

УДК 517.956.2

О топологии потенциальных магнитных полей

© М. Л. Коломиец¹, А. Н. Сахаров², Е. В. Трегубова³

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы описания топологии магнитных полей в плазме на языке динамических систем. Для модели потенциального магнитного поля с четырьмя узлами даются примеры топологически не эквивалентных структурно устойчивых конфигураций.

Ключевые слова: особые точки поля, магнитные силовые линии, источники, стоки, сепаратрисы, сепараторы, гетероклинические кривые

1. Введение

Задача описания топологии магнитного поля, взаимодействующего с проводящей движущейся средой, которую для краткости будем называть плазмой, играет существенную роль в магнитной гидродинамике (МГД). Действительно, топология магнитных полей является определяющим фактором при рассмотрении динамики плазмы в короне Солнца [1], в задачах об устойчивости плазмы в термоядерных реакторах [2] и механизмах турбулентного динамо⁴ [3], в теории магнитного перезамыкания [4], [5].

Уравнения МГД ([6], гл. 8) определяют два векторных поля на некотором трехмерном многообразии M^3 : магнитное поле \mathbf{H} и поле скоростей частиц плазмы \mathbf{v} . Эти поля порождают, соответственно, два потока на M^3 , причем траектории первого потока – силовые линии магнитного поля. Топология магнитного поля определяется фазовым портретом этого потока. Естественно выделить среди множества всех возможных фазовых портретов класс структурно устойчивых и рассмотреть для элементов этого класса следующие задачи, важные для приложений:

1. заданы источники поля, требуется найти топологически не эквивалентные конфигурации (фазовые портреты) магнитных силовых линий;
2. найти типичные бифуркации таких конфигураций.

В настоящей работе рассматривается задача 1 для потенциальных магнитных полей на сфере S^3 , моделирующих магнитные поля в короне Солнца. При этом предполагается, что источники поля моделируются особыми точками поля типа узел. Это предположение позволяет использовать для описания магнитных полей гладкие градиентно-подобные потоки на S^3 , являющиеся структурно устойчивыми потоками, удовлетворяющими условиям:

а) неблуждающее множество потока состоит из конечного числа гиперболических особых точек;

б) устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек имеют трансверсальные пересечения.

¹ Доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru

² Доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru

³ Доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; t2733792@yandex.ru

⁴ Динамо – механизм усиления или поддержания стационарного (либо колебательного) состояния магнитного поля гидродинамическими движениями проводящей среды.

Для таких потоков существует полная топологическая классификация (см. [7]).

Нелокальные бифуркации в магнитных полях связаны с рождением или разрушением так называемых сепараторов, математическими образами которых являются гетероклинические траектории потоков, принадлежащие пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия. Вопрос о существовании таких траекторий для данного потока является нетривиальной задачей. Применительно к системам, описывающим магнитные поля, она рассмотрена в серии работ [9], [10], [8], в которых найдены достаточные условия существования гетероклинических траекторий у градиентно-подобных потоков.

Изучение топологии магнитных полей в плазме в терминах динамических систем началось достаточно давно (в начале 60-х годов прошлого века), о чем свидетельствует внушительное количество публикаций по данной тематике. Большую их часть можно найти в библиографическом списке монографии [5] и обзора [1]. Некоторые более поздние работы приведены в списке литературы данной публикации.

2. Геометрия магнитных полей в терминах динамических систем

Пусть $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ обозначает евклидовы координаты точки S^3 в локальной карте. Тогда силовые линии магнитного поля являются интегральными кривыми векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

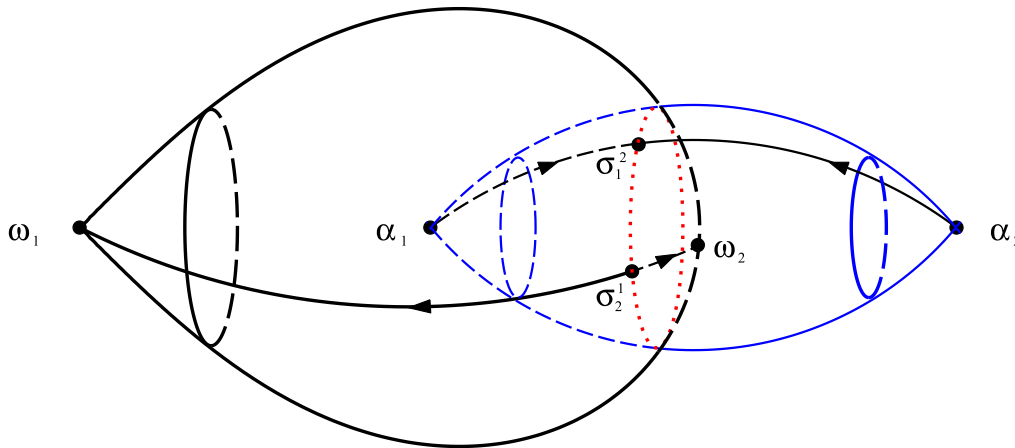
где $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ – вектор магнитной индукции, s – параметр, определяющий положение точки на интегральной кривой относительно начального положения. Уравнение (2.1) определяет поток на S^3 , который будем обозначать $f_{\mathbf{B}}^s(\mathbf{r})$.

2.1. Особенности поля

Описание топологии силовых линий магнитного поля начинается с описания конфигурации особенностей поля. Электромагнитное поле имеет особенности в точках, где оно равно нулю (такие точки называются особыми точками поля), а также в точках, где расположены источники поля: электрические или магнитные заряды. Точечные заряды являются *источниками* поля, то есть силовые линии либо начинаются, либо заканчиваются в этих точках. Магнитные заряды – монополи до сих пор экспериментально не обнаружены, что приводит к тому, что магнитное поле бездивергентно:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

а источниками реального магнитного поля являются *диполи* – комбинации двух противоположных по знаку зарядов, равных по абсолютной величине. В рассматриваемых нами моделях магнитных полей диполи заменяются парой точек, являющихся устойчивой и неустойчивой особыми точками типа узел, в которых условие (2.2) нарушается. Физическое обоснование такого подхода носит название *модель топологии магнитного заряда* (пункт 2.3).



Р и с у н о к 2.1

Скелет магнитного поля с четырьмя источниками (α_1, α_2 – источники, ω_1, ω_2 – стоки) и двумя седлами (σ_1^1, σ_1^2). Одномерные сепаратрисы седла – кривые со стрелками, точечная кривая – сепараторы.

Нулевые точки поля определяются уравнением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.3}$$

Они являются положениями равновесия (неподвижными точками) потока $\mathbf{f}_B^s(\mathbf{r})$. Из условия бездивергентности (2.2) следует, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нулевой точки удовлетворяют равенству

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{2.4}$$

В типичном случае вещественные части собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нулевой точки поля \mathbf{B} не равны нулю. Тогда из равенства (2.4) следует, что нулевая точка является седлом с двумерной и одномерной сепаратрисами. Так как собственные значения являются корнями вещественного многочлена третьей степени, то они либо все вещественные, либо одно из них вещественно, а два других – комплексно сопряженные.

В литературе по физике магнитных полей одномерную сепаратрису седла называют *шипом* (spine), а двумерную – *веерной поверхностью* (fan). Пересечения веерных поверхностей различных нулевых точек принято называть *сепараторами*. Если эти пересечения трансверсальны, то их называют *гетероклиническими сепараторами*. На языке динамических систем – это гетероклинические траектории. Объединение особенностей поля, шипов, веерных поверхностей и сепараторов определяет топологическую структуру поля и называется *скелетом* или *остовом* магнитного поля⁵ (рис. 2.1).

2.2. Уравнения МГД и свойство вмороженности поля

Эволюция во времени магнитного поля описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B},$$

⁵ При построении изображений скелетов трехмерных векторных полей мы придерживаемся общепринятых обозначений: источники обозначаются буквой α , стоки – ω , седла – σ . Верхний индекс равен размерности неустойчивого многообразия седла.

где коэффициент ν_m – магнитная вязкость, характеризующая проводимость плазмы. Скорость движения частиц плазмы \mathbf{v} определяется уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\mu^2}{4\pi\rho} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Здесь ρ – плотность среды, p – давление, η и ζ – коэффициенты вязкости.

В магнитной гидродинамике силовые линии имеют вполне определенный физический смысл: как установил Х. Альфвен⁶ [11], в идеально проводящей плазме имеет место свойство *вмороженности магнитного поля*: при движении среды силовые линии следуют за ней, будучи как бы приклеенными к ее частицам. Покажем, что общим критерием вмороженности магнитного поля в плазму является выполнение уравнения индукции при $\nu_m = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.5)$$

Т е о р е м а 2.1. *Равенство (2.5) эквивалентно равенству нулю коммутатора $[\mathbf{B}, \mathbf{v}]$ векторных полей \mathbf{v} и \mathbf{B} .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Траектории движения частиц плазмы – это интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

Обозначим решение этого уравнения с начальным значением \mathbf{r}_0 через $\mathbf{f}_v^t(\mathbf{r}_0)$. Параметризацию силовых линий магнитного поля изменим следующим образом $\frac{d\tau}{ds} = \rho(\mathbf{r}, t)$, после чего уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

Соответственно, решения этого уравнения обозначим через $\mathbf{f}_B^\tau(\mathbf{r}_0)$.

Рассмотрим разность $\Delta(\delta t, \delta \tau, \mathbf{r}_0) = \mathbf{f}_v^{\delta t}(\mathbf{f}_B^{\delta \tau}(\mathbf{r}_0)) - \mathbf{f}_B^{\delta \tau}(\mathbf{f}_v^{\delta t}(\mathbf{r}_0))$. Согласно известному результату (см., например, [12], глава 8, §39, лемма 1), предел

$$\lim_{\delta \tau, \delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta t, \delta \tau, \mathbf{r}_0)}{\delta t \delta \tau} = [\mathbf{B}, \mathbf{v}]$$

является коммутатором (скобкой Пуассона) векторных полей \mathbf{B} и \mathbf{v} . С другой стороны, непосредственным вычислением получаем, что

$$\lim_{\delta \tau, \delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\delta t, \delta \tau, \mathbf{r}_0)}{\delta t \delta \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{\rho} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.8)$$

Уравнение индукции (2.5) с учетом (2.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0. \quad (2.9)$$

⁶ Ханнес Улоф Йёста Альфвен (швед. Hannes Olof Gosta Alfvén; 30 мая 1908, Норрчёпинг – 2 апреля 1995, Юрскольм) – известный шведский физик, специалист по физике плазмы. Лауреат Нобелевской премии по физике в 1970 г. за работы в области теории магнитогазодинамики.

Правая часть в равенстве (2.8) равна

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \right) \mathbf{B}.$$

Из уравнения непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$ следует, что

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \right) \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{B}.$$

Таким образом, правая часть (2.8) равна левой части уравнения (2.9), деленной на ρ . Следовательно, $[\mathbf{B}, \mathbf{v}] = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется уравнение (2.5).

Доказательство закончено.

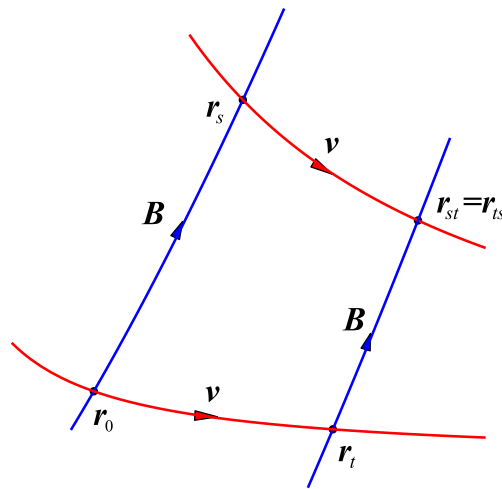
Известно, что равенство $[\mathbf{B}, \mathbf{v}] = 0$ эквивалентно утверждению: потоки, порождаемые векторными полями \mathbf{B} и \mathbf{v} , коммутируют:

$$\mathbf{f}_v^t \circ \mathbf{f}_B^s(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_B^s \circ \mathbf{f}_v^t(\mathbf{r})$$

([12], гл. 8, § 39, теорема Д). Отсюда получаем очевидное следствие теоремы 2.1:

С л е д с т в и е 2.1. *Если выполняется уравнение (2.5), то силовые линии магнитного поля при сдвиге по траекториям уравнения (2.6) переходят в себя.*

Таким образом, силовые линии магнитного поля двигаются как частицы плазмы⁷, в чем и заключается смысл термина «вмороженность» поля.



Р и с у н о к 2.2

Движение магнитных линий в плазме

Свойство вмороженности поля обычно рассматривают как следствие постоянства магнитного потока через поверхность, натянутую на произвольный замкнутый контур, который движется вместе с плазмой (теорема Кельвина о циркуляции для магнитного потока). Из приведенного выше доказательства теоремы 2.1 следует, что это достаточное, но не необходимое свойство.

⁷ Благодаря чему можно говорить о движении силовых линий как о реальном физическом процессе. Кроме того, вдоль магнитных силовых линий движутся так называемые волны Альфвена, экспериментальное подтверждение существования которых недавно получено.

Экспериментальные наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля в плазме демонстрирует характер релаксационных колебаний: в течении значительного промежутка времени структура магнитного поля не изменяется, затем быстро происходит перестройка структуры, которая сопровождается явлением *перезамыкания магнитных силовых линий* [4], [5]. Так как силовые линии поля движутся вместе с частицами плазмы, то линии с разными направлениями⁸ могут оказаться достаточно близко. Далее силовые линии могут либо разойтись без изменения топологии, либо перезамкнутся.

Очевидно, возможными моделями явления магнитного перезамыкания являются бифуркации в системе (2.1), приводящие к изменению топологии поля. Свойство вмерзности гарантирует неизменность топологии магнитного поля в следующем смысле.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Два векторных поля на многообразии M называются топологически орбитально эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \rightarrow M$, переводящий интегральные кривые первого поля в интегральные кривые второго, сохраняя их ориентации.*

Так как вектор индукции \mathbf{B} зависит от времени t , то поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_1)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_2)$ определяют, вообще говоря, две различные конфигурации интегральных кривых. Однако, имеет место

Т е о р е м а 2.2. ([5], [13]) *Пусть поле \mathbf{B} коммутрует с полем скоростей частиц плазмы \mathbf{v} . Тогда поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_1)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_2)$ топологически орбитально эквивалентны для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.*

2.3. Модель топологии магнитного заряда

Точные решения системы уравнений МГД при заданных начальных и краевых условиях известны для ограниченного ряда частных случаев. Численное же решение требует применения суперкомпьютеров [14]. Поэтому при изучении топологии силовых линий магнитных полей используются приближенные модели.

В основе таких моделей лежит ряд предположений физического характера, упрощающих анализ. Совокупность всех этих предположений носит название *модель топологии магнитного заряда* (модель ТМЗ) (см., например, [1]) и сводится к следующему:

1. реальный источник поля представляется в виде пары точечных источников соответствующей полярности;
2. поле потенциально, то есть представимо в виде $\mathbf{B} = \nabla\Phi$, где Φ – скалярный потенциал;
3. при моделировании магнитного поля короны Солнца граница фотосферы рассматривается как инвариантная сфера S^2 , на которой располагаются все источники поля.

Обычно динамическая система порождается векторным полем, особенностями которого являются только нулевые точки. Так как геометрически силовые линии поля в окрестности источников ведут себя также как в окрестности неустойчивых (устойчивых) нулевых точек поля, то в модели ТМЗ неявно предполагается, что моделируемое поле топологически орбитально эквивалентно полю, у которого источники (стоки) поля являются неустойчивыми (устойчивыми) нулевыми точками (узлами). Хотя дивергенция поля в этих

⁸ Направление силовой линии в заданной точке совпадает с направлением вектора \mathbf{B} , касающегося линии в этой точке.

точках не равна нулю, именно это предположение позволяет выделить из множества всех потенциальных полей класс структурно устойчивых, что невозможно для бездивергентных полей.

Из предположений модели ТМЗ следует, что число особенностей поля удовлетворяет соотношению

$$n_\alpha - n_\sigma^2 = n_\omega - n_\sigma^1, \tag{2.10}$$

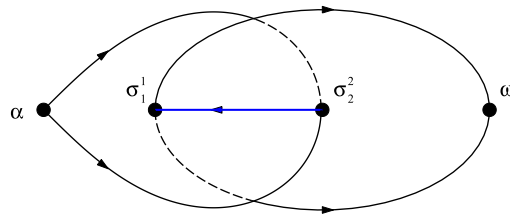
где n_σ^1 – число седел индекса 1, n_σ^2 – число седел индекса 2. Это соотношение следствие равенства нулю суммы индексов особых точек векторного поля на трехмерном замкнутом многообразии [16].

3. Потенциальное поле с четырьмя источниками

В этом разделе рассматриваются модели магнитных полей с четырьмя источниками, порождаемыми гладкими регулярными потенциалами. Для приложений важно знать ответ на следующий вопрос: сколько структурно устойчивых топологически не эквивалентных конфигураций существует у таких полей? Фактически это вопрос о количестве топологически не эквивалентных градиентно-подобных систем на S^3 , у которых число особых точек типа узел равно четырем.

Заметим, что потенциальное поле с четырьмя источниками вида:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \alpha_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|^3} + \alpha_3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3\|^3} - (1 + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_4}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4\|^3} \tag{3.1}$$



Р и с у н о к 3.1

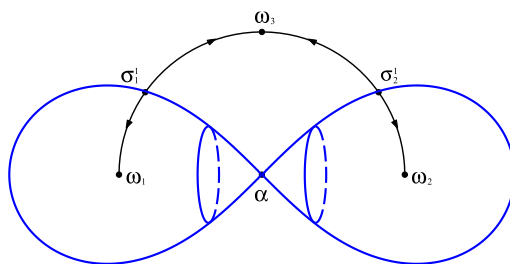
Гетероклиническое пересечение двумерных сепаратрис, замыкание которых гомеоморфно диску часто используется для демонстрации возможностей модели ТМЗ при моделировании магнитных полей в короне Солнца (см., например, [18], [19], [20], [21], [22], [23]). Предполагается, что все источники лежат на инвариантной двумерной сфере (плоскости $z = 0$ в локальных координатах), моделирующей поверхность фотосферы, и поле симметрично относительно этой сферы.

В литературе по магнитным полям в короне Солнца принято делить одномерные сепаратрисы седел на два вида: *вертикальные* (upright), у которых такая сепаратриса трансверсальна к инвариантной сфере, и *горизонтальные* (grone), эта сепаратриса которой лежит на инвариантной сфере. Появление вертикальных сепаратрис можно объяснить следующим образом. Заметим, что двумерная сепаратриса седла уравнения (2.1) гомеоморфна \mathbb{R}^2 , следовательно, замыкание такой сепаратрисы гомеоморфно либо сфере, либо замкнутому диску. В последнем случае сепаратриса не делит сферу S^3 на две компоненты

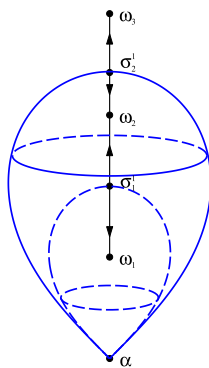
(рис. 3.1), однако содержит гетероклиническую траекторию. Эта конфигурация⁹ возникает после бифуркации «седло-узел» на инвариантной двумерной сфере, в силу которой появляются одномерные вертикальные сепаратрисы в S^3 .

Итак, рассмотрим градиентно-подобное векторное поле с четырьмя особыми точками типа узел. Возможные структурно устойчивые конфигурации поля будем искать, используя формулу (2.10).

Пусть $n_\alpha = 1, n_\omega = 3$. Тогда уравнение (2.10) имеет целочисленные решения $n_\sigma^2 = m, n_\sigma^1 = 2 + m, m = 0, 1, \dots$. Две структурно устойчивые конфигурации для $m = 0$ изображены на рис. 3.2 и 3.3. Обращение направления интегральных кривых дает нам все возможные конфигурации для случая $n_\alpha = 3, n_\omega = 1$.



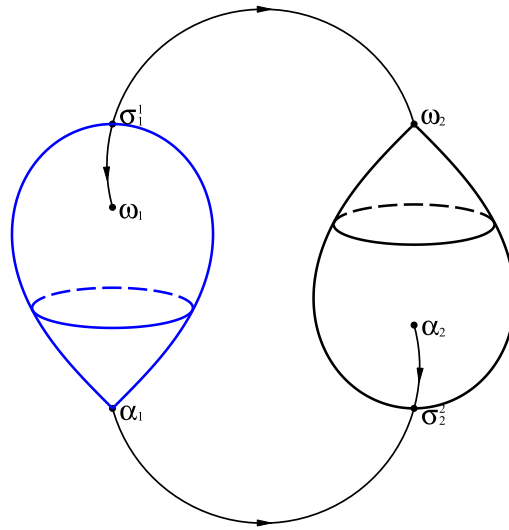
Р и с у н о к 3.2



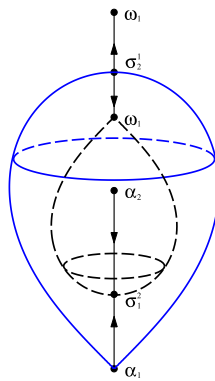
Р и с у н о к 3.3

Скелеты поля с одним источником и тремя стоками: «separate state» слева, «enclosed state» справа

⁹ Называемая в англоязычной литературе *звеном цепи* (chain-link). В русскоязычном математическом фольклоре эту конфигурацию называют «Бабочка».



Р и с у н о к 3.4



Р и с у н о к 3.5

Скелеты поля с двумя источниками и двумя стоками: «detached state» слева, «nested state» справа

Предположим теперь, что $n_\alpha = 2, n_\omega = 2$. Имеем решения $n_\sigma^1 = m, n_\sigma^2 = m, m = 1, 2, \dots$. Структурно устойчивые конфигурации при $m = 1$ изображены на рис. 3.4 и 3.5.

Покажем, что каждому $m \in \mathbb{N}$ соответствует структурно устойчивая конфигурация интегральных кривых. При этом конфигурации, изображенные на рис. 2.1, 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5 будут считать базовыми, так как они соответствуют минимальным значениям m .

Для различения топологически не эквивалентных конфигураций будем использовать топологический инвариант градиентно-подобных потоков на трехмерных многообразиях, предложенный в работе [7].

Обозначим через W_a^u, W_a^s неустойчивое и устойчивое интегральное многообразие точки a . Объединение A стоков, седел индекса 1 и их неустойчивых сепаратрис является аттрактором¹⁰ потока, порождаемого рассматриваемым векторным полем (соответствен-

¹⁰ Замкнутое множество A называется аттрактором потока f^t , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f^t(U_A) \subset \text{int}U_A$ и $A = \bigcap_{t \geq 0} f^t(U_A)$. Множество R называется репеллером, если оно – аттрактор потока f^{-t} .

но, объединение R источников, седел индекса 2 и их устойчивых сепаратрис является репеллером потока).

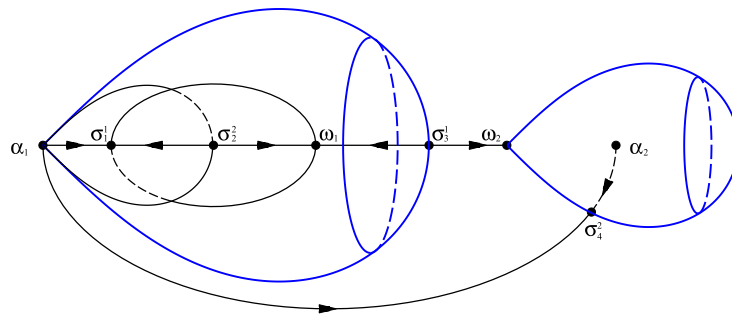
Известно [17], что граница F трубчатой окрестности множества A представляет собой ориентированную поверхность рода $n_\sigma^1 - n_\omega + 1$, которая задает разбиение Хегора¹¹ сферы S^3 . Пересечения

$$\{c_k = W_{\sigma_k^s} \cap F, k = 1, 2, \dots, n_\sigma^1\}$$

представляют собой набор непересекающихся простых замкнутых кривых на поверхности F . Еще один набор замкнутых кривых на F дают пересечения

$$\{d_k = W_{\sigma_k^u} \cap F, k = 1, 2, \dots, n_\sigma^2\}.$$

По построению число гетероклинических интегральных кривых равно числу пересечений кривых первого набора с кривыми из второго набора (рис. 3.7).



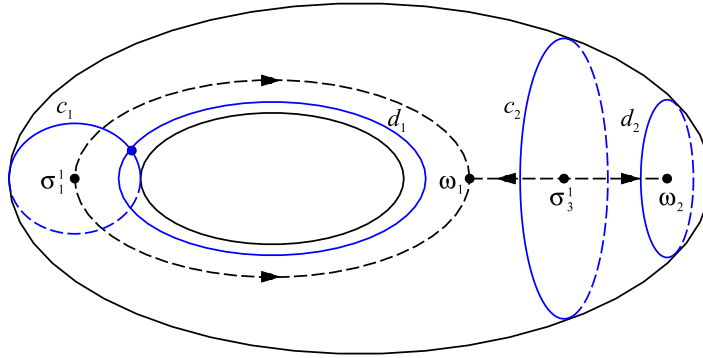
Р и с у н о к 3.6

Скелет поля с двумя источниками, двумя стоками и четырьмя седлами

Тогда согласно теореме 1 из [7] поверхность F с первым и вторым наборами замкнутых кривых является полным топологическим инвариантом потока, порождаемого векторным полем: две конфигурации интегральных кривых орбитально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : F \rightarrow F'$, который переводит первый набор окружностей в первый, а второй – во второй. Алгоритм проверки существования гомеоморфизма h приведен в упомянутой работе [7].

Отсюда следует, что конфигурации, изображенные на рис. 3.2 и 3.3, топологически эквивалентны. Действительно, поверхность F в обоих случаях является сферой S^2 , на которой расположены две непересекающиеся замкнутые кривые c_1 и c_2 . Аналогичное заключение можно сделать относительно конфигураций на рис. 3.4 и 3.5.

¹¹ Разбиение Хегора замкнутого трехмерного многообразия – представление его в виде объединения двух трехмерных многообразий с общим краем, каждое из которых является «полным кренделем».



Р и с у н о к 3.7

Окрестность аттрактора поля с двумя источниками, двумя стоками и четырьмя седлами

Конфигурация на рис. 2.1 соответствует трансверсальному пересечению двумерных устойчивого и неустойчивого многообразий седел σ_1^1 и σ_2^2 . Это пересечение дает, как минимум, две некомпактные гетероклинические кривые: поверхность F является сферой S^2 , на которой имеются две пересекающиеся замкнутые кривые c_1 и d_1 . Обращение направления на интегральных кривых дает еще одну структурно устойчивую конфигурацию с гетероклиническими кривыми.

Теперь заметим, что реализовать конфигурацию интегральных кривых, соответствующую произвольному значению $m > 1$, можно вставив в конфигурации, изображенные на рис. 3.2, 3.3 и 3.4, 3.5, конструкцию рис. 3.1 m раз. Например, рис. 3.6 соответствует случаю $m = 1$: $n_\alpha = n_\omega = 2$, $n_\sigma^1 = n_\sigma^2 = 2$, а поверхность F является тором (рис. 3.7).

Итак, каждому значению $m \geq 0$ сопоставлена структурно устойчивая конфигурация силовых линий поля. Кроме того, при фиксированном m могут существовать топологически не эквивалентные конфигурации из-за наличия разного количества гетероклинических траекторий при пересечении двумерных сепаратрис седел.

Таким образом, получаем следующее утверждение: потенциальное поле с четырьмя источниками имеет счетное число структурно устойчивых, топологически не эквивалентных конфигураций силовых линий.

В заключение отметим следующее.

В ряде работ физического характера утверждается, что число не эквивалентных структурно устойчивых конфигураций магнитных полей с шестью особыми точками равно пяти: это конфигурации, изображенные на рис. 2.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5. На самом деле, число их равно трем, так как две конфигурации рис. 3.2, 3.3 топологически эквивалентны, также как и две конфигурации рис. 3.4, 3.5.

При численном исследовании поля вида (3.1) число обнаруживаемых нулевых точек, как правило, не превышает четырех. Это связано, на наш взгляд, с тем, что после регуляризации¹² поля в источниках (где оно не ограничено) получаем поле, близкое к полиномиальному. В ряде работ на основе численных экспериментов сделан вывод: число нулевых точек в таких моделях асимптотически близко к числу источников [24], [25], [26], [27].

Полученные результаты уточняют и, насколько нам известно, впервые строго обосновывают некоторые утверждения о моделях магнитных полей в плазме.

¹² Под эти понимается переход к топологически эквивалентному полю, у которого источники и стоки нулевые точки типа узел. Такую эквивалентность можно построить, если учесть следующий факт: интегральная кривая входит в нулевую точку поля за бесконечное значение «времени», а в источник (сток) поля – за конечное [15].

Автор выражает благодарность В.З. Гринесу, Е.В. Жужома и Е.Я. Гуревич за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 15-01-03687.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D.W. Longcope, “Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields”, *Living Rev. Solar Phys.*, **2:7** (2005), 5–72.
2. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев, “Геометрия магнитного поля”, *Вопросы теории плазмы*, **2** (1963), 3–91.
3. В. И. Арнольд, Б. А. Хесин, *Топологические методы в гидродинамике*, Издательство МЦНМО, М., 2007.
4. Б.Б. Кадомцев, “Перезамыкание магнитных силовых линий”, *Успехи физических наук*, **151:1** (1987), 3–29.
5. Прист Э., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
7. А.О. Пришляк, “Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях”, *Матем. заметки*, **71:2** (2002), 254–260.
8. В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, С.Х. Зинина, “Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса-Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы”, *Нелинейная динамика*, **10:4** (2014), 427–438.
9. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, О.В. Починка, “О существовании магнитных линий, соединяющих нулевые точки”, *Журнал СВМО*, **16:1** (2014), 8–15.
10. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D*, **294** (2015), 1–5.
11. H. Alfvén, “On sunspots and the solar cycle”, *Arc. F. Math. Astr. Phys.*, **29A** (1943), 1–17.
12. В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
13. G. Hornig, K. Schindler, “Magnetic topology and the problem of its invariant definition”, *Physics of Plasmas*, **3** (1996), 781–793.
14. Д. П. Костомаров, Е. Ю. Ечкина, И. Н. Иновенков, С. В. Буланов, “Моделирование магнитного перезамыкания в трехмерной геометрии”, *Матем. моделирование*, **21:11** (2009), 3–15.
15. М.Л. Коломиец, А.Н. Сахаров, “Топология магнитных полей и динамические системы”, *Журнал СВМО*, **17:2** (2015), 51–57.
16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.

17. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., “Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сборник*, **194**:7 (2003), 25–56.
18. Молоденский М. М., Сыроватский С. И., “Магнитное поле в активных областях и его нулевые точки”, *Астрономический Журнал*, **54** (1977), 1293–1304.
19. Горбачев В.С., Кельнер С.Р., Сомов Б.В., Шварц А.С., “Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек”, *Астрономический журнал*, **65**:3 (1988), 601–612.
20. C. Beveridge, D.W. Longcope, “On Three-Dimensional Magnetic Skeleton Elements due to Discrete Flux Sources”, *Solar Physics*, **227**:2 (2005), 193–206.
21. R. Close, C. Parnell, E. Priest, “Domain structure in complex 3D magnetic fields”, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **99**:6 (2005), 513–534.
22. C. Beveridge, E.R. Priest, D.S. Brown, “Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions”, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **98**:5 (2004), 429–446.
23. R. Maclean, C. Beveridge, E. Priest, “Coronal Magnetic Topologies in Spherical Geometry – II. Four Balanced Flux Sources”, *Solar Phys.*, **238** (2006), 13–27.
24. D. Pontin, “Theory of magnetic reconnection in solar and astrophysical plasmas”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **370** (2012), 3169–3192.
25. N.A. Murphy, C.E. Parnell, A.L. Haynes, “Bifurcations of magnetic topology by the creation and annihilation of null points”, *Phys. of Plasmas*, **22**:10 (2015), 102117–7.
26. R. Maclean, C. Beveridge, D. Longcope, D. Brown, E. Priest, “A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare”, *Proc. R. Soc. A*, **461**:5 (2005), 2099–2120.
27. R. Close, C. Parnell, E. Priest, “Separators in 3D Quiet-Sun Magnetic Fields”, *Solar Physics*, **225** (2005), 21–46.

Дата поступления 9.05.2016

On the topology of the potential magnetic field

© M.L. Kolomic¹³, A.N. Sakharov¹⁴, E.V. Tregubova¹⁵

Abstract. The geometry of the magnetic fields in plasma plays an important role in understanding a number of fundamental problems in physics. It is clear that the magnetic field like any vector field defines a dynamical system on some three-dimensional manifold. This idea is used by physicists for a long time (since the middle of the last century). This work is devoted to the application of methods dynamical systems to description of the patterns of magnetic fields in the solar corona. Such models correspond to a gradient-like dynamical systems for which there is a complete topological classification. It follows that magnetic field with four springs can have countable number of structurally stable configurations of the field geometry.

Key Words: singular points of the field, magnetic field lines, sources, sinks, separatrix, separators, heteroclinic curves

¹³ Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru

¹⁴ Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru

¹⁵ Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; t2733792@yandex.ru