

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 533.6.013.42

**Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала**© А. В. Анкилов<sup>1</sup>, П. А. Вельмисов<sup>2</sup>, Ю. А. Тамарова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Исследуется динамика и устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в канале дозвукового потока газа или жидкости. Аналитическое исследование устойчивости основано на построении положительно определенного функционала, при этом получены достаточные условия устойчивости. Численное исследование динамики и устойчивости проведено на основе метода конечных разностей с последующей реализацией численного эксперимента на C++.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, динамика, устойчивость, проточный канал, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток

**1. Введение**

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок, аппаратов различного назначения, взаимодействующих с потоком газа, возникает проблема обеспечения надежности их функционирования и увеличения сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений, проточных каналов различного назначения (например, сопел реактивных двигателей, трубопроводных систем) и т.д. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с потоком газа, имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к ее потере. В качестве примеров потери динамической устойчивости можно указать: флаттер крыла самолета, панельный флаттер пластин и оболочек, обтекаемых потоком, например флаттер панели обшивки самолета или ракеты; срывной флаттер лопаток турбин и винтов; колебания проводов, дымовых труб, висячих мостов и т.д.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, являются устройства, используемые для интенсификации технологических процессов. Например, устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, установки для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см. [1]).

Таким образом, при проектировании конструкций, приборов и т.д., находящихся во взаимодействии с потоком газа, необходимо решать задачи, связанные с исследованием

<sup>1</sup> Доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

<sup>2</sup> Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

<sup>3</sup> Инженер-программист, Ульяновское конструкторское бюро приборостроения, г. Ульяновск; kazakovau@mail.ru.

устойчивости, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость-тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени.

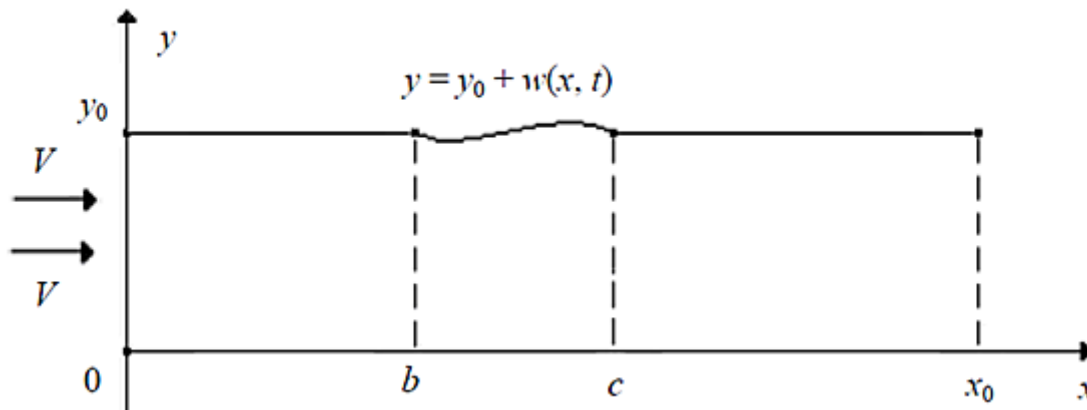
Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Исследования в этом направлении представлены в работах Белоцерковского С.М., Скрипача Б.К., Табачникова В.Г., Григолюка Э.И., Болотина В.В., Вольмира А.С., Лампера Р.Е., Шандарова Л.Г., Новичкова Ю.Н., Бисплингхоффа Р.Л., Эшли Х., Халфмана Р.Л., Фына Я.Ц., Фершинга Г., Доуэлла Е.Х., Горшкова А.Г., Ильюшина А.А., Кийко И.А., Алгазина С.Д., Мовчана А.А., Дж. Майлса, Пановко Я.Г., Губанова И.И., Ильгамова М.А., Кудрявцева Б.Ю., Минасяна Д.М., Морозова В.И., Овчинникова В.В., Могилевича Л.И., Вельмисова П.А. и др. Среди последних исследований по динамике и устойчивости трубопроводов и их элементов, при протекании внутри них потока жидкости или газа, следует отметить исследования Могилевича Л.И., Поповой А.А., Мокеева В.В., Ершова Б.А., Барметова Ю.П., Дободейча И.А., Звягина А.В., Соколова В.Г., Березнева А.В., Paidoussis M.P. [2]–[8] и многих других отечественных и зарубежных ученых. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, отметим монографии и статьи [9]–[26].

В данной работе исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока газа или жидкости (в модели идеальной сжимаемой среды). Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного потока и малым деформациям (прогибам) упругого элемента стенки канала. Представлено два метода исследования. Первый (аналитический) основан на построении функционала для связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций: прогиба упругого элемента стенки канала и потенциала скорости жидкости (газа), при этом получены достаточные условия устойчивости решений этой системы в аналитической форме. Второй метод (численный) исследования динамики упругого элемента основан на методе конечных разностей [27].

Разработанный метод можно использовать для решения задачи о динамике и устойчивости произвольного количества произвольно закрепленных и произвольно расположенных на обеих стенках канала упругих элементов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале  $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ . Скорость невозмущенного однородного потока равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Упругой является часть стенки  $y = y_0$  при  $x \in [b, c]$  (Рис. 2.1). Введем обозначения:  $w(x, t)$  - функция деформации упругого элемента (упругой пластины) стенки канала;  $\phi(x, y, t)$  - потенциал скорости возмущенного потока.



Р и с у н о к 2.1

Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\phi_{tt} + 2V\phi_{xt} + V^2\phi_{xx} = a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\phi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0], \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\phi(0, y, t) = 0, \quad \phi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

$$L(w) = -\rho(\phi_t(x, y_0, t) + V\phi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

$$L(w) \equiv Dw''''(x, t) + \beta_2\dot{w}''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_0w(x, t). \quad (2.7)$$

$$w(b, t) = w''(b, t) = w(c, t) = w''(c, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad x \in (b, c), \quad (2.9)$$

$$\dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (b, c), \quad (2.10)$$

$$\phi(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad (x, y) \in J, \quad (2.11)$$

$$\phi_t(x, y, 0) = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in J. \quad (2.12)$$

Индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$ ; штрих и точка - частные производные по  $x$  и  $t$  соответственно;  $\rho$  - плотность жидкости или газа в однородном невозмущенном потоке;  $D, M$  - изгибная жесткость и погонная масса пластины;  $N$  - сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) пластину сила;  $\beta_1, \beta_2$  - коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования;  $\beta_0$  - коэффициент жесткости основания;  $a$  - скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ( $a > V$ ).

Уравнение (2.1) описывает динамику идеального газа (жидкости) в модели сжимаемой среды, (2.2)-(2.4) - условия непротекания стенок канала, (2.5) - условия отсутствия возмущений в граничных сечениях канала, уравнение (2.6), (2.7) описывает динамику упругого элемента стенки канала, (2.8) - условия шарнирного закрепления концов упругого элемента, (2.9)-(2.12) - начальные условия.

### 3. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость нулевого решения краевой задачи (2.1)-(2.8)  $\phi(x, y, t) \equiv 0$ ,  $w(x, t) \equiv 0$  по отношению к возмущениям начальных условий (2.9)-(2.12), т.е. устойчивость по Ляпунову. Введем функционал:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2) dx dy - 2a^2V \int_b^c \phi(x, y_0, t)w'(x, t) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0w^2) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для функций  $\phi(x, y, t)$  и  $w(x, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (2.1) и (2.6), (2.7), производная от  $\Phi$  по  $t$  примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_J (\phi_t(-2V\phi_{xt} - V^2\phi_{xx} + a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy})) + (a^2 - V^2)\phi_x\phi_{xt} + a^2\phi_y\phi_{yt}) dx dy - \\ & - 2a^2V \int_b^c (\phi_t(x, y_0, t)w'(x, t) + \phi(x, y_0, t)\dot{w}'(x, t)) dx + \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\dot{w}[-\rho(\phi_t(x, y_0, t) + \\ & + V\phi_x(x, y_0, t)) - Dw'''' - \beta_2\dot{w}'''' - Nw'' - \beta_1\dot{w} - \beta_0w] + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \beta_0w\dot{w}) dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Произведя интегрирование с учетом условий (2.2)-(2.5), (2.8), получим:

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\beta_2\dot{w}''^2 + \beta_1\dot{w}^2) dx. \quad (3.3)$$

Пусть выполняются условия:

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (3.4)$$

тогда имеют место неравенства:

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.5)$$

Для оценки функционала для функции  $w(x, t)$  запишем неравенства Рэлея [28]:

$$\int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_b^c w'^2(x, t) dx, \quad \int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w^2(x, t) dx. \quad (3.6)$$

$$\int_0^{x_0} \phi_x^2 dx \geq \eta_1 \int_0^{x_0} \phi^2 dx, \quad (3.7)$$

где  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  - наименьшие собственные значения краевых задач  $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$ ,  $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$ ,  $x \in (b, c)$  с граничными условиями (2.8);  $\eta_1 = \frac{\pi^2}{x_0^2}$  - наименьшее собственное значение краевой задачи  $\psi'' = -\eta\psi$ ,  $x \in (0, x_0)$  с краевыми условиями  $\psi(0) = 0$ ,

$\psi(x_0) = 0$ , которые соответствуют (2.5). Интегрируя неравенство (3.7) от 0 до  $y_0$  по переменной  $y$ , получим

$$\iint_J \phi_x^2(x, y, t) dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_J \phi^2(x, y, t) dx dy. \quad (3.8)$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим неравенства:

$$\begin{aligned} \left( \int_b^x w'(x, t) dx \right)^2 &\leq \int_b^x 1^2 dx \int_b^x w'^2(x, t) dx \leq \int_b^c 1^2 dx \int_b^c w'^2(x, t) dx, \\ (w(x, t)|_b^x)^2 &\leq (x|_b^c) \int_b^c w'^2 dx, \quad w^2(x, t) \leq (c-b) \int_b^c w'^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\iint_J \phi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_J (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 dx dy. \quad (3.10)$$

Оценим  $\Phi(0)$  сверху, используя неравенства (3.6) и очевидное неравенство  $-2ab \leq a^2 + b^2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \iint_J (\phi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \phi_{x0}^2 + a^2 \phi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left( M \dot{w}_0^2 + \left( D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w''_0^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь введены обозначения:  $\phi_{t0} = \phi_t(x, y, 0)$ ,  $\phi_{x0} = \phi_x(x, y, 0)$ ,  $\phi_{y0} = \phi_y(x, y, 0)$ ,  $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$ ,  $w_0 = w(x, 0)$ ,  $w'_0 = w'(x, 0)$ ,  $w''_0 = w''(x, 0)$ .

Оценим  $\Phi(t)$  снизу, применяя (3.6), (3.8), (3.10) для (3.1):

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J \left( \phi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \phi^2 + \frac{a^2}{y_0^2} (\phi(x, y_0, t) - \phi(x, y, t))^2 \right) dx dy - \\ &- 2a^2 V \int_b^c \phi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 D - N) w'^2 dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Введем обозначение:

$$f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b], \\ w'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in [c, x_0), \end{cases}$$

тогда из (3.12) получим неравенство:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J \left[ \phi^2(x, y, t) + \left( (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \phi^2(x, y, t) + \frac{a^2}{y_0^2} \right) \phi^2(x, y, t) - \right. \\ &- \frac{4a^2}{y_0^2} \phi(x, y_0, t) \phi(x, y, t) + \frac{2a^2}{y_0^2} \phi^2(x, y_0, t) - \frac{2a^2 V}{y_0} \phi(x, y_0, t) f(x, t) + \\ &\left. + \frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} f^2(x, t) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма относительно  $\phi(x, y, t)$ ,  $\phi(x, y_0, t)$ ,  $f(x, t)$  в (3.13) будет положительно определенной, если выполняются условия:

$$\lambda_1 D - N > 0. \tag{3.14}$$

$$\frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0} \cdot \frac{2(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} - V^2 \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) > 0. \tag{3.15}$$

Преобразуем неравенство (3.15):

$$N < \lambda_1 D - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2 - V^2)\pi^2} \left( \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \tag{3.16}$$

Оценивая квадратичную форму в (3.13) относительно  $w(x, t)$  с учетом (3.9), получим:

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2(c - b)} w^2(x, t), \tag{3.17}$$

где  $\Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$ ,  $\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2d_{11} > 0$ ,  $d_{11} = \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}$ ,  $d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2}{y_0^2}$ ,  $d_{23} = \frac{V}{y_0^2}$ ,  $d_{33} = \frac{a^2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0}$ .

Учитывая (3.5), (3.11), (3.17), получим неравенство:

$$w^2(x, t) \leq \frac{\Delta_2(c - b)}{\Delta_3 y_0} \iint_J (\phi_{t0}^2 + (a^2 - V^2)\phi_{x0}^2 + a^2\phi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \phi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left( M\dot{w}_0^2 + \left( D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w''_0^2 \right) dx,$$

из которого следует

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть выполняются условия (3.4), (3.14), (3.16). Тогда решение  $w(x, t)$  задачи (2.1)-(2.8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных  $\phi_{t0}$ ,  $\phi_{x0}$ ,  $\phi_{y0}$ ,  $\phi(x, y_0, 0)$ ,  $\dot{w}_0$ ,  $w''_0$ .

#### 4. Метод конечных разностей

Разобьем: отрезок  $[0, x_0]$  на  $n$  частей точками  $x_i = h_x i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , где  $h_x = \frac{x_0}{n}$ ; отрезок  $[0, y_0]$  - на  $m$  частей точками  $y_j = h_y j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , где  $h_y = \frac{y_0}{m}$ ; отрезок  $[0; T]$  - на  $K$  частей точками  $t_k = h_t k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$ , где  $h_t = \frac{T}{K}$ .

Введем обозначения  $\phi(x_i, y_j, t_k) = \phi_{ijk}$ ,  $w(x_i, t_k) = w_{ik}$ .

Конечно-разностная аппроксимация уравнений и условий (2.1)-(2.12) имеет вид

$$\frac{\phi_{ijk+1} - 2\phi_{ijk} + \phi_{ijk-1}}{h_t^2} + 2V \frac{\phi_{i+1jk} - \phi_{ijk} - \phi_{i+1jk-1} + \phi_{ijk-1}}{h_x h_t} + V^2 \frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} = a^2 \left( \frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} + \frac{\phi_{ij+1k} - 2\phi_{ijk} + \phi_{ij-1k}}{h_y^2} \right); \tag{4.1}$$

$$\frac{\phi_{imk+1} - \phi_{im-1k+1}}{h_y} = \frac{w_{ik+1} - w_{ik}}{h_t} + V \frac{w_{i+1k} - w_{ik}}{h_x}, \quad i \in (i_b, i_c); \quad (4.2)$$

$$\frac{\phi_{imk+1} - \phi_{im-1k+1}}{h_y} = 0, \quad i \in (0, i_b] \cup [i_c, n); \quad (4.3)$$

$$\phi_{i0k} = \phi_{i1k}; \quad (4.4)$$

$$\phi_{0jk} = 0; \quad (4.5)$$

$$\phi_{njk} = 0; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} -\rho \left( \frac{\phi_{imk} - \phi_{imk-1}}{h_t} + V \frac{\phi_{i+1mk} - \phi_{imk}}{h_x} \right) &= \frac{D}{h_x^4} (w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - 4w_{i-1k} + w_{i-2k}) + \\ &+ \frac{\beta_2}{h_x^4 h_t} (w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - 4w_{i-1k} + w_{i-2k} - w_{i+2k-1} + 4w_{i+1k-1} - 6w_{ik-1} + 4w_{i-1k-1} - \\ &- w_{i-2k-1}) + \frac{M}{h_t^2} (w_{ik+1} - 2w_{ik} + w_{ik-1}) + \frac{N}{h_x^2} (w_{i+1k} - 2w_{ik} + w_{i-1k}) + \frac{\beta_1}{h_t} (w_{ik} - w_{ik-1}) + \beta_0 w_{ik}, \\ &i \in (i_b, i_c); \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$w_{i_b k+1} = 0, \quad w_{i_c k+1} = 0; \quad (4.8)$$

$$w_{i_b+1k+1} = \frac{1}{2} w_{i_b+2k+1}; \quad w_{i_c-1k+1} = \frac{1}{2} w_{i_c-2k+1}; \quad (4.9)$$

$$w_{i0} = f_1(x_i), \quad i \in (i_b, i_c); \quad (4.10)$$

$$\frac{w_{i1} - w_{i0}}{h_t} = f_2(x_i), \quad i \in (i_b, i_c); \quad (4.11)$$

$$\phi_{ij0} = \psi_1(x_i, y_j); \quad (4.12)$$

$$\frac{\phi_{ij1} - \phi_{ij0}}{h_t} = \psi_2(x_i, y_j) \Rightarrow \phi_{ij1} = \psi_1(x_i, y_j) + h_t \psi_2(x_i, y_j). \quad (4.13)$$

## 5. Согласование начальных данных

Функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  должны удовлетворять условиям (2.8):

$$f_1(b) = f''_1(b) = f_1(c) = f''_1(c) = 0 \quad (5.1)$$

$$f_2(b) = f''_2(b) = f_2(c) = f''_2(c) = 0 \quad (5.2)$$

Функции  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  должны удовлетворять условиям (2.4)-(2.5):

$$\psi_{1y}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad (5.3)$$

$$\psi_{2y}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad (5.4)$$

$$\psi_1(0, y) = 0, \quad \psi_1(x_0, y) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad (5.5)$$

$$\psi_2(0, y) = 0, \quad \psi_2(x_0, y) = 0, \quad y \in (0, y_0). \quad (5.6)$$

Функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  должны быть согласованы в соответствии с условием (2.2)-(2.3) и уравнением (2.6),(2.7). Из уравнения (2.6),(2.7) получим:

$$-\rho(\phi_t(x, y_0, 0) + V\phi_x(x, y_0, 0)) = Dw''''(x, 0) + \beta_2 \dot{w}''''(x, 0) + M\ddot{w}(x, 0) + Nw''(x, 0) + \beta_1 \dot{w}(x, 0) + \beta_0 w(x, 0). \quad (5.7)$$

Согласно условию (2.2)-(2.3), начальное ускорение стенки

$$\ddot{w}(x, 0) = \phi_{yt}(x, y_0, 0) - V\dot{w}'(x, 0) \quad (5.8)$$

Подставляя (5.8) в (5.7), получим

$$\begin{aligned} & -\rho(\phi_t(x, y_0, 0) + V\phi_x(x, y_0, 0)) - M\phi_{yt}(x, y_0, 0) = Dw''''(x, 0) + \beta_2\dot{w}''''(x, 0) - \\ & -MV\dot{w}'(x, 0) + Nw''(x, 0) + \beta_1\dot{w}(x, 0) + \beta_0w(x, 0) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & -\rho(\psi_2(x, y_0) + V\psi_{1x}(x, y_0)) - M\psi_{2y}(x, y_0) = Df_1''''(x) + \beta_2f_2''''(x) - \\ & -MVf_2'(x) + Nf_1''(x) + \beta_1f_2(x) + \beta_0f_1(x) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Согласно (2.2)-(2.3), должно выполняться равенство

$$\psi_{1y}(x, y_0) = f_2(x) + Vf_1'(x), \quad x \in (b, c) \quad (5.10)$$

$$\psi_{1y}(x, y_0) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0). \quad (5.11)$$

## 6. Программная реализация

1) Задаем начальные условия

$$w_{i0} = f_1(x_i), \quad w_{i1} = f_1(x_i) + h_t f_2(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\phi_{ij0} = \psi_1(x_i, y_j), \quad \phi_{ij1} = \psi_1(x_i, y_j) + h_t \psi_2(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m;$$

2) Из уравнения (4.1) находим значения потенциала

$$\begin{aligned} \phi_{ijk+1} = & 2\phi_{ijk} - \phi_{ijk-1} + h_t^2 a^2 \left( \frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} + \frac{\phi_{ij+1k} - 2\phi_{ijk} + \phi_{ij-1k}}{h_y^2} \right) - \\ & - 2h_t^2 V \frac{\phi_{i+1jk} - \phi_{ijk} - \phi_{i+1jk-1} + \phi_{ijk-1}}{h_x h_t} - V^2 h_t^2 \frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, m-1;$$

3) Из условий (4.4)-(4.6) находим значения потенциала в граничных точках

$$\phi_{i0k+1} = \phi_{i1k+1}, \quad \phi_{0jk+1} = 0, \quad \phi_{njk+1} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 0, \dots, m-1;$$

4) Из уравнения (4.7) находим значения функции прогиба

$$\begin{aligned} w_{ik+1} = & \frac{h_t^2}{M} \left[ -\rho \left( \frac{\phi_{imk} - \phi_{imk-1}}{h_t} + V \frac{\phi_{i+1mk} - \phi_{imk}}{h_x} \right) - \frac{D}{h_x^4} (w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - \right. \\ & - 4w_{i-1k} + w_{i-2k}) + \frac{\beta^2}{h_x^4 h_t} (w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - 4w_{i-1k} + w_{i-2k} - w_{i+2k-1} + 4w_{i+1k-1} - \\ & - 6w_{ik-1} + 4w_{i-1k-1} - w_{i-2k-1}) - \frac{M}{h_t^2} (w_{ik-1} - 2w_{ik}) - \frac{N}{h_x^2} (w_{i+1k} - 2w_{ik} + w_{i-1k}) - \\ & \left. - \frac{\beta_1}{h_t} (w_{ik} - w_{ik-1}) - \beta_0 w_{ik} \right], \quad i = i_b + 2, \dots, i_c - 2; \end{aligned}$$

5) Используя граничные условия (4.8)-(4.9), находим значения функции прогиба в граничных точках отрезка  $[b, c]$

$$w_{i_b k+1} = 0, \quad w_{i_c k+1} = 0, \quad w_{i_b+1k+1} = \frac{1}{2} w_{i_b+2k+1}, \quad w_{i_c-1k+1} = \frac{1}{2} w_{i_c-2k+1};$$

6) Из условий (4.2)-(4.3) находим

$$\phi_{imk+1} = \phi_{im-1k+1} + h_y \frac{w_{ik+1} - w_{ik}}{h_t} + V h_y \frac{w_{i+1k} - w_{ik}}{h_x}, \quad i \in [i_b, i_c],$$

$$\phi_{imk+1} = \phi_{im-1k+1}, \quad i \in (0, i_b) \cup (i_c, n).$$

Цикл повторяется с пункта 2 по 6 для  $k = 1, 2, \dots, K-1$ .



## 7. Численный эксперимент

Введем функции, удовлетворяющие условиям (5.1)-(5.2), например:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin \frac{\pi(x-b)}{b-c}.$$

Согласно условиям (5.10), (5.11), функция  $\psi_{1y}(x, y_0)$  примет вид:

$$\psi_{1y}(x, y_0) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b) \cup (c, x_0), \\ \sin \frac{\pi(x-b)}{b-c}, & x \in [b, c]. \end{cases} \quad (7.1)$$

С учетом условий (7.1), (5.3), (5.5) функцию  $\psi_1(x, y)$  можно взять в виде

$$\psi_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b) \cup (c, x_0), \\ \frac{y^2}{2y_0} \sin \frac{\pi(x-b)}{b-c}, & x \in [b, c]. \end{cases}$$

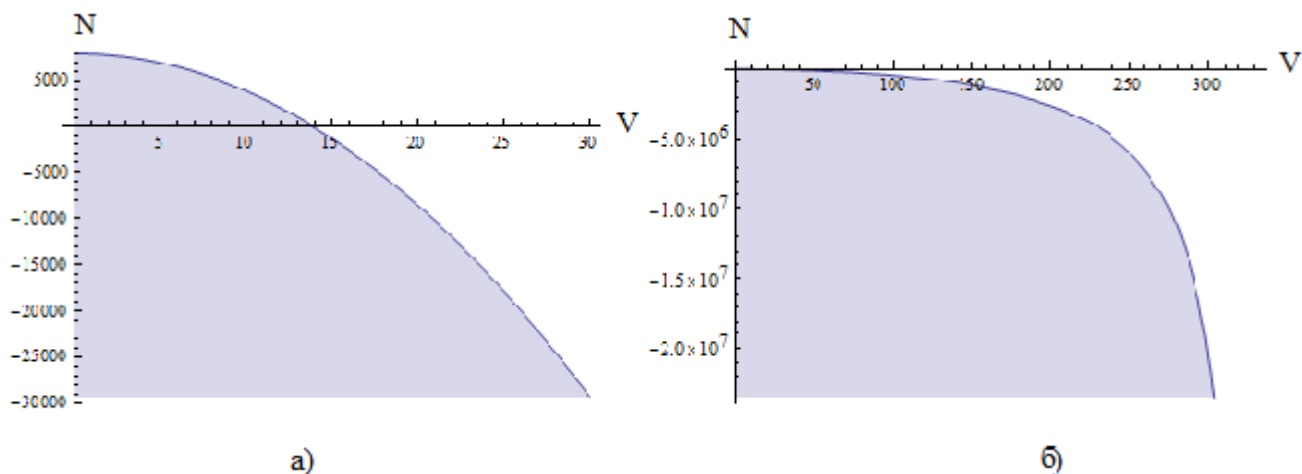
Условия (7.1), (5.3), (5.5) выполняются. Учитывая (5.9), зададим  $\psi_2(x, y)$  в виде

$$\psi_2(x, y) = \begin{cases} -\cos \frac{\pi y}{y_0} \frac{(M-\rho)\pi V}{\rho(b-c)} \sin \frac{\pi x}{2b}, & x \in (0, b), \\ -\frac{1}{\rho} \cos \frac{\pi y}{y_0} \left[ \frac{(M-\rho)\pi V}{\rho(b-c)} \cos \frac{\pi(x-b)}{(b-c)} - \left( \beta_1 + \frac{\beta_2 \pi^4}{(b-c)^4} \right) \sin \frac{\pi(x-b)}{b-c} \right], & x \in [b, c], \\ -\cos \frac{\pi y}{y_0} \frac{(M-\rho)\pi V}{\rho(b-c)} \sin \frac{\pi(x-x_0)}{2(c-x_0)}, & x \in (c, x_0) \end{cases}$$

Условия (5.4), (5.6) выполняются.

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда - воздух ( $\rho = 1$ ), пластина изготовлена из алюминия ( $E = 7 \cdot 10^{10}$ ,  $\rho_{\text{пл}} = 8480$ ). Выберем параметры механической системы:  $x_0 = 20$ ,  $b = 10$ ,  $c = 11$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 0,005$ ,  $M = \rho_{\text{пл}} h = 42,4$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $V = 5$ ,  $a = 331$ ,  $\beta_0 = 4$ ,  $\beta_1 = 0,4$ ,  $\beta_2 = 0,4$ . Все значения приведены в системе СИ.

Согласно неравенству (3.16) для шарнирного закрепления ( $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{(c-b)^2} = \pi^2$ ) построены области устойчивости (обозначена на рис. 7.1 серым цветом) на плоскости «усилие  $N$  - скорость потока  $V$ » (рис. 7.1). На рисунке 7.1а:  $V \in [0, 30]$ , на рисунке 7.1б:  $V \in [0, a]$ , где  $a$  - скорость звука.

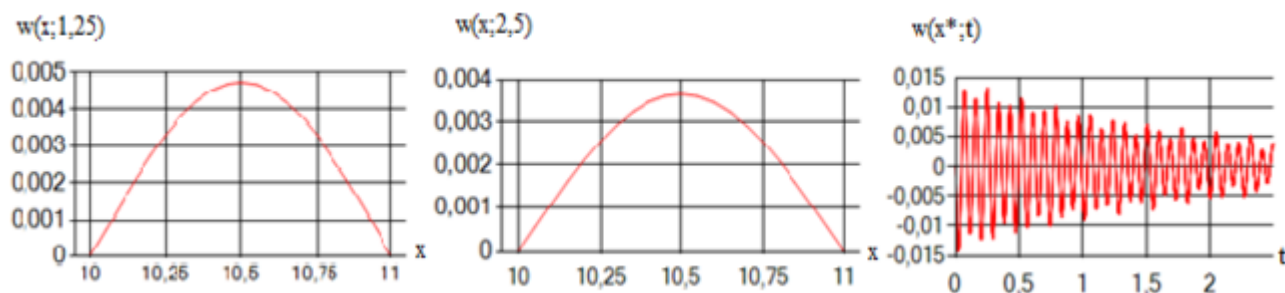


Р и с у н о к 7.1

Область устойчивости на плоскости  $(V, N)$ .

С использованием описанного алгоритма, с помощью программы, разработанной на языке C++, получены для шарнирного закрепления графики функции  $w(x, t)$  при  $x \in [b; c]$ ,  $t = t_0$  и при  $x^* = (b+c)/2$ ,  $t \in [0; 2, 5]$  при разных значениях  $N$ . При реализации численного эксперимента было введено разбиение  $n = 400$ ,  $m = 100$ ,  $K = 100000$ .

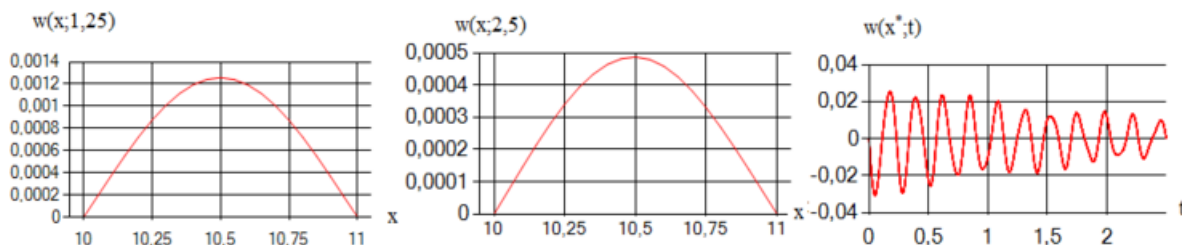
1)  $N = -10000$



Р и с у н о к 7.2

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке  $x^*$ .

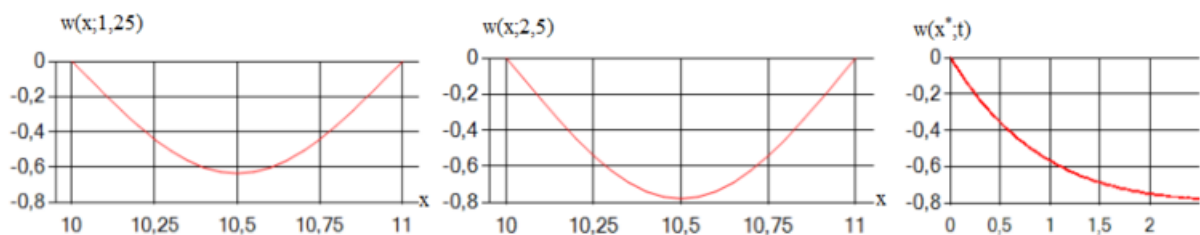
2)  $N = 6000$



Р и с у н о к 7.3

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке  $x^*$ .

3)  $N = 9790$

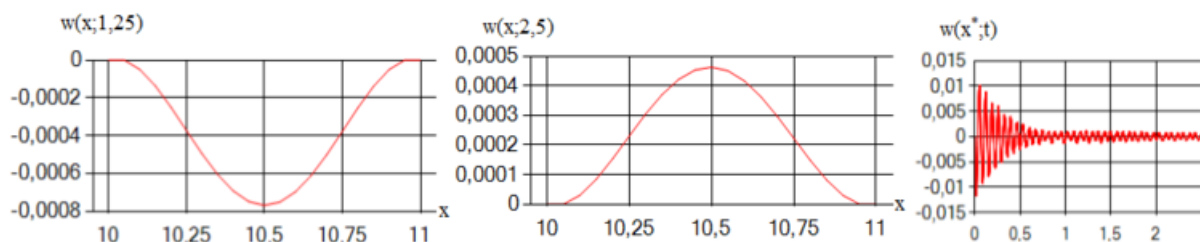


Р и с у н о к 7.4

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке  $x^*$ .

Рисунки 7.2, 7.3 соответствуют устойчивости, а рисунок 7.4 - неустойчивости колебаний упругого элемента. Результаты численного эксперимента согласуются с неравенством (3.16).

Аналогично построена конечно-разностная схема и реализован численный эксперимент для случая жесткого закрепления концов упругого элемента (в этом случае  $\lambda_1 = \frac{4\pi^2}{(c-b)^2} = 4\pi^2$ ). В качестве примера на рисунке 7.5 построены графики функции  $w(x, t)$  при  $x \in [b; c]$ ,  $t = t_0$  и при  $x^* = (b+c)/2$ ,  $t \in [0; 2, 5]$  при  $N = 9790$ .



Р и с у н о к 7.5

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке  $x^*$ .

Из сравнения рисунков 7.4, 7.5 видно, что при  $N = 9790$  в случае жесткого закрепления наблюдается устойчивость колебаний упругого элемента, в то же время для шарнирного закрепления имеет место неустойчивость.

Таким образом, на основе аналитического исследования получены достаточные условия динамической устойчивости упругого элемента канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной жидкости (газа). Условия накладывают ограничения на скорость однородного потока, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Разработанная программа численного исследования позволяет моделировать колебания упругого элемента проточного канала при различных значениях параметров механической системы.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ №15-01-08599.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / Вельмисов П.А., Горшков Г.М., Рябов Г.К.; заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28; заявл. 20.07.92 ; опубл. 27.06.96, Бюл. № 18.

2. Ю. П. Барметов, И. А. Дободейч, “К расчету нестационарных течений сжимаемой жидкости в трубопроводе”, *Известия вузов. Авиационная техника.*, 2006, № 1, 18–21.
3. Б. А. Ершов, Г. А. Кутеева, “Колебания идеальной жидкости в прямоугольном соуде с упругой вставкой на стенке. Учет внутреннего трения в материале вставки”, *Вестник СПбУ*, 1:2 (2005), 86–94.
4. А. В. Звягин, “Движение вязкой жидкости в канале с упругими границами”, *Вестник МГУ*, 1:1 (2005), 50–54.
5. Л. И. Могилевич, А. А. Попова, “Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту”, *Наука и техн. транс.*, 2007, № 2, 69–72.
6. В. В. Мокеев, “Конечно-элементное решение задачи гидроупругости для вязкоупругой жидкости”, *Пробл. машиностр. и надеж. машин*, 2005, № 2, 9–86.
7. В. Г. Соколов, А. В. Березнев, “Уравнения движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости”, *Изв. вузов. Нефть и газ.*, 2004, № 6, 76–80.
8. Raidoussis Michael P., “Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики”, *J. Sound and Vibr.*, 2008, № 3(310), 462–492.
9. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2000, 115 с.
10. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
11. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2013, 322 с.
12. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Е. Е. Колмановский, “Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью”, *Дифференциальные уравнения*, 30:11 (1994), 1966–1981.
13. П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. А. Решетников, “Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления»”, *Датчики и системы*, 2003, № 6(49), 12–15.
14. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Устойчивость решений некоторых классов интегродифференциальных уравнений в частных производных”, *Вестник Самарского государственного университета. Серия: естественнонаучная*, 2008, № 8/1 (67), 331–344.
15. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2009, № 1 (37), вып. 1, 7–16.
16. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова, “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2009, № 2 (38), вып. 1, 7–17.

17. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2011, № 1 (22), 179–185.
18. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семёнова, “О решениях интегродифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2011, № 2 (23), 266–271.
19. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2011, № 3 (57), вып. 1, 59–67.
20. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, “Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2013, № 2 (31), 120–126.
21. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, “Математическая модель вибрационного устройства”, *Автоматизация процессов управления*, 2014, № 3 (37), 58–67.
22. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, “Динамическая устойчивость упругого элемента проточного канала”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2014, № 3 (31), 40–55.
23. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций*, УлГТУ, Ульяновск, 2015, 146 с.
24. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, *Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 1994, 176 с.
25. П. А. Вельмисов, А. А. Молгачев, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2012, 184 с.
26. П. А. Вельмисов, В. К. Манжосов, *Математическое моделирование в задачах динамики вбродударных и аэроупругих систем*, УлГТУ, Ульяновск, 2014, 204 с.
27. Л. И. Турчак, *Основы численных методов*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1987, 320 с.
28. Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.

Дата поступления 12.05.2016

# Research on dynamics and stability of an elastic element of the flow channel

© A. V. Ankilov<sup>4</sup>, P. A. Velmisov<sup>5</sup>, Ju. A. Tamarova<sup>6</sup>

**Abstract.** Dynamics and stability of an elastic element of a wall of a flow channel with a subsonic stream of gas or liquid in it is investigated. Analytical research on stability is conducted on the basis of creation of positive-definite functional. The sufficient stability conditions are obtained. Numerical research of dynamics and stability is conducted on the basis of finite difference method with subsequent realization of numeral experiment on C++.

**Key Words:** aerohydroelasticity, dynamics, stability, flow channel, elastic plate, deformation, subsonic flow

---

<sup>4</sup> Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

<sup>5</sup> Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

<sup>6</sup> Software Engineer, Ulyanovsk Instrument Manufacturing Design Bureau, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; kazakovau@mail.ru