УДК 517.977

К вопросу о теореме Боля – Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП)

© **П. М. Симонов** [1]

Аннотация. В работе рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Одно уравнение по части переменных функционально-дифференциальное, по другой части переменных – разностное, второе уравнение по части переменных разностное, по другой части переменных – функционально-дифференциальное. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В.Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно – это система функционально-дифференциальных уравнений, второе – это система разностных уравнений. Изучены пространства решений. Получена теорема Боля – Перрона об экспоненциальной устойчивости для гибридной системы функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: теорема Боля – Перрона, гибридная линейная система фунционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений

1. Введение

Исследованию по устойчивости решений ГЛФДСП к настоящему времени посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ГЛФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$

$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$

$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k$, $x_2(\tau) = \psi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0)$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточное условия экспоненциальной устойчивости [1].

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [2]–[4]. Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [5]–[8] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе, свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГЛФДСП, а именно, гибридных линейные функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛФДУП), формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости, в частности, теорема Боля – Перрона.

[1] Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpm@mail.ru

2. Схема W-метода

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{\mathbb{R}^n}$.

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots$, размера n, где каждый столбец лежит в пространстве $\mathbb{R}^n$, а через $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), ..., g(N), \ldots$, размера n, $g(i) \in \mathbb{R}^n$ для каждого $i = 0, 1, \ldots$.

Каждой бесконечной матрице

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots .$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots .$$

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$.

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int\limits_0^T ||f(t)||_{\mathbb{R}^n}\, dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$.

Пусть пространство ℓ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ с полунормами $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq 0$. Пространство ℓ_0 бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ с полунормами $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq -1$.

Операторы $\mathcal{L}_{11}$, $F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}$, $F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}$, $F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}$, $F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\mathrm{col}\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ образуют банахово пространство $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{R}^n)$ (пространство $\mathbf{D} \subset D$, пространство $\mathbf{M}_0 \subset \ell_0$, пространство $\mathbf{B} \subset L$, пространство $\mathbf{M} \subset \ell$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ — банаховые пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например $\sup\limits_{t \geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n} + \sup\limits_{k=-1,0,1,\ldots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \to \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнений [5]–[8] $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами.

Например, $\sup\limits_{t\geq 0}||x(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$. Тогда, положив $\mathcal{L}_{11}x \overset{def}{=} \dot{x} + x = z$, принимаем в качестве банахова пространства B банахово пространство L_∞ измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\geq 0}||z(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (W_{11}z)\,(t) + (U_{11}\alpha)(t) = \int\limits_0^t e^{-(t-s)}z(s)\,ds + \alpha e^{-t} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^n, \quad z \in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ($\sup\limits_{t\geq 0}||x(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$) и их производная $\dot{x} = -x + z$ принадлежит пространству L_∞. Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой

$$||x||_{D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)} = \operatorname{vrai}\sup_{t\geq 0}||\dot{x}(t) + x(t)||_{\mathbb{R}^n} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

которое линейно изоморфно пространству С.Л.Соболева $W_\infty^{(1)}[0,\infty)$ с нормой

$$||x||_{W_\infty^{(1)}[0,\infty)} = \sup_{t\geq 0}||x(t)||_{\mathbb{R}^n} + \operatorname{vrai}\sup_{t\geq 0}||\dot{x}(t)||_{\mathbb{R}^n}.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_{L_∞}. При этом $W_{L_\infty} \subset D$, и это вложение непрерывно.

Аналогично для банахова пространства $B \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ с нормой

$$||x||_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = ||\dot{x} + x||_B + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение $B \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства B в пространство B, и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство B. Это условие эквивалентно тому [5], [8], что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству Соболева $W_B^{(1)}[0,\infty)$ с нормой

$$||x||_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_B + ||x||_B.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно.

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to B$ $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчиво, если для каждой правой части $z \in B$ каждое решение $x \in D(\mathcal{L}_{11}, B)$ [5]. $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ — область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, B) \to B$, удовлетворяющее условию выше, $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно B-устойчиво, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$ [5][гл. IV, §4.6], [8].

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \to \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(\mathcal{L}_{11}, B), B)$, $(\mathbf{M}_0, B)$, $(D(\mathcal{L}_{11}, B), \mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши: $y[t] = (Y_{22}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]g[s]$, $t \geq 0$.

Введем пространства: для $1 \le p < +\infty$ обозначим пространства:

$$\ell_{p0} = \left\{ y \in \ell_0 : \ ||y||_{\ell_{p0}} = \left(\sum_{k=-1}^{+\infty} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$$\ell_p = \left\{ g \in \ell : \ ||g||_{\ell_p} : ||g||_{\ell_p} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} ||g(k)||_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Для $p = \infty$ обозначим пространства:

$$\ell_{\infty 0} = \{ y \in \ell_0 : \ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty \},$$

$$\ell_{\infty} = \{ g \in \ell : \ ||g||_{\ell_\infty} = \sup_{k=0,1,\cdots} ||g(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty \}.$$

Банаховы пространства ℓ_{p0} и ℓ_p — это примеры пространств типа $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}$.

Обозначим: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда (2.1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$.

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы $\dot{x} = F_{11}^0 x + F_{12}^0 z + z$, $\Delta y = F_{21}^0 z + F_{22}^0 y + u$, где операторы $F_{11}^0 : D \to L$, $F_{12}^0 : \ell_0 \to L$, $F_{21}^0 : D \to \ell$, $F_{22}^0 : \ell_0 \to \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \mathrm{col}\{z, u\}$. Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W} : L \times \ell \to D \times \ell_0$ — непрерывный вольтерров оператор Коши для системы, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$, $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to D \times \ell_0$ — фундаментальная матрица для системы, $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$.

3. Теоремы Боля – Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [9], [10], отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{L}_{11}, B_1)$-устойчивость, где B_1 — некоторое подпространство пространства B.

Следуя традиции Пермского семинара [5]–[8], соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля – Перрона.* В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $B \subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \ge 0$, если $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha \ge \beta$, если, $\alpha - \beta \ge 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \mathrm{col}\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $|| \cdot ||_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*: $||\alpha||_{\mathbb{R}^n} \le ||\beta||_{\mathbb{R}^n}$, если $|\alpha| \le |\beta|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L. А именно $y \geq 0$, если $y(t) \geq 0$ почти всюду на $[0,\infty)$; $y \geq z$, если $y - z \geq 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0,\infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $B \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве B согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in L$, $y \in B$ и $|z| \leq |y|$, то $z \in B$ и $||z||_B \leq ||y||_B$.

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств* [11]), отметим следующие: 1) норма в таком пространстве B обладает свойством монотонности; 2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства B имеет точные грани (B — K*–пространство*); 3) в пространстве B определены*"срезки"* — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0,\infty)$; 4) вложение $B \subset L$ непрерывно.

4. Экспоненциальная устойчивость

Всюду ниже через B_γ обозначим *«весовое пространство»*, элементы которого y связаны с элементами z пространства B соотношением $y = z_\gamma$, где $z_\gamma(t) = e^{-\gamma t}z(t)$, $z \in B$, причем $||y||_{B_\gamma} = ||z||_B$.

Всюду будем предполагать, что для пространства B и модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ выполнены условия: существует число такое $\beta > 0$, что

а) оператор Коши W_{11} модельного уравнения действует из пространства B_β в пространство C_β и ограничен; б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} первого модельного уравнения принадлежат пространству C_β. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_C = \sup\limits_{t\geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n}$, C_β – весовое пространство функций y, представимых в виде $y(t) = u_\beta$, где $u_\beta(t) = e^{-\beta t}u(t)$, $u \in C$, $||y||_{C_\beta} = ||u||_C$. Приведенные условия гарантируют непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\beta) \subset C_\beta$. Таким образом, в частности, модельное уравнение *экспоненциально устойчиво*: $||U_{11}(t)||_{\mathbb{R}^n} \leq Ne^{-\beta t}$ при всех $t \geq 0$ для некоторого положительного N.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ [5]–[8].

Теорема 4.1. *Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ $D(\mathcal{L}_{11}^0, B)-$ устойчиво, а оператор $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to L$ действует из пространства $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\alpha)$ в пространство B_α при некотором $\alpha \in (0,\beta]$, причем оператор $\mathcal{L}_{11}W_{11} : B_\alpha \to B_\alpha$ регулярен. Тогда существует такое число $\gamma_0 \in (0,\alpha]$, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ будет $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\gamma)-$ устойчивым для всех $\gamma \in (0,\gamma_0)$.*

Оператор $\mathcal{Q} : B_\alpha \to B_\alpha$ называется регулярным, если равен разности двух положительных операторов.

Введем ℓ_p^γ (ℓ_{p0}^γ) — весовое пространство, элементы которого y связаны с элементами z пространства ℓ_p^γ (ℓ_{p0}^γ) соотношением $y = z_\gamma$, где $z_\gamma(t) = e^{-\gamma t}z(t)$, $z \in \ell_p$ ($z \in \ell_{p0}$), причем $||y||_{\ell_p^\gamma} = ||z||_{\ell_p}$ ($||y||_{\ell_{p0}^\gamma} = ||z||_{\ell_{p0}}$).

Всюду будем предполагать, что для пространства ℓ_p^γ, $1 \leq p \leq +\infty$, и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ выполнены условия: существует число такое $\beta > 0$, что

а) оператор Коши W_{22} модельного уравнения действует из пространства ℓ_p^β в пространство $\ell_{\infty 0}^\beta$ и ограничен; б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} второго модельного уравнения принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^\beta$. Приведенные условия гарантируют непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_p^\beta) \subset \ell_{\infty 0}^\beta$. Таким образом, в частности, модельное уравнение *экспоненциально устойчиво*: $||U_{22}(t)||_{\mathbb{R}^n} \leq Me^{-\beta t}$ при всех $t \geq 0$ для некоторого положительного M.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема 4.2. *Операторы $\mathcal{L}_{12} : \ell_{0p} \to B$, $\mathcal{L}_{21} : D(\mathcal{L}_{11}^0, B) \to \ell_p$ действуют для некоторого $1 \leq p \leq +\infty$. Пусть, далее,* уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ *$D(\mathcal{L}_{11}^0, B)-$ устойчиво и уравнение $\mathcal{L}_{22}y = g$ $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_p)-$ устойчиво, а операторы $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ действуют из пространства $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\alpha)$ и $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_p^\alpha)$ в пространства B_α и ℓ_p^α при некотором $\alpha \in (0, \beta]$, причем операторы $\mathcal{L}_{11}W_{11} : B_\alpha \to B_\alpha$ и $\mathcal{L}_{22}W_{22} : \ell_p^\alpha \to \ell_p^\alpha$ регулярны. Тогда существует такое число $\gamma_0 \in (0, \alpha]$, что уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ будет $D(\mathcal{L}_0, B_\gamma \times \ell_p^\gamma)-$ устойчивым для всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$.*

Работа выполнена при поддержке АО «ПРОГНОЗ».

Список литературы

1. В. М. Марченко, Ж. Ж. Луазо, “Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем”, *Дифференц. уравнения*, **45**:5 (2009), 728–740.

2. А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП)”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **13**:4 (2013), 34–37.

3. А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **14**:5 (2014), 38–45.

4. А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). III”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **15**:3 (2015), 63–69.

5. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными*, Перм. ун-т, Пермь, 2001, 230 с.

6. Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. II”, *Дифференц. уравнения*, **27**:4 (1991), 555–562.

7. Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. III”, *Дифференц. уравнения*, **27**:10 (1991), 1659–1668.

8. Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. IV”, *Дифференц. уравнения*, **29**:2 (1993), 196–204.

9. Е. А Барбашин, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 224 с.

10. Х. Л Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970, 456 с.

11. Л. В Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ. 4-е изд., испр.*, Невский Диалект, БХВ-Петербург, СПб., 2004, 816 с.

Дата поступления 4.05.2016

On the question of the theorem of Bohl — Perron of hybrid linear functional differential systems with aftereffect (HLFDSA)

© **P. M. Simonov**[2]

Abstract. The abstract hybrid system of functional differential equations is given. One part of the equation for variable functional differential, according to another of the variables is the difference one, the second part of the equation for variable differential, according to another of the variables is functional differential one. There is a system of two equations with two unknowns. Apply W-method N.V. Azbelev's to two equations. Two model equations were studied: one is a system of functional differential equations, and the second is a system of differential equations. We studied the solutions spaces. Received Bohl – Perron theorem's for the exponential stability of the hybrid system of functional differential equations.

Key Words: theorem of Bohl – Perron, hybrid linear system of functional differential equations, stability, model equations' method

[2] Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm; simpm@mail.ru