УДК 514.7

Эквивалентные подходы к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью

© А. Ю. Долгоносова[1], Н. И. Жукова[2]

Аннотация. Мы доказываем эквивалентность трех различных определений полноты слоения с трансверсальной линейной связности. Показано, что для трансверсально аффинных слоений (M, F) коразмерности q, $q \geqslant 1$, каждое из упомянутых выше определений полноты эквивалентно выполнению следующих двух условий: 1) существует связность Эресмана для (M, F); 2) индуцированное слоение на универсальном накрывающем пространстве образовано слоями субмерсии на q-мерное аффинное пространство.

Ключевые слова: слоение, линейная связность, связность Эресмана, аффинное слоение

1. Введение

Вопрос об эквивалентности различных определений полноты трансверсально аффинных слоений затронут Р.А. Волаком [1]. Мы доказываем эквивалентность различных подходов к определению полноты для более широкого класса слоений — для слоений с трансверсальной линейной связностью. Полнота указанных слоений позволяет при их исследовании перейти от локальных свойств к глобальным.

Согласно известной теореме Хопфа — Ринова ([2]) для риманова многообразия понятие геодезической полноты эквивалентно полноте метрического пространства, метрика которого определяется с помощью функционала длины. Поэтому, в частности, любое компактное риманово многообразие является геодезически полным, что вообще говоря не верно для многообразий линейной связности. В отличие от римановых слоений на компактных многообразиях, слоения с трансверсальной линейной связностью на компактных многообразиях не всегда являются полными (пример 6.1.).

Пусть (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом (см. определение 2.1.). Мы будем рассматривать общий случай, когда коразмерность слоения (M, F) равна q, а M — n-мерное многообразие, $0 < q < n$. Распределение $\mathfrak{M}$ размерности q на M называется трансверсальным к слоению (M, F), если для каждой точки x из M выполняется равенство $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$, где $\oplus$ — символ прямой суммы подпространств.

Обозначим через $G = GL(q, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q$ полупрямое произведение общей линейной группы $GL(q, \mathbb{R})$ и векторной группы $\mathbb{R}^q$. Группу G можно интерпретировать как группу всех аффинных преобразований $Aff(A^q)$ q-мерного аффинного пространства A^q, а $H = GL(q, \mathbb{R})$ как стационарную подгруппу аффинной группы $Aff(A^q)$ в некоторой точке.

Как известно, любое слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением типа (G, H) (см., например, [3]).

[1] Преподаватель кафедры общенаучных дисциплин, Нижегородский архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород; annadolgonsova@gmail.com

[2] Профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; nzhukova@hse.ru

Определение 1.1. *Распределение на многообразии линейной связности называется геодезически инвариантным, если каждая геодезическая объемлющего пространства, касающаяся этого распределения в одной точке, касается его в каждой своей точке.*

Теорема 1.1. *Пусть (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1. *Слоение (M, F), рассматриваемое как картаново, является полным.*

2. *Слоение (M, F) полное в смысле определения 3.2.;*

3. *На M существуют трансверсальное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ и линейная связность ∇ такие, что:*

   1) *каждая субмерсия f_i является аффинным отображением;*
   2) *распределения $\mathfrak{M}$ и TF геодезически инвариантны;*
   3) *канонический параметр на каждой максимальной геодезической, касающейся распределения $\mathfrak{M}$, изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.*

Преимущество условия 3 в теореме 1.1. перед остальными двумя состоит в том, что оно определено на самом слоеном многообразии M, в то время как условия 1 и 2 определяются с помощью расслоения трансверсальных реперов над M

Слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, является трансверсально аффинным слоением тогда и только тогда, когда кривизна и кручение линейной связности ∇^N равны нулю.

Применяя теорему 1.1. к трансверсально аффинным слоениям, мы доказываем следующее утверждение, где связность Эресмана для слоения понимается в смысле Р.А. Блюменталя и Дж. Хебды [4].

Теорема 1.2. *Пусть (M, F) — трансверсально аффинное слоение произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии. Тогда каждое из трех условий теоремы 1.1. эквивалентно выполнению следующих двух независимых условий:*

(i) *существует связность Эресмана для слоения (M, F);*

(ii) *индуцированное слоение на универсальном накрывающем многообразии $\widetilde{M}$ образовано слоями субмерсии $r : \widetilde{M} \to A^q$ на аффинное пространство A^q.*

Независимость свойств (i) и (ii) в теореме 1.2. вытекает из примеров 6.1. и 6.2..

Обозначения

Следуя [2], мы обозначаем через $P(N, H)$ главное H-расслоение с проекцией $P \to N$.

Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначается множество гладких векторных полей на многообразии M. Если $\mathfrak{M}$ — распределение на многообразии M, то через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ будем обозначать множество векторных полей на M, касательных к $\mathfrak{M}$.

Если $f : K \to M$ — субмерсия многообразий и $\mathfrak{M}$ — распределение на M, то через $\widetilde{\mathfrak{M}} = f^*\mathfrak{M}$ обозначается распределение на K такое, что $\widetilde{\mathfrak{M}} := \{\widetilde{\mathfrak{M}}_u \ < \mid u \in M\}$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}_u := \{X \in T_uK \mid f_{*u}(X) \in \mathfrak{M}_x, x = f(u)\}$, f_{*u} — дифференциал отображения f в точке u.

Благодарность

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 138) в 2015 году.

2. Основные понятия

2.1. Задание слоения N-коциком

Пусть N — q-мерное многообразие и M — гладкое n-мерное ($0 < q < n$) многообразие. В отличие от M связность топологического пространства N не предполагается. N-коциклом называется семейство $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, обладающее свойствами:

- Множество $\{U_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ образует открытое покрытие M.
- Отображения $f_i : U_i \to N$ являются субмерсиями на $V_i = f_i(U_i) \subset N$ со связными слоями.
- Если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ для всех $x \in U_i \cap U_j$.

Семейство всех локальных слоев субмерсий f_i из максимального N-коцикла, содержащего данный N-коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, образует базу новой топологии ζ в M. Компоненты линейной связности $L_a, a \in A$, топологического пространства (M, ζ) образуют разбиение F многообразия M, которое называется *слоением, заданным N-коциклом* $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$.

2.2. Определение слоения с трансверсальной линейной связностью

Задание связности в главном расслоении линейных реперов эквивалентно заданию оператора $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, где $\nabla_X Y$ — ковариантная производная векторного поля Y вдоль X [2]. Пара (M, ∇) называется *многообразием линейной или аффинной связности*, а ∇ — линейной связностью на M.

Диффеоморфизм $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ называется *изоморфизмом* многообразий линейной связности $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$ и $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$, если

$$f_*(\nabla^{(1)}_X Y) = \nabla^{(2)}_{f_* X} f_* Y$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M^{(1)})$, где f_* — дифференциал отображения f.

Определение 2.1. *Пусть слоение (M, F) задано N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$. Если на многообразии N существует линейная связность ∇ такая, что каждый локальный диффеоморфизм γ_{ij} является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных ∇ на открытых подмножествах $f_i(U_i \cap U_j)$ и $f_j(U_i \cap U_j)$, то говорят, что (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$.*

Определение 2.2. *Пусть A^q — q-мерное аффинное пространство и $Aff(A^q)$ — группа Ли всех аффинных преобразований A^q. Слоение (M, F), заданное A^q- коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$, называется $(Aff(A^q), A^q)$-слоением или трансверсально аффинным слоением, если каждое преобразование γ_{ij} является сужением некоторого аффинного преобразования из аффинной группы $Aff(A^q)$.*

Другими словами, трансверсально аффинное слоение — слоение, заданное (A^q, ∇)- коциклом, где ∇ — полная плоская симметричная линейная связность на A^q.

2.3. Аффинные отображения

Пусть $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ — произвольное гладкое отображение. Напомним, что векторные поля X из $\mathfrak{X}(M^{(1)})$ и Y из $\mathfrak{X}(M^{(2)})$ называются f-*связными*, если $f_{*x}X = Y_{f(x)}$ для любого $x \in M^{(1)}$, где f_{*x} — дифференциал отображения f в x.

Определение 2.3. *Пусть $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ — гладкое отображение многообразий аффинной связности $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$ и $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$. Тогда отображение f называется аффинным, если из того, что векторные поля $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^{(1)})$ и $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M^{(2)})$ f-связны, следует, что векторное поле $\nabla^{(1)}_{X_1}Y_1$ f-связно с векторным полем $\nabla^{(2)}_{X_2}Y_2$.*

Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $(M^{(i)}, \nabla^{(i)})$, $i = 1, 2$, — многообразия аффинной связности, $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ — субмерсия и $p^{(i)} : P^{(i)} \to M^{(i)}$ — расслоение реперов над $M^{(i)}$. Обозначим через $Q^{(i)}$ — $GL(m_i, \mathbb{R})$-инвариантное распределение на $P^{(i)}$, соответствующее линейной связности $\nabla^{(i)}$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

- *субмерсия $f : M^{(1)} \to M^{(2)}$ является аффинным отображение;*
- *для любой геодезической γ в $M^{(1)}$ кривая $f \circ \gamma$ является геодезической в $M^{(2)}$.*

3. Расслоение трансверсальных реперов

Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$. При этом многообразие N, возможно, не связно.

Положим для краткости $H = GL(q, \mathbb{R})$, пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы Ли H. Обозначим через $p : P \to N$ проекцию расслоения реперов над N, тогда $P = P(N, H)$ — главное H-расслоение. Пусть $V_i := f_i(U_i)$ и $P_i := p^{-1}(V_i)$ — подрасслоение H-расслоения P. Пусть $\mathcal{R}_i := f_i^* P_i = \{(x, z) \in U_i \times P_i \,|\, f_i(x) = p(z)\}$ — прообраз расслоения P_i относительно субмерсии f_i. Определены проекции $\widehat{p_i} : \mathcal{R}_i \to U_i : (x, z) \mapsto x$ и $\widehat{f_i} : \mathcal{R}_i \to P_i : (x, z) \mapsto z$, где $(x, z) \in \mathcal{R}_i$.

Предположим, что на многообразии M задано q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению F. Отождествим векторное фактор-расслоение TM/TF с распределением $\mathfrak{M}$.

Будем рассматривать точку $(x, z) \in \mathcal{R}_i$ как такой базис $\{e_\alpha\}$ пространства $\mathfrak{M}_x$, что $f_{i*x}e_\alpha = \epsilon_\alpha$, где $\alpha = 1, ..., q, \{\epsilon_\alpha\} = z$ — репер в точке $v = f_i(x) \in N$. Назовем пару (x, z) $\mathfrak{M}$-*репером* в точке x.

В несвязной сумме $Y = \sqcup_{i\in J}\mathcal{R}_i$ введем следующим образом бинарное отношение S. Пусть $(x, z) \in \mathcal{R}_i, (\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{R}_j$. Положим $(x, z)S(\tilde{x}, \tilde{z})$, если выполняются следующие два условия:

(i) $x = \widetilde{x} \in U_i \cap U_j$;

(ii) $\widetilde{z} = \gamma_{ji*x} \circ z$, где γ_{ji*x} — дифференциал локального диффеоморфизма γ_{ji} точке x.

Непосредственная проверка показывает, что введенное отношение S является отношением эквивалентности. Пусть $\mathcal{R} = Y/S$ — фактор-пространство, а $f : Y \to \mathcal{R}$ — фактор-отображение. Заметим, что для любого $i \in \mathcal{I}$ сужение $f_{|\mathcal{R}_i} : \mathcal{R}_i \to \widetilde{U}_i := f(\mathcal{R}_i)$ — биекция. Требованием, чтобы все сужения $f|_{\mathcal{R}_i}$ были диффеоморфизмами, мы определим структуру гладкого многообразия в $\mathcal{R}$.

Введем обозначения: $\widetilde{f}_i := \widehat{f}_i \circ (f|_{\mathcal{R}_i})^{-1} : \widetilde{U}_i \to P_i$ и $\Gamma_{ij} : \widetilde{f}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) \to \widetilde{f}_i(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j)$: $z \mapsto \gamma_{ij*x} \circ z$, где $z \in \widetilde{f}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j)$. Тогда $\{\widetilde{U}_i, \widetilde{f}_i, \{\Gamma_{ij}\}\}_{i,j\in\mathcal{I}}$ есть P-коцикл, определяющий некоторое слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ той же размерности, что и слоение (M, F).

Для любой точки $u \in \mathcal{R}$ существует такая точка $(x, z) \in \mathcal{R}_i$, что $u = f((x, z))$. Равенство $\pi(u) = x$ определяет субмерсию $\pi : \mathcal{R} \to M$. Соотношение $u \cdot a := f((x, z \cdot a))$, где $a \in H$ задает правое свободное действие группы H на $\mathcal{R}$. Таким образом, задано главное H-расслоение $\mathcal{R}(M, H)$ с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$. Из определения слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ вытекает его H-инвариантность и то, что слои $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M, F). При этом распределение $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$ трансверсально слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Связность ∇^N на N определяет связность Q_0 в H-расслоении $P(N, H)$. Пусть ω_0 — $\mathfrak{h}$-значная 1-форма, а θ — каноническая 1-форма связности Q_0 на P. Равенства $\widetilde{\omega}|_{\widetilde{U}_i} := \widetilde{f}_i^*\omega_0$ и $\widetilde{\theta}|_{\widetilde{U}_i} := \widetilde{f}_i^*\theta$, где $i \in \mathcal{I}$, определяют $\mathfrak{h}$-значную 1-форму $\widetilde{\omega}$ и $\mathbb{R}^p$-значную 1-форму $\widetilde{\theta}$ на многообразии $\mathcal{R}$. H-эквивариантность 1-форм ω_0 и θ на P влечет H-эквивариантность $1-$ форм $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\theta}$ на $\mathcal{R}$.

Пусть, как и выше, $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ — полупрямое произведение группы H и абелевой группы $\mathbb{R}^q$, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G. Равенство $\omega(X) := \omega_0(X) + \theta(X)$, где $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$, определяет $\mathfrak{g}$-значную H-инвариантную 1-форму ω на $\mathcal{R}$. Следовательно, $Q := ker\omega$ — связность в H-расслоении $\mathcal{R}(M, H)$.

Из определения $\widetilde{\omega}_0$ и $\widetilde{\theta}$ следует, что эти 1-формы проектируемы относительно слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Поэтому ω — также проектируемая 1-форма, то есть $L_X\omega = 0$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{T\mathcal{F}}(\mathcal{R})$.

Зафиксируем базис E_α алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$. Тогда в любой точке $u \in \mathcal{R}$ определен трансверсальный репер $X_\alpha := (\omega|_{\widetilde{\mathfrak{M}}_u})^{-1}(E_\alpha)$. Следовательно, определено такое гладкое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, что $\omega(X_\alpha) = E_\alpha$. Векторные поля X_α определяют трансверсальную параллелизацию слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, поэтому $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является трансверсально параллелизуемым или e-слоением.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное $(N, \nabla^N)-$ коциклом. Пусть $H = GL(q, \mathbb{R})$, $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$, а $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли групп Ли H и G, соответственно. Тогда определены:*

1) *главное H-расслоение $\pi : \mathcal{R} \to M$;*

2) *H-инвариантное e-слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, слои которого посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M, F);*

3) *$\mathfrak{g}$-значная 1-форма ω на $\mathcal{R}$, обладающая следующими свойствами:*

   (i) *$\omega(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* — фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу A;*

   (ii) *равенство $R_a^*\omega = Ad_G(a^{-1})\omega$ выполняется для каждого $a \in H$, где Ad_G — присоединенное представление группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$;*

   (iii) *производная Ли $L_X\omega$ равна нулю для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{T\mathcal{F}}(\mathcal{R})$;*

   (iv) *распределение $Q := ker\omega$ — связность в H-расслоении $\mathcal{R}(M, H)$.*

Определение 3.1. *Главное H-расслоение $\pi : \mathcal{R} \to M$, удовлетворяющее предложению 3.1., называется расслоением трансверсальных реперов* [5]. *При этом e-слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется поднятым слоением.*

Сохраним введенные выше обозначения.

Заметим, что слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением с трансверсальной картановой геометрией $\xi = (P(N, H), \beta)$, где $\beta = \omega_0 + \theta$ — $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на многообразии P [3].

Напомним, что картаново слоение (M, F) называется *полным*, если существует такое трансверсальное ему распределение $\mathfrak{M}$, что любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$, для которого $\omega(X) = const$, является полным [3].

Дадим еще одно определение полноты слоения (M, F).

Определение 3.2. *Слоение (M, F) называется полным, если существует такое трансверсальное ему распределение $\mathfrak{M}$, что любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(\mathcal{R})$, $\mathfrak{N} := \widetilde{\mathfrak{M}} \cap Q$, для которого $\widetilde{\theta}(X) = const$, является полным.*

4. Доказательство теоремы 1.1.

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2$ выполняется очевидным образом.

Обратное, предположим, что (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, полное в смысле определения 3.2. Это означает, что существуют трансверсальное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$ и H-связность Q в расслоении $\mathcal{R}(M, H)$ такие, что для распределения $\mathfrak{N} = \widetilde{\mathfrak{M}} \cap Q$, $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$, любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(\mathcal{R})$, для которого $\widetilde{\theta}(X) = const$, является полным.

Покажем полноту произвольного векторного поля $Y \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, для которого $\omega(Y) = c = const$. Пусть $c = c_1 + c_2$, $c_1 \in \mathfrak{h}$, $c_2 \in V$. Возьмем любую точку $u \in \mathcal{R}$, пусть $\pi(u) = x \in M$. По определению, $\omega(Y) = \widetilde{\omega}(Y) + \widetilde{\theta}(Y)$, где $\widetilde{\omega}(Y) = c_1$, $\widetilde{\theta}(Y) = c_2$. Обозначим через X и Z векторные поля из $\mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$ такие, что $\omega(X) = c_1$, $\omega(Z) = c_2$. Пусть $\varphi(s)$, $\psi(s)$ и $\mu(s)$ — интегральные кривые векторных полей Y, X и Z, соответственно, проходящие при $s = 0$ через u. Предположим, что кривая $\varphi(s)$ определена на отрезке $[a, b]$, где $a < 0$, $b > 0$. В силу полноты векторных полей X и Z интегральные кривые $\psi(s)$ и $\mu(s)$ определены на любом отрезке $[0, d]$, $d > 0$.

Заметим, что Q — связность Эресмана для субмерсии $\pi : \mathcal{R} \to M$. Поэтому, согласно ([4], предложение 1.3), Q — связность Эресмана для слоения, образованного компонентами связности слоев этой субмерсии. Следовательно, для допустимой пары путей (ψ, μ), заданных на отрезке $[0, d]$, существует единственная вертикально-горизонтальная гомотопия Φ с базой (ψ, μ). Нетрудно видеть, что кривая $\Phi(s, s)$, $s \in [0, d]$, удовлетворяет равенству $\omega(\frac{d}{ds}(\Phi(s, s))) = c$ и, следовательно, является интегральной кривой векторного поля Y, проходящей через u при $s = 0$. Поэтому $\Phi(s, s)$ является продолжением интегральной кривой $\varphi|_{[0,b]}$ на сколь угодно большой отрезок $[0, d]$. Аналогичные рассуждения показывают, что кривая φ может быть неограниченно продолжена и в другом направлении.

Таким образом, любая максимальная интегральная кривая векторного поля Y определена на всей числовой прямой, что означает полноту Y. Следовательно, $2 \Rightarrow 1$.

Покажем, что $2 \Rightarrow 3$. Зафиксируем трансверсальное q-мерное распределение $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathcal{R}(M, H)$ — слоенное расслоение $\mathfrak{M}$-реперов над (M, F) с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$. Рассмотрим открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ многообразия M с множеством функций перехода $\psi_{\beta\alpha} : V_\alpha \cap V_\beta \to GL(q, \mathbb{R})$ ([2], Часть 1, §5). Рассмотрим вложение $j : GL(q, \mathbb{R}) \to$

$GL(n,\mathbb{R}) : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-q}\end{smallmatrix}\right)$, где $A \in GL(q,\mathbb{R})$ и I_{n-q} — единичная $(n-q)$-мерная матрица, группы Ли $GL(q,\mathbb{R})$ в группу Ли $GL(n,\mathbb{R})$. Тогда существуют отображения

$$\varphi_{\beta\alpha} := j \circ \psi_{\beta\alpha} : V_\alpha \cap V_\beta \to Gl(n,\mathbb{R}),$$

удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{\gamma\alpha}(x) = \varphi_{\gamma\beta}(x) \cdot \varphi_{\beta\alpha}(x),\ x \in V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma,$$

где символ $\cdot$ обозначает произведение элементов в группе $GL(n,\mathbb{R})$. Согласно ([2], Часть 1, Предложение 5.2), существует главное $GL(n,\mathbb{R})$-расслоение $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{R}} \to M$ с функциями перехода $\varphi_{\beta\alpha}$. Отождествим $GL(q,\mathbb{R})$ с замкнутой подгруппой $j(GL(q,\mathbb{R}))$ группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$, тогда $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{R}}$, более того $\widehat{\pi}|_{\mathcal{R}} = \pi$. Таким образом, будем рассматривать $\mathcal{R}$ как редуцированное подрасслоение $GL(n,\mathbb{R})$-расслоения $\widehat{\mathcal{R}}(M, GL(n,\mathbb{R}))$.

Согласно предложению 3.1. $Q = ker\omega$ — H-связность на $\mathcal{R}$. Кроме того,

$$\widetilde{f}_{i*}Q_u = Q_0|_{f_i(u)} \quad \forall u \in \widetilde{U}_i \subset \mathcal{R} \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{4.1}$$

Продолжим связность Q до $GL(n,\mathbb{R})$-связности $\widehat{Q}$ на $\widehat{\mathcal{R}}$, положив $\widehat{Q}_{u\cdot a} := R_{a*}Q_u$ для любых $u \in \mathcal{R}$, $a \in GL(n,\mathbb{R})$. Связность $\widehat{Q}$ определяет некоторую линейную связность ∇ на многообразии M. Так как $T\mathcal{F} \subset Q$, то распределение TF геодезически инвариантно относительно связности ∇ на M. Покажем, что $\mathfrak{M}$ также геодезически инвариантное распределение на (M,∇).

Свойство распределения $\mathfrak{M}$ быть геодезически инвариантным — локальное, поэтому достаточно доказать его выполнение в окрестности точки $x \in M$. Пусть $x \in U$, где $f : U \to V$ — субмерсия из (N,∇^N)-коцикла, определяющего слоение (M,F). Рассмотрим произвольный вектор $\lambda \in \mathfrak{M}_x$, пусть $f_{*x}(\lambda) = \mu$, тогда $\mu \in T_yN$, где $y = f(x)$. Существует геодезическая $\sigma = \sigma(s)$, $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, связности (N,∇^N), удовлетворяющая условиям $\sigma(0) = y, \dot\sigma(0) = \mu$. Благодаря теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения, существует такое число δ, $0 < \delta \le \varepsilon$, и локально $\mathfrak{M}$-лифт $\gamma = \gamma(s)$, $s \in (-\delta,\delta)$, линии σ в точку x. Это значит, что γ — такая интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$, что $\gamma(0) = x$ и $f \circ \gamma = \sigma|_{(-\delta,\delta)}$. Так как $f_{*x} : \mathfrak{M}_x \to T_yN$ — изоморфизм векторных пространств, то $\dot\gamma(0) = \lambda$. Покажем, что γ геодезическая на (M,∇). Пусть $\widehat{\omega}$ — форма связности и $\widehat{\theta}$ — каноническая $\mathbb{R}^n$-значная 1-форма на $\widehat{\mathcal{R}}$, соответствующие $\widehat{Q}$ и связности ∇. Напомним, что $B_\xi \in \mathfrak{X}(\widehat{\mathcal{R}})$ называется *стандартным горизонтальным векторным полем,* если $\widehat{\omega}(B_\xi) = 0$ и $\widehat{\theta}(B_\xi) = \xi = const \in \mathbb{R}^n$. Как известно ([2], Глава III, предложение 6.3), γ — геодезическая в (M,∇) тогда и только тогда, когда γ — проекция интегральной кривой некоторого стандартного горизонтального векторного поля. Так как σ — геодезическая и $\sigma(0) = y$, то для $v \in p^{-1}(y)$ существует Q_0-горизонтальный лифт $\sigma_0 = \sigma_0(s), s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, кривой σ в точку v, более того $\theta_0(\dot\sigma_0(s)) = \xi = const \in \mathbb{R}^q$.

Пусть $\widetilde{f} : \widetilde{U} = \pi^{-1}(U) \to P$ — субмерсия, определенная субмерсией f и удовлетворяющая равенству $p \circ \widetilde{f} = f \circ \pi$. Возьмем $u \in \widetilde{f}^{-1}(v) \cap \pi^{-1}(x) \subset \mathcal{R}$. Пусть $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(s), s \in (-\delta,\delta)$, — $\widehat{Q}$- горизонтальный лифт кривой γ в точку u. Тогда равенство $\pi \circ \widehat{\gamma} = \gamma$ влечет за собой тот факт, что $\widehat{\gamma}$ интегральная кривая распределения $\widehat{\mathfrak{N}} := \widehat{\mathfrak{M}} \cap \widehat{Q}$, где $\widehat{\mathfrak{M}} := \widehat{\pi}^*\mathfrak{M}$. Так как $\widehat{\theta}|_{\mathcal{R}} = \widehat{j} \circ \widetilde{\theta}$, где $\widehat{j} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n :\ \xi \mapsto (\xi, 0_{n-q})$ и 0_{n-q} — ноль в $\mathbb{R}^{n-q}$, тогда (4.1) влечет равенство

$$\widehat{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s)) = \widehat{j} \circ \widetilde{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s)) = \widehat{j} \circ \theta_0(\widetilde{f}_* \dot{\widehat{\gamma}}(s)) = \widehat{j} \circ \theta_0(\dot\sigma_0(s)) \quad \forall s \in (-\delta,\delta), \tag{4.2}$$

откуда $\widehat{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s)) = (\xi, 0_{n-q}) = \eta \in \mathbb{R}^n$, если $\theta_0(\dot{\sigma_0}(s)) = \xi \in \mathbb{R}^q \; \forall s \in (-\delta, \delta)$. Поэтому, $\widehat{\gamma}(s)$, $s \in (-\delta, \delta)$, интегральная кривая горизонтального векторного поля B_η на $\widehat{\mathcal{R}}$. Это значит, что $\gamma(s) = \pi(\widehat{\gamma}(s))$ геодезическая на (M, ∇).

Таким образом, распределение $\mathfrak{M}$, как и TM, геодезически инвариантно на (M, ∇). Более того, $\mathfrak{M}$-лифт геодезической линии σ из V в точку $x = f^{-1}(\sigma(0))$ в U есть геодезическая на (M, ∇).

Заметим, что соотношение (4.2) выполняется для каждой геодезической γ в U и ее проекции $\sigma = f \circ \gamma$. Поэтому из соотношения (4.2) получаем, что каждая геодезическая γ на (M, ∇) в U отображается в геодезическую $f \circ \gamma$ на (N, ∇^N). Согласно лемме 2.1. это значит, что f — аффинное отображение.

Пусть γ — любая максимальная геодезическая многообразия аффинной связности (M, ∇), $\gamma(0) = x$ и $\dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{M}_z$. Так как $\mathfrak{M}$ — геодезически инвариантно, то $\dot{\gamma}(s) \in \mathfrak{M}_{\gamma(x)} \forall s$. Обозначим через $\widehat{\gamma}(s)$ горизонтальный лифт γ в точку $u = \widehat{\gamma}(0) \in \mathcal{R}$.

Благодаря (4.2) $\widetilde{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s) = \widehat{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s) = (\xi, 0_{n-q}) = \eta = const$.

Поэтому, согласно определению 3.2., канонический параметр на $\gamma(s)$ изменяется на всей числовой прямой. Таким образом, выполняется условие 3 теоремы 1.1., то есть $2 \Rightarrow 3$.

Обратно, покажем, что $3 \Rightarrow 2$. Сохраним введенные выше обозначения. Пусть $\mathfrak{M}$ фиксировано. Тогда, согласно предложению 3.1., определено расслоение трансверсальных реперов с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$ и указанным выше способом определено расслоение $GL(n, \mathbb{R})-$ реперов с проекцией $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{R}} \to M$, причем расслоение $\mathcal{R}$ вложено в $\widehat{\mathcal{R}}$ как редукция к замкнутой подгруппе $GL(q, \mathbb{R}) \times I_{n-q}$.

Обозначим через ∇ линейную связность на M, определенную выше, а через $\nabla^{(1)}$ — линейную связность, удовлетворяющую условиям $1), 2), 3)$ теоремы 1.1. Пусть $\widehat{Q}^{(1)}$ — горизонтальное распределение на $\widehat{\mathcal{R}}$, соответствующее линейной связности $\nabla^{(1)}$, а $Q^{(1)}$ — ограничение $\widehat{Q}^{(1)}$ на $\mathcal{R}$ и $\mathfrak{N}^{(1)} := Q^{(1)} \cap \widetilde{\mathfrak{M}}$.

Так как распределение TF геодезически инвариантно относительно ∇ и $\nabla^{(1)}$, то для поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ выполняются включения $T\mathcal{F} \subset Q^{(1)}$ и $T\mathcal{F} \subset Q$ на $\mathcal{R}$. Кроме того, каждая субмерсия $f_i : U_i \to V_i$ является аффинным отображением относительно обеих связностей ∇ и $\nabla^{(1)}$, поэтому $Q^{(1)} = Q$ на $\mathcal{R}$. Следовательно, геодезическая полнота распределения $\mathfrak{M}$ относительно связности $\nabla^{(1)}$ влечет полноту в смысле определения 1.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Доказательство теоремы 1.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как выполнены условия теоремы 1.1., то (M, F) — полное картаново слоение. Отсюда следует, согласно ([3], предложение 3), что существует связность Эресмана для слоения (M, F), то есть выполняется условие (i).

Таким образом, (M, F) — $(Aff(A^q), A^q)$-слоение со связностью Эресмана. Пусть $\kappa : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение и $\widetilde{F} = \kappa^* F$ — индуцированное слоение. Тогда, согласно ([6], теорема 2), существует субмерсия $r : \widetilde{M} \to B$ на q-мерное аффинное многообразие B такая, что слоение $\widetilde{F}$ образовано слоями этой субмерсии.

Нетрудно проверить, что распределение $\mathfrak{M}^* = \kappa^* \mathfrak{M}$ — связность Эресмана для слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$. При этом, $\mathfrak{M}^*$ — связность Эресмана для субмерсии r. Следовательно, $r : \widetilde{M} \to B$ — локально-тривиальное расслоение. Из точной гомотопической последовательности этого расслоения в силу односвязности $\widetilde{M}$ и связности слоев слоения вытекает односвязность аффинного многообразия B. Из выполнения условия 3 теоремы 1.1. вытекает существование такой линейной связности ∇ на M, относительно которой каждая субмерсия f_i из (N, ∇^N)-коцикла, задающего слоение (M, F), является аффинной субмерсией. Обозначим через $\widetilde{\nabla}$ индуцированную посредством κ линейную связность на $\widetilde{M}$. При этом субмерсия $r : \widetilde{M} \to B$ становится аффинным отображением $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ на аффинное многообразие B, а $\mathfrak{M}^*$ — геодезически инвариантным распределением.

Покажем, что B — геодезически полное аффинное многообразие. Пусть $\gamma = \gamma(s)$ — произвольная максимальная геодезическая в B, определенная на интервале, содержащем ноль, $b = \gamma(0)$ и $X = \dot{\gamma}(0)$. Возьмем вектор $Y \in \mathfrak{M}^*_y$ такой, что $r_{*y}Y = X$. Обозначим через $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(s)$ геодезическую в $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$, проходящую через точку $y = \widetilde{\gamma}(0)$ в направлении вектора Y. Поскольку $\mathfrak{M}^*$ — геодезически инвариантное распределение, то $\widetilde{\gamma}$ — интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}^*$. Согласно лемме 2.1. $r \circ \widetilde{\gamma}$ — геодезическая в аффинном многообразии B. Она проходит через точку b в направлении вектора X. Следовательно, $\gamma = r \circ \widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\gamma}$ — $\mathfrak{M}^*$-лифт кривой γ в точку y.

Накрывающее отображение $\kappa : \widetilde{M} \to M$ — локальный изоморфизм многообразий линейной связности, поэтому кривая $\sigma := \kappa \circ \widetilde{\gamma}$ — максимальная $\mathfrak{M}$-геодезическая в (M, ∇) с началом в точке $\kappa(y) = \widetilde{\sigma}(0)$. Согласно пункту 3) теоремы 1.1. канонический параметр s на геодезической $\sigma = \sigma(s)$ изменяется на всей числовой прямой. Отсюда вытекает, что канонический параметр на геодезических $\widetilde{\gamma}$ и γ также изменяется на всей числовой прямой. Таким образом, B — односвязное полное аффинное многообразие. Следовательно, $B = A^q$ и выполняется условие (ii).

Обратно, пусть выполнены условия (i) и (ii) теоремы 1.1. для (M, F). Тогда существует связность Эресмана $\mathfrak{M}$ для слоения (M, F). Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $\kappa : \widetilde{M} \to M$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}^* = \kappa^*\mathfrak{M}.$ — связность Эресмана для индуцированного слоения $\widetilde{F} = \kappa^*F.$ Согласно (ii) слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ образовано слоями субмерсии $r : \widetilde{M} \to A^q.$

Пусть $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{R}} \to \widetilde{M}$ — расслоение трансверсальных реперов для слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, $(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ — поднятое слоение и ω' — 1-форма индуцированной картановой связности на $\widetilde{\mathcal{R}}$. Заметим, что слоение $(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ образовано слоями субмерсии $\widetilde{r} : \widetilde{\mathcal{R}} \to G$, где $G = Aff(A^q)$, при этом выполняется равенство $r \circ \widetilde{\pi} = f \circ \widetilde{r}$, где $f : G \to G/H = A^q$ — каноническая проекция. Пусть $\mathfrak{M}' := \widetilde{\pi}^*\mathfrak{M}^*$ — индуцированное распределение на $\widetilde{\mathcal{R}}$. Тогда $\mathfrak{M}'$ — связность Эресмана для слоения $(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{F}})$. Как известно, в этом случае $\mathfrak{M}'$ — связность Эресмана для субмерсии $\widetilde{r} : \widetilde{\mathcal{R}} \to G$. 1-форма Мауэра-Картана ω^0 на G является формой картановой связности в H-расслоении $f : G \to G/H$, причем эта связность полная. Любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}'}(\widetilde{\mathcal{R}})$, удовлетворяющее условию $\omega'(X) = const$, проектируется в $Y \in \mathfrak{X}(G)$, для которого $\omega^0(Y) = const.$ В силу полноты поля Y векторное поле X является полным. Отсюда следует полнота слоений $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ и (M, F), рассматриваемых как картановы слоения. Таким образом, $3 \Rightarrow 1$.
Доказательство закончено.

6. Примеры

Пример 6.1. *Пусть $B = A^q \setminus \{0\}$, $q \geqslant 3$, — аффинное подпространство в A^q. Обозначим через Φ группу гомотетий B с образующей φ, гомотетией B с коэффициентом $\lambda > 1$. Тогда фактор-многообразие $Hopf^q_\lambda := B/\Phi$, называемое многообразием Хопфа, диффеоморфно произведению многообразий $S^{q-1} \times S^1$, а фактор-отображение $\kappa : B \to Hopf^q_\lambda$ — аффинное универсальное накрывающее отображение на неполное аффинное многообразие $Hopf^q_\lambda$. Трансверсально аффинное слоение $F = \{S^1 \times \{z\} \,|\, z \in Hopf^q_\lambda\}$ произведения $S^1 \times Hopf^q_\lambda$ является неполным трансверсально аффинным слоением на ком-*

пактном многообразии $M = S^1 \times Hopf^q_\lambda$. *Слоение* (M, F) *имеет интегрируемую связностью Эресмана* $\mathfrak{M} = TF^t$, *где* $F^t = \{\{\tau\} \times B \,|\, \tau \in S^1\}$ — *трансверсальное слоение.*

Индуцированное слоение на универсальном накрывающем многообразии $\mathbb{R}^1 \times B$ *для* M *образовано слоями субмерсии* $\mathbb{R}^1 \times B \to B$. *Таким образом, слоение* (M, F) *удовлетворяет условию* (i), *но не удовлетворяет условию* (ii) *теоремы 1.2.*

Пример 6.2. *Пусть* $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, *где* 0_n — *ноль в* $\mathbb{R}^n$, $n = p+q, p \geqslant 2, q \geqslant 1$. *Обозначим через* $f : M \to A^q : (x^1, ..., x^n) \mapsto (x^{p+1}, ..., x^n)$ *проекцию на* q*-мерное аффинное пространство* A^q. *Тогда* f — *субмерсия и, следовательно, определено трансверсально аффинное слоение* $F = \{f^{-1}(z) \,|\, z \in A^q\}$ *на* M *коразмерности* q. *Заметим, что слой* $f^{-1}(0_q)$ *диффеоморфен* $\mathbb{R}^p \setminus \{0_p\}$, *а остальные слои диффеоморфны* $\mathbb{R}^p$. *Следовательно, субмерсия* f *не допускает связности Эресмана, поскольку субмерсия со связностью Эресмана образует локально тривиальное расслоение и все ее слои диффеоморфны. Таким образом,* (M, F) *обладает свойством* (ii), *но не удовлетворяет* (i).

Список литературы

1. Wolak R. A., “Transversaly affine foliations compared with affine manifolds”, *1. Q J Math*, **43**:3 (1990), 369–384.

2. Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии*, **1**, Наука, 1988, 428 с.

3. Жукова Н. И., “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, 2007, № 256, 115—147.

4. Blumenthal R. A, Hebda J. J., “Ehresmann Connection for Foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 897–611.

5. Zhukova N. I., Dolgonosova A. Yu., “The automorphism groups of foliations with transverse linear connection”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.

6. Жукова Н. И., “Глобальные аттракторы полных конформных слоений”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 79—106.

Equivalent approaches to the concept of completeness of foliations with transverse linear connection

© **A. Yu. Dolgonosova**[3], **N. I. Zhukova**[4]

Abstract. We prove the equivalence of three different approaches to the definition of completeness of a foliation with transverse linear connection. It is shown that for the transverse affine foliations (M, F) of codimension q, $q \geqslant 1$, each of the mentioned above conditions are equivalent to fulfillment of the following two conditions: 1) there exists an Ehresmann connection to (M, F); 2) the induced foliation on the universal covering space is formed by fibres of submersion onto q-dimensional affine space.

Key Words: foliation, linear conntction, Ehresmann connection, affine foliation

[3] Lecturer of department of scientific disciplines, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod; annadolgonosova@gmail.com

[4] Professor of department of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; nzhukova@hse.ru