Математика

УДК 517.938

О топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся локальными произведениями

© **Е. Я. Гуревич**[1]

Аннотация. В работе выделяется класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях, представляющихся как локальные произведения диффеоморфизмов на поверхности и окружности, и приводится их топологическая классификация. Уточняется структура многообразий, допускающих такие диффеоморфизмы.

Ключевые слова: градиентно-подобные диффеоморфизмы, топологическая классификация, локальные произведения, локально-тривиальные расслоения

1. Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ связного замкнутого гладкого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит только из гиперболических периодических точек, и для любых различных седловых периодических точек $p, q \in \Omega_f$ инвариантные многообразия W^s_p, W^u_q либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Множество всех диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразии M^n будем обозначать через $MS(M^n)$.

Пусть $f \in MS(M^3)$. Непустое пересечение $W^s_p \cap W^u_q$, где p, q — различные седловые точки диффеоморфизма f, называется *гетероклиническим*, при этом в случае $dim(W^s_p \cap W^u_q) = 1$ компонента связности пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической кривой*, а в случае $dim(W^s_p \cap W^u_q) = 0$ любая точка пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической точкой*. Диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ называется *градиентно-подобным*, если из условия $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$ следует, что размерность множества W^u_p меньше размерности множества W^u_q. Это условие означает, что если неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ не содержит гетероклинических точек, то диффеоморфизм f является градиентно-подобным.

С.Смейл в работе [1] (Theorem A) показал, что градиентный поток функции Морса на произвольном многообразии M^n может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1-топологии) потоком Морса-Смейла без периодических траекторий, что доказывает существование диффеоморфизмов Морса-Смейла на любом многообразии (например, являющихся сдвигами на единицу времени вдоль траекторий таких потоков).

Полная топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из класса $MS(M^3)$ на ориентируемых трехмерных многообразиях получена в цикле работ В.З.Гринеса, О.В. Починки, В.С. Медведева и Х.Бонатти (см. обзор [2] и книгу [3]). Однако по прежнему является актуальной задача выделения содержательных классов диффеоморфизмов из $MS(M^3)$, допускающих более простое, по сравнению с общим случаем,

[1] Доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики; egurevich@hse.ru.

описание. Так, в [4] рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, для которых полным топологическим инвариантом является граф, аналогичный классическим инвариантам Е.А. Андроновой, А. Г. Майера и М. Пейкшото.

В этой работе выделяется класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях, допускающих возможность решения проблемы топологической классификации в терминах топологических инвариантов диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях меньшей размерности (поверхности и окружности). Приведем точную конструкцию. Пусть $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ — окружность, S^2_g — поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода $g \geq 0$, $\tau : S^2_g \to S^2_g$ — некоторый гомеоморфизм, который будем называть *отображением склейки*. Обозначим через $M^3_{g,\tau}$ пространство орбит действия группы $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$, порожденной степенями гомеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, определенного формулой $\gamma(z,r) = (\tau(z), r-1)$ и через $p_{g,\tau} : S^2_g \times \mathbb{R} \to M^3_{g,\tau}$ естественную проекцию.

Пусть $\varphi_2 : S^2_g \to S^2_g$ — диффеоморфизм такой, что либо $\varphi_2\tau = \tau\varphi_2$, либо $\varphi_2\tau^{-1} = \tau^{-1}\varphi_2$; $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — произвольный диффеоморфизм, $\widetilde{\varphi}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — его поднятие. Тогда на M^3_g корректно определен диффеоморфизм $\Phi : M^3_{g,\tau} \to M^3_{g,\tau}$, поднятие которого $\widetilde{\Phi} : S^2_g \times \mathbb{R} \to S^2_g \times \mathbb{R}$ определяется формулой $\widetilde{\Phi}(x,y) = (\widetilde{\varphi}_1(x), \varphi_2(y))$, $x \in \mathbb{R}, y \in S^2_{g,\tau}$. Будем называть диффеоморфизм Φ *локальным произведением* диффеоморфизмов φ_1, φ_2 и обозначать $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Класс всех диффеоморфизмов на многообразии M^3_τ, являющихся локальными произведениями градиентно-подобных диффеоморфизмов, обозначим через $G(M^3_\tau)$.

Методами работы [5] доказывается следующий результат.

Т е о р е м а 1.1. *Диффеоморфизмы* $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ *из класса* $G(M^3_\tau)$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существуют гомеоморфизмы* $h_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $h_2 : S^2_1 \to S^2_1$ *такие, что:*

1. $\varphi'_1 = h_1\varphi_1h_1^{-1}$;
2. $\varphi'_2 = h_2\varphi_2h_2^{-1}$;
3. $h_2\tau = \tau h_2$.

Полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности получена А.Г. Майером в работе [6]. Проблема топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях решена для широкого класса систем в работах [7], [8]. Таким образом, основная задача, возникающая при классификации диффеоморфизмов из класса $G(M^3_{g,\tau})$, сводится к различению многообразий вида $M^3_{g,\tau}$. Наиболее законченные результаты в этом направлении удается получить в случае $g \in \{0,1\}$, чему и посвящена эта работа.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов, сделаем еще одно замечание. Необходимые условия, которым удовлетворяют диффеоморфизмы из класса $G(M^3_\tau)$, позволяют выделить следующий класс систем. Пусть M^3 – ориентируемое многообразие, и $f : M^3 \to M^3$ — сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм. Обозначим через Ω^i_f множество периодических точек диффеоморфизма f, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{1,2,3\}$. Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ принадлежит классу $G^*(M^3)$, если множество его седловых периодических точек представляется как объединение двух подмножеств $\Sigma_f = \Sigma_a \cup \Sigma_r$ таких, что каждая компонента связности множеств $\mathcal{A} = W^u_{\Sigma_a} \cup \Omega^0_f$, $\mathcal{R} = W^s_{\Sigma_r} \cup \Omega^3_f$ является ручно вложенной ориентируемой поверхностью. В работе [9] доказано, что для сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $f \in G^*(M^3)$ существует целое число $g_f \geq 0$

и гомеоморфизм $\tau_f : S_{g_f} \to S_{g_f}$ такие, что M^3 диффеоморфно $M^3_{g_f,\tau_f}$. Таким образом, результаты настоящей работы применимы и для различения диффеоморфизмов из класса $G^*(M^3)$.

Лемма 1.1. *Пусть гомеоморфизмы* $\tau : S^2_g \to S^2_g, \tau' : S^2_g \to S^2_g$ *изотопны. Тогда* $M^3_{g,\tau}, M^3_{g,\tau'}$ *диффеоморфны.*

Из леммы 1.1. немедленно вытекает следующий результат.

Предложение 1.1. *Пусть* $f \in G^*(M^3_{0,\tau})$. *Тогда* $M^3_{0,\tau}$ *диффеоморфно прямому произведению* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Случай $g = 1$ дает более богатый набор многообразий. В этом случае $\tilde{S}^2_1 = \mathbb{R}^2$, $S^2_1 = T^2 = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$. Из [13] (см. раздел D главы 2) следует, что гомеоморфизмы $\varphi, \varphi' : T^2 \to T^2$ изотопны тогда и только тогда, когда совпадают индуцированные изоморфизмы фундаментальной группы $\varphi_* : \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$, $\varphi'_* : \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$. Так как группа $\pi_1(T^2)$ изоморфна прямому произведению $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, то изотопическая классификация гомеоморизмов тора сводится к классификации унимодулярных целочисленных матриц. Группу таких матриц будем обозначать через $GL(2,\mathbb{Z})$, а матрицу гомеоморфизма $\varphi_* : H_1(T^2,\mathbb{R}) \to H_1(T^2,\mathbb{R})$ будем обозначать через A_φ.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — унимодулярная целочисленнная матрица. Обозначим через $\breve{A} : T^2 \to T^2$ диффеоморфизм, заданный уравнениями $\breve{A}(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(mod\ 1)$.

Теорема 1.2. *Диффеоморфизм Морса-Смейла* f *принадежит классу* $G^*(M^3_{1,\tau})$ *тогда и только тогда, когда* $M^3_{1,\tau}$ *диффеоморфно многообразию* $M^3_{1,\breve{A}}$ *такому, что матрица* A *отображения склейки* $\breve{A}$ *совпадает с одной из следующих матриц:*
$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

В случае $g \geq 2$, согласно классификации Нильсена и Терстона (см. [10],[11]), множество всех гомотопических классов отображений $\tau : S^2_g \to S^2_g$ представляется как объединение четырех непересекающихся подмножеств T_1, T_2, T_3, T_4 со следующими свойствами.

1. если гомотопический класс $\{\tau\}$ отображения τ принадлежит подмножеству T_1, то $\{\tau\}$ содержит периодический гомеоморфизм;

2. если $\{\tau\} \in T_2$, то $\{\tau\}$ содержит приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;

3. если $\{\tau\} \in T_3$, то $\{\tau\}$ содержит приводимый гомеоморфизм, не явающийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;

4. если $\{\tau\} \in T_4$, то $\{\tau\}$ содержит псевдоаносовский гомеоморфизм.

Определения гомеоморфизмов, упомянутых в перечислении 1-4, имеется, например, в обзоре [12]. Аналогично доказательству теоремы 1.2. доказывается следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.3. *Если* $f \in G^*(M^3_{g,\tau})$, *то* $\{\tau\} \in T_1$.

Работа подготовлена с использованием средств Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2015г. по проекту 15-09-0255.

Автор выражает глубокую признательность В.З. Гринесу за внимание к работе плодотворные обсуждения.

2. Топологическая классификация многообразий, допускающих гомеоморфизмы из класса $G^*(M^3_{1,\tau})$

Доказательство леммы 1.1.

Из условия леммы следует, что существует изотопия $\xi_t : S^2_g \to S^2_g,\ t \in [0,1]$, соединяющая отображение $\xi_0 = \tau'\tau^{-1}$ с тождественным отображением ξ_1. Определим гомеоморфизм $H : S^2_g \times [0,1] \to S^2_g \times [0,1]$ формулой $H(z,t) = (\xi_t(z), t)$. Тогда многообразия $M^3_{g,\tau}, M^3_{g,\tau'}$ гомеоморфны при помощи гомеоморфизма $\check{H} : M^3_{g,\tau} \to M^3_{g,\tau'}$, который каждому классу эквивалентности $[(z,t)]$ ставит в соответствие класс эквивалентности $[H(z,t)]$. В силу единственности гладкой структуры на трехмерных многообразиях многообразия $M^3_{g,\tau}, M^3_{g,\tau'}$ являются диффеоморфными.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 1.2.. Следующие два утверждения доказаны в [14].

П р е д л о ж е н и е 2.1.

- *Фундаментальная группа* $\pi_1(M^3_{1,\tau})$ *является полупрямым произведением подгруппы* $R_\tau \cong \mathbb{Z}$ *и нормальной подгруппы* $N_\tau = p_\tau(T^2 \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}^2$, *то есть гомотопический класс* $[c] \in \pi_1(M^3_{1,\tau})$ *имеет единственное представление* (a,b), $a \in R_J, b \in N_J$, *а групповая операция определяется следующим образом:* $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1+a_2, J^{a_1}(b_2)+b_1)$.

- *Если гомеоморфизм* $h : M^3_{1,\tau} \to M^3_{1,\tau}$ *индуцирует изоморфизм* $h_* : \pi_1(M^3_{1,\tau}) \to \pi_1(M^3_{1,\tau})$ *такой что* $h_*(N_\tau) = N_\tau$, *то* h_* *единственным образом определяется матрицей* $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ *и элементом* $\beta \in N_\tau$ *такими, что* $h_*(0,b) = (0, H(b)), b \in \mathbb{Z}^2$, *при этом либо* $h_*(1,0) = (1,\beta)$ *и* $HJ = J'H$, *либо* $h_*(1,0) = (-1,\beta)$ *и* $HJ^{-1} = J'H$. *Гомеоморфизм* h *накрывается гомеоморфизмом* $\tilde{h} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ *таким что* $\tilde{h}_* : \pi_1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) \to \pi_1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$ *определяется матрицей* H.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть* $A, B \in GL(2,\mathbb{Z})$. *Многообразия* $M^3_{1,\check{A}}$ *and* $M^3_{1,\check{B}}$ *диффеоморфны тогда и только тогда, когда существует матрица* $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ *такая, что выполняется одно из следущих условий:*

- $AH = HB$,
- $A^{-1}H = HB$.

Приведенное ниже утверждение доказано в работе [17] (см. лемму 3).

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Пусть собственные числа матрицы* $F \in GL(2,\mathbb{Z})$ *являются корнями из единицы. Тогда* F *подобна (при помощи матрицы из* $GL(2,\mathbb{Z})$ *) одной из следующих матриц.*

$$B_{1,m}=\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix};\ B_{2,m}=\begin{pmatrix}-1&m\\0&-1\end{pmatrix};\ B_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix};\ B_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix};$$
$$B_5=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix};\ B_6=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\ B_7=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix},\ m\in\{0,1,2,...\}.$$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.2..

Доказательство теоремы 1.2.. Докажем необходимость. Пусть $f\in G^*(M^3_{1,\tau})$. В силу [9] каждая компонента связности T множества $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ гомеоморфна тору T^2. Так как множество $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ f-инвариантно, то гомеоморфизм f индуцирует изоморфизм $f_*:\pi_1(M^3_{1,\tau})\to\pi_1(M^3_\tau)$ такой что $f_*(N_\tau)=N_\tau$. Тогда, в силу предложения 2.1., изоморфизм f_* единственным образом определяется матрицей $F\in GL(2,\mathbb{Z})$.

Не уменьшая общности предположим, что $f(T)=T$ для любой компоненты множества $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ (в противном случае перейдем к рассмотрению некоторой степени диффеоморфизма f, при этом тип многообразия $M^3_{1,\tau}$ не изменится). Обозначим через φ гомеоморфизм, являющийся ограничением диффеоморфизма f на множество T. Тогда матрица A_φ индуцированного изоморфизма $\varphi_*:\pi_1(T)\to\pi_1(T)$ совпадает с матрицей F.

Напомним, что необходимым условием существования на многообразии $M^3_{1,\tau}$ диффеоморфизма $f\in G^*(M^3_{1,\tau})$ является условие $\varphi\tau=\tau\varphi$, что влечет условие $FA_\tau=A_\tau F$.

Из работы [9] следует, что многообразие $M^3_{1,\tau}$ гомеоморфно фактор-пространству многообразия $T\times[0,1]$ по отношению эквивалентности $(z,1)\sim(\tau(z),0)$. Пусть $\check{H}:M^3_{1,\tau}\to M^3_{1,\check{A}_\tau}$ — гомеоморфизм, построенный при доказательстве леммы 1.1.. Положим $f'=\check{H}f\check{H}^{-1}$, $\varphi'=f'|_{\check{H}(T)}$. Тогда гомеоморфизм φ' удовлетворяет условию $\varphi'\check{A}_\tau=\check{A}_\tau\varphi'$.

Возможны два случая: 1) матрица A_τ является гиперболической (то есть оба собственных числа λ_1,λ_2 по модулю отичны от единицы) 2) матрица A_τ – не гиперболическая.

Рассмотрим случай 1). В силу работы 20 гомеоморфизм $\check{A}_\tau$ является аносовским, из формулы Лефшеца следует, что для любого $l\in\mathbb{N}$ число неподвижных точек отображения J^l равно $\lambda_1^l+\lambda_2^l-2$ и стремится к бесконечности при $l\to\infty$. Тогда найдется такое l, что множество P_l неподвижных точек отображения τ^l содержит больше точек, чем множество периодических точек гомеоморфизма φ'.

Из условия $\varphi'\check{A}_\tau=\check{A}_\tau\varphi'$ следует, что $\varphi'(P_l)=P_l$. Но так как гомеоморфизм φ' топологически сопряжен с градиентно-подобным диффеоморфизмом, то множество его периодических точек является единственным его конечным инвариантным множеством. Полученное противоречие доказывает, что матрица A_τ не может быть гиперболической.

Рассмотрим случай 2). Тогда матрица A_τ подобна одной из матриц $B_{1,m},B_{2,m},B_3,...,B_7$, перечисленных в предложении 2.3.. В силу предложения 2.2. возможные топологические типы многообразия $M^3_{1,\tau}$ исчерпывается случаями, когда матрица A_τ в точности совпадает с одной из матриц $B_{1,m},B_{2,m},B_3,...,B_7$. Так как многообразие $M^3_{1,\tau}$ предполагается ориентируемым, то матрица A_τ имеет определитель, равный единице, что исключает сразу матрицы B_6,B_7. Для завершения доказательства осталось показать, что φ не может коммутировать с диффеоморфизмом τ в случае, когда его матрица совпадает с матрицей $B_{1,m}$ или $B_{2,m}$ при $m\geq1$. Предположим, что $A_\tau=B_{1,m}$, $m\geq1$ (случай $A_\tau=B_{2,m}$ рассматривается аналогично).

Обозначим через $\mathcal{A}_\varphi$ объединение замыканий устойчивых многообразий седловых периодических орбит диффеоморфизма φ. Из определения и условия $\varphi\tau=\tau\varphi$ следует, что $\tau(A_\varphi)=A_\varphi$. Совокупность устойчивых многообразий всех периодических орбит задает клеточное разбиение тора T, поэтому найдется замкнутая кривая $\mu\in A_\varphi$, гомотопический класс которой определяется как $[\mu]=(0,1)$. Тогда $[\tau^l(\mu)]=(lm,1)$. Так как A_f содержит конечное число замкнутых кривых, то найдется такое $l>0$, что $\tau^l(\mu)$ не будет принадлежать $\mathcal{A}_\varphi$, что противоречит условию $\tau(A_\varphi)=A_\varphi$.

Достаточность условия теоремы следует из работы [18] где для каждого из периодических отображений $\check{B}_i$, $i \in \{1, ..., 5\}$, указывается алгоритм построения диффеоморфизма Морса-Смейла $\varphi_i : T^2 \to T^2$, коммутирующего с этим отображением. Представители каждого класса топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности приведены, например, в работе [5]. Пусть $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — один из таких представителей. Тогда локальное произведение (ψ, φ_i) является диффеоморфизмом Морса-Смейла на $M^3_{1,\check{B}_i}$.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.
2. В. З. Гринес, О. В. Починка, “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *УМН*, **68**:409 (2013), 129–188.
3. Гринес В.З., Починка О.В.,, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три.*, Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2011.
4. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, “О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток”, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 81–104.
5. В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка, “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динам.*, **10** (2014), 17–33.
6. Майер А.Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ*, 1939, 12, 215-229.
7. Безденежных А. Н., В. З. Гринес, “Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях”, *Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горький, ГГУ.*, 1985, 111 - 112.
8. Гринес В. З., “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Мат. заметки*, **54**:3 (1993), 3-17.
9. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, С. Х. Зинина, “427–438”, *Нелинейная динам*, **10**:4 (2014).
10. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flachen I”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189-356.
11. W. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.
12. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1 (1990), 3–39.

13. D. Rolfsen, “Transactions of the American Mathematical Society”, **450**:1 (2003), 26-28.

14. Ghys E., Sergiescu V., “Stabilite et conjugaison differentiable pour certains feuilletages”, *Topology*, **19**:2 (1980), 179–197.

15. Гринес В. З., Капкаева С. Х., Починка О. В., “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Математический сборник*, **10**, 205 (2014), 19-46.

16. Shub M., “Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology”, *Dinamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, salvador, 1971), Academic Press, New York, (1973).*

17. Batterson S., “The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395-403.

18. Гуревич Е. Я., Сяинова Д. Т., “Реализация изотопических классов градиентно-подобных диффеоморфизмов тора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16** (2014), 46-56.

19. Plykin R.V., “On structure of the centralizers of Anosov diffeomorphisms of torus.”, *UMN*, **53**:6 (1998), 259–260.

20. J. Franks, “Anosov diffeomorphisms on tori”, *Transactions of the american mathematical society*, **145** (1969), 61–93.

On topological classification of gradient-like diffeomorphisms that are locally products.

© E. Ya. Gurevich[2]**,**

Abstract. We define a class of gradient-like diffeomorphisms that can be presented as local products of diffeomorphisms on the circle and on a surface, provide their topological classification and specify topology of the ambient manifold.
Key Words: gradient-like diffeomorphism, topological classification, local product, mapping torus.

[2] Associate Professor of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, elena _ gurevich@list.ru.