$A(t)\dot{x} = \dot{b}(t) - \dot{A}(t)x. \tag{3.1}$$

Здесь точка обозначает производную функции по параметру задачи t.

Решение полученной системы по правилу Крамера примет следующий вид:

$$\dot{x}_i = \frac{\tilde{\Delta}_i(t)}{\Delta_i},$$

и также будем иметь плохую обусловленность в окрестности значения $t = 1$. Преобразуем систему (3.1) к наилучшему параметру λ, который определяется условием

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i')^2 + (t')^2 = 1, i = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

где x_i' и t' – производные функций x_i и t по параметру λ.

Тогда система (3.1) запишется в виде

$$A(t)x' = (\dot{b}(t) - \dot{A}(t)x)t', \tag{3.3}$$

где $\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -\varepsilon_1 & \cdots & -\varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$

В матричном виде ее можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\lambda} \\ \\ \vdots \\ \\ x_{n\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{b}_1 \\ \vdots \\ \dot{b}_k + \varepsilon_1 x_1 \dot{+} \cdots + \varepsilon_n x_n \\ \vdots \\ \dot{b}_n \end{pmatrix} t'.$$

Запишем решение системы (3.3), вновь воспользовавшись правилом Крамера:

$$x_i' = \frac{\Delta_i(t)}{\Delta} t', \tag{3.4}$$

где $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \dot{b}_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & \dot{b}_k + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \dot{b}_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Подставив полученное решение x_i' в уравнение для наилучшего параметра (3.2), имеем:

$$\frac{\Delta_i \Delta_i}{\Delta^2} t'^2 = 1 \Rightarrow t'^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \Delta_i \Delta_i}, i = \overline{1, n}.$$

Тогда с учетом (3.4) приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{d\lambda} = \pm \dfrac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta^2 + \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i)^2}} \\ \dfrac{dt}{d\lambda} = \pm \dfrac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i)^2}} \end{cases}, i = \overline{1, n} \tag{3.5}$$

Система (3.5) уже не имеет особенность при $t = 1$. Ее можно успешно проинтегрировать на отрезке $t \in [0, 2]$ любым численным методом решения задачи Коши с начальными условиями

$$\begin{cases} x_i(0) = x_{i0} \\ t(0) = 0 \end{cases}, i = \overline{1, n}, \tag{3.6}$$

где x_{i0} – решение системы (2.1) при $t = 0$ и параметр λ отсчитывается от начальной точки.

4. Пример

В качестве примера рассматривалась система (2.1) с матрицей A третьего порядка вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 + 0.1(1-t) & 1 + 0.2(1-t) & 3 + 0.3(1-t) \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя систему к наилучшему параметру, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\lambda} = \dfrac{13(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}} \\ \dfrac{dx_2}{d\lambda} = \dfrac{-11(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}} \\ \dfrac{dx_3}{d\lambda} = \dfrac{-5(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}} \\ \dfrac{dt}{d\lambda} = \dfrac{-2.4(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}}, \end{cases},$$

которую следует интегрировать с начальными условиями

$$\begin{cases} x_1(0) = -\frac{9}{2} \\ x_2(0) = \frac{121}{26} \\ x_3(0) = \frac{55}{26} \\ t(0) = 0 \end{cases}.$$

Численное решение этой начальной задачи было получено в вычислительной среде MathCAD 14 несколькими численными методами интегрирования [2]. Применялись следующие методы:

1. Метод Эйлера;

2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Отметим, что достоверное решение непреобразованной задачи этими методами получить не удалось из-за переполнения памяти ЭВМ в окрестности особой точки.

5. Выводы

Таким образом, разработан алгоритм и составлены вычислительные программы решения СЛАУ, матрицы которых могут вырождаться при некотором значении параметра задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00943.

Список литературы

1. В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, М.: Эдиториал УРСС, 1999, 222 с.

   (Монография переведена: Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 236 pp.)

2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, М.: Наука, 1987, 600 с.

Дата поступления 30.04.2016

Solution of ill-conditioned system of linear algebraic equations

© L. B. Bolotin [3], E. B. Kuznetsov [4]

Abstract. The paper deals with the numerical solution for a system of linear algebraic equations which are ill-conditioned for some values of the problem parameter. For example, the parameter may be time. The solution of such system according to Cramer's rule or the Gauss method, for example, is impossible in the vicinity of singularity of the system matrix. An offered algorithm allows to pass successfully the vicinity of the singularity and own singular point, where the system matrix degenerates. This algorithm involves the method of solution continuation with respect to the best parameter.

Key Words: system of linear algebraic equations, method of solution continuation with respect to a parameter, the best continuation parameter, ordinary differential equations, initial value problem, numerical methods of integration

[3] A student of the Department of differential equations, Moscow Aviation Institute, (national research university), Moscow; yourleo@yandex.ru,

[4] A professor of the Department of differential equations, Moscow Aviation Institute, (national research university), Moscow; kuznetsov@mai.ru